?knujdoklodnog!

1. Feladat. P.R. (egy elképzelt univerzumban) a(z elképzelt) matektáborba levitt pár üveg nutellát.
A gyerekek az első nap megették a nutella felét, és még egy üveggel.
Majd a második nap megették a maradék nutella két harmadát, és még egy üveggel.
Majd a harmadik nap megették a maradék nutella három negyedét, és még egy üveggel.
Így G.V. az utolsó, szombati napon már csak 7 üveg nutellát talált a társalgóban.
Hány üveg nutellát hozott Ricsi a matektáborba?

---

2. Feladat. Egy kör kerülete mentén (valamilyen sorrendben) 2016 darab 1-es szám, és 2017 darab 0-s szám szerepel. Anna a következőt játsza:
Bármely két a kör kerületén szomszédos szám közé:

- 0-t ír, ha a szomszédos számok azonosak, és
- 1-t ír, ha a szomszédos számok különbözőek.

Majd, ha Anna a 2016 + 2017 párral már mind végzett, az eredeti 2016 + 2017 számot letörli.
Elérheti-e Anna ilyen lépésekkel, hogy a kör kerületén minden szám 0-es legyen?

---

3. Feladat. Legyen egy sorozat első eleme: $a_1 = 100$, míg második eleme: $a_2 = 55$. A további elemeket úgy kapom, hogy a korábbi indexű tagból kivonom az őt követőt, vagyis $a_{n+1} = a_{n-1} - a_n$. A tagokat csak addig veszem, ameddig valamennyi tag nemnegatív.
Vagyis a fenti példában a megfelelő tagok: $100; 55; 45; 10; 35$.
Ha a_1-t meghagyjuk 100-nak, mennyi legyen a_2, hogy a lehető leghosszabb sorozatot kapjuk?

---

4. Feladat. Adott n darab egyenként 1 liter térfogatú üveg, kezdetben mindegyikben $\frac{1}{n}$ liter bodzaszörppel.
Egy lépésben, ha az U üvegben legalább ugyanannyi szörp van, mint a V üvegben, akkor az U üvegből a megfelelő mennyiségű szörp áttöltésével a V üvegbeli szörpmennyiség megduplázható.
(Például, ha $U = 0,3$ l, és $V = 0,21$ l, akkor az áttöltés után $U' = 0,09$ l, illetve $V' = 0,42$ l lesz.)
Mely n-ek esetén gyűjthető össze ilyen lépésekkel az összes szörp egyeten üvegbe?

---

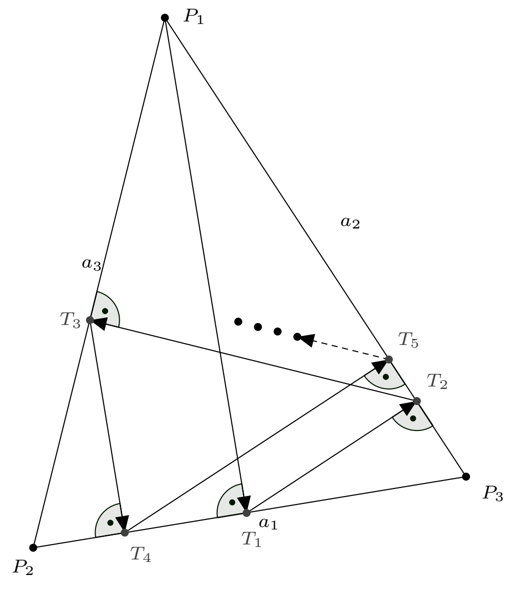
5. Feladat. Az $a_1 = 6, a_2 = 9, a_3 = 6, a_4 = 2$ számokból indulva minden további számot úgy képezünk, hogy az előző négy szám összegének tizes maradékát vesszük.
(Vagyis: $a_{n+4} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \pmod{10}$, és így a következő négy eleme a sorozatnak: $3, 0, 1, 6$.)
Előfordul-e valahol a sorozatban közvetlenül egymás után: $2, 0, 1, 6$?

---

6. Feladat. Az $1, 2, ..., n$ számokat olyan sorrendben írom fel egymás utám, hogy (az első számot kivéve) minden felírt számra teljesüljön, hogy az az összes korábban felírt szám mindegyikétől kisebb, vagy pedig az összes korábban felírt szám mindegyikétől nagyobb legyen.
Hányféle módon tudom ezt megtenni?

---

7. Feladat. Egy hegyesszögű háromszög csúcsai: P_1, P_2, P_3, a csúcsokkal szemben lévő oldalai: a_1, a_2, a_3.
Induljunk ki a P_1 csúcsból, és bocsássunk merőlegest az a_1 oldalra! A merőleges talppontja legyen: T_1.
Majd T_1-ből bocsássunk merőlegest az a_2 oldalra!
Az új merőleges talppontja legyen: T_2.
Az eljárást ciklikusan folytatva kapunk talppontok egy $T_1, T_2, T_3, T_4, ..., T_{2016}$ sorozatát.
Igazold, hogy a talppont-sorozat tagjai mind különböző pontok!



descentdescentdescentdescentdescent

8. Feladat. Igazoljuk, hogy a következő egyenletnek a pozitív egészek körében nincs megoldása!

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$$

---

9. Feladat. (Leonard Euler)
Igazoljuk, hogy a következő egyenletnek az egészek körében csak a triviális $(0; 0; 0)$ a megoldása!

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0$$

---

10. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$x^2 - y^2 = 2xyz$$

---

11. Feladat. (OKTV 1999/2000 - **)
Keressük meg az összes pozitív p prímet, melyhez vannak olyan x, y, n pozitív egészek, melyek kielégítik a következő egyenletet:

$$p^n = x^3 + y^3$$

Vegyes feladatok

12. Feladat.
Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül $f(n+1) > f(f(n))$.
Igazold, hogy $f(n) = n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re!

---

13. Feladat. (**Sylvester-Gallai tétel** - **)
Adott $(n \geq 3)$ pont a síkon. Ekkor vagy az összes adott pont illeszkedik egy egyenesre, vagy van egy olyan egyenes, amire közülük pontosan kettő illeszkedik!

---

14. Feladat. (**A. Engel, Problem-Solving Strategies** - **)
Arthur király meghívott $2n$ lovagot Camelotba. Sajnos minden lovagnak a többi lovag között pontosan $n-1$ darab ellensége van. (Az ellenséges viszony kölcsönös.) Arthur kiadta parancsba Merlinnek, hogy a lovagokat le kell ültetni a Kerekasztal mellé, méghozzá úgy, hogy senki ne üljön ellensége mellé.
Mutasd meg, hogy Merlin biztosan teljesíteni tudja a király parancsát.