

Geometriai transzformációk

11 elemi geometriafeladat

10. B és C

BDG Matektábor

2016. október 6.

Röviden a transzformációkról

- ▶ Tengelyes tükrözés

Röviden a transzformációkról

- ▶ Tengelyes tükrözés
- ▶ Középpontos tükrözés

Röviden a transzformációkról

- ▶ Tengelyes tükrözés
- ▶ Középpontos tükrözés
- ▶ Pont körüli elforgatás

Röviden a transzformációkról

- ▶ Tengelyes tükrözés
- ▶ Középpontos tükrözés
- ▶ Pont körüli elforgatás
- ▶ Párhuzamos eltolás

Röviden a transzformációkról

- ▶ Tengelyes tükrözés
 - ▶ Középpontos tükrözés
 - ▶ Pont körüli elforgatás
 - ▶ Párhuzamos eltolás
-
- ▶ Középpontos hasonlóság

Röviden a transzformációkról

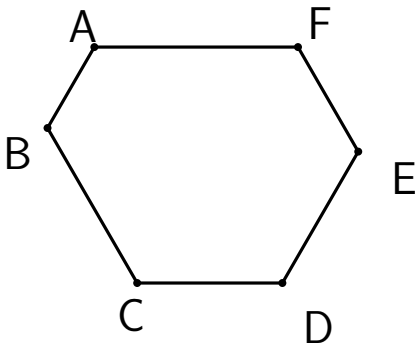
- ▶ Tengelyes tükrözés
- ▶ Középpontos tükrözés
- ▶ Pont körüli elforgatás
- ▶ Párhuzamos eltolás

-
- ▶ Középpontos hasonlóság

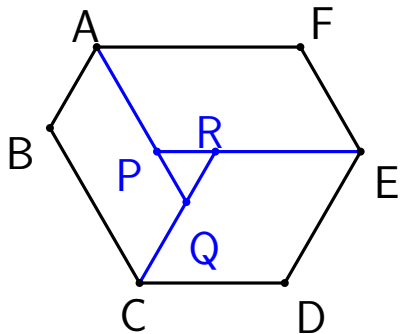
-
- ▶ Forgatva nyújtás: $S(E, FED\angle, \frac{ED}{EF})$

1. Feladat

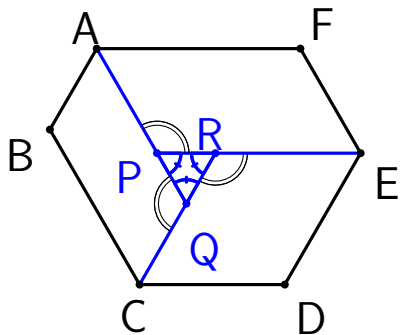
Az $ABCDEF$ hatszög oldalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy ha $BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$, akkor a hatszög szögei egyenlők.



Megoldás



EF -et eltoljuk \vec{FA} -ral
 $\Rightarrow P$
 AB -t eltoljuk \vec{BC} -ral
 $\Rightarrow Q$
 CD -t eltoljuk \vec{DE} -ral
 $\Rightarrow R$



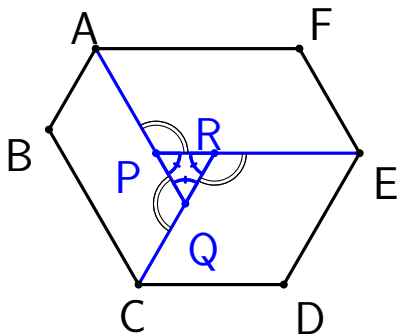
Az eltolások miatt

$$BC - EF = PQ,$$

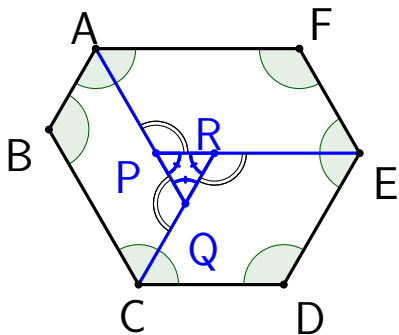
$$AF - CD = PR \text{ és}$$

$$ED - AB = RQ.$$

Ezekről tudjuk, hogy
 egyenlők $\Rightarrow PQR \triangle$
 szabályos



\Rightarrow a kék szögek
 60° -osak \Rightarrow a dupla
 szögek (külső szögek)
 120° -osak \Rightarrow
 $CDE\angle = 120^\circ$ és
 $DCR\angle = DER\angle = 60^\circ$.
 Ugyanígy a többi
 paralelogrammában.



**Tehát a hatszög
minden szöge
 120° -os.**

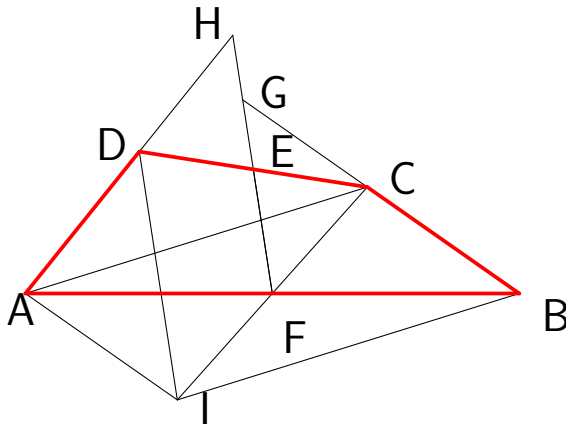
2. Feladat

$ABCD$ konvex négyszögben $AD = BC$. Legyen CD oldal felezőpontja E , AB oldalé F . AD és FE egyenesek metsszék egymást H pontban, BC és FE egyenesek G pontban. Mutassuk meg, hogy:

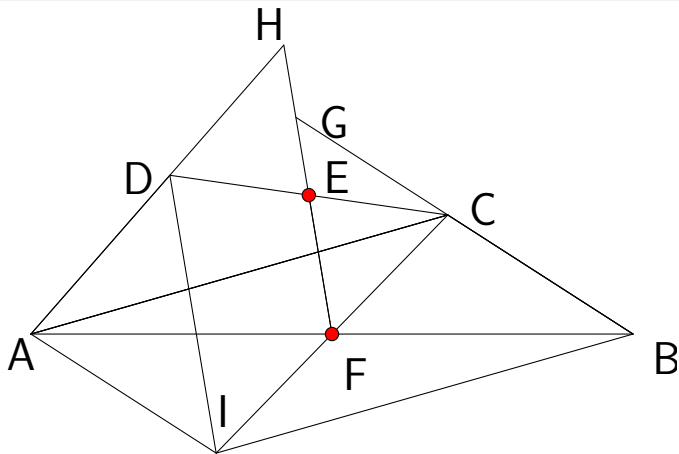
$$\angle AHF = \angle BGF$$

Megoldás

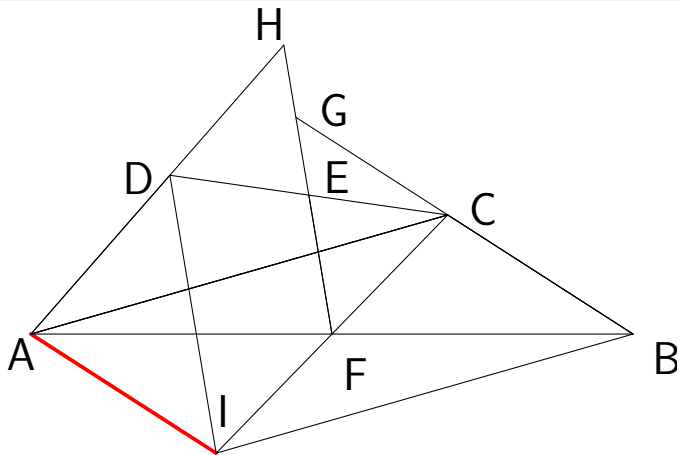
$ABCD$ négyszög:



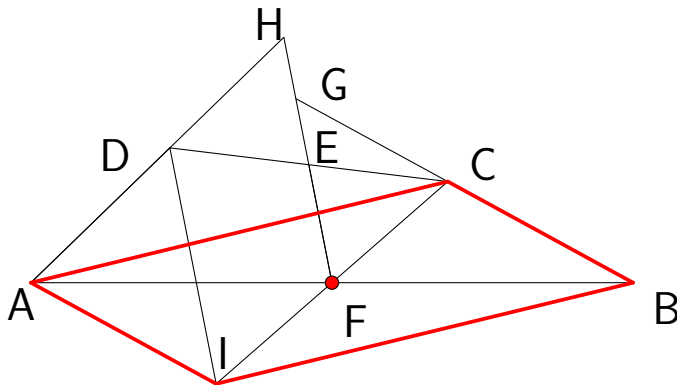
E és F felezőpont:



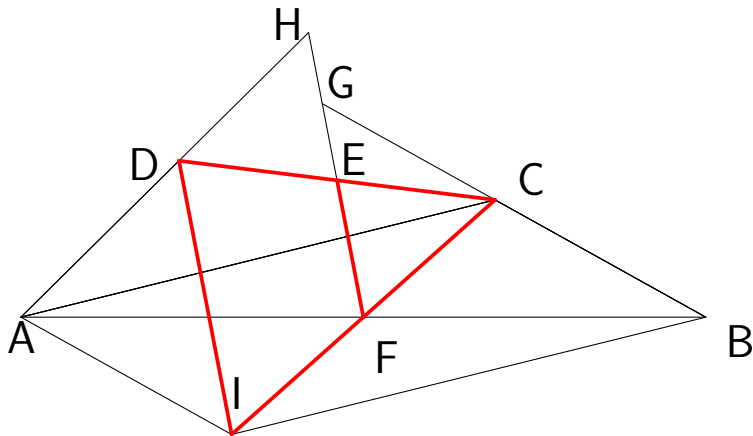
Toljuk el CB szakaszt CA vektorral $\Rightarrow AI$.



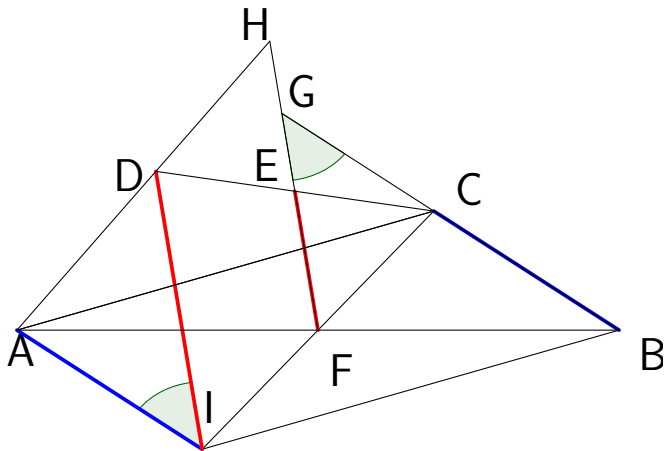
$BCAI$ paralelogramma. F felezőpontja AB szakasznak, így CI -nek is.



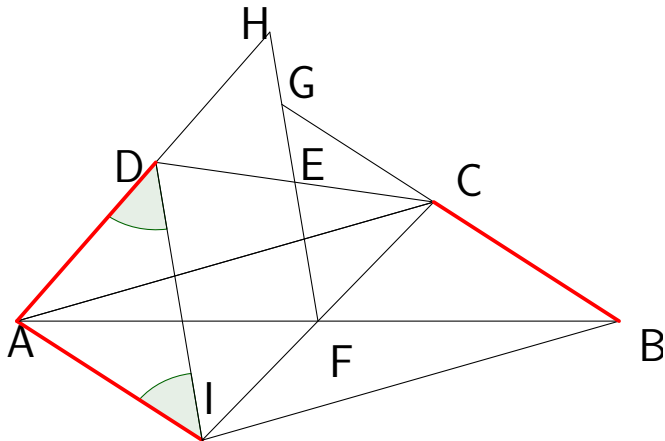
$CDI \triangle$ -ben EF középvonal $\Rightarrow EF \parallel DI$



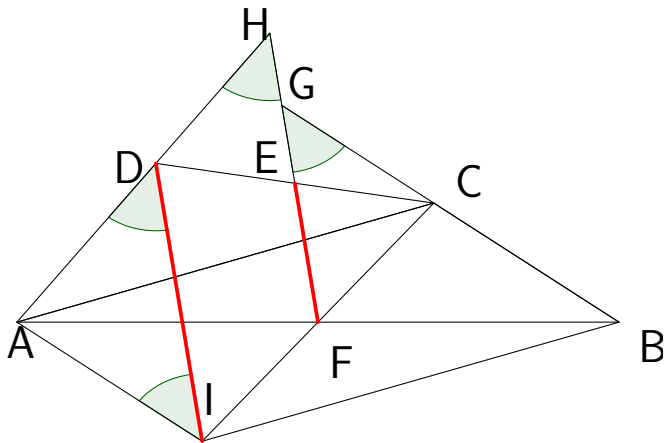
$EF \parallel DI$ és $CB \parallel AI \Rightarrow \angle BGF = \angle AID$



$$AI = BC = AD \Rightarrow \angle AID = \angle ADI$$



$$EF \parallel DI \Rightarrow \angle AHF = \angle ADI = \angle AID = \angle BGF$$



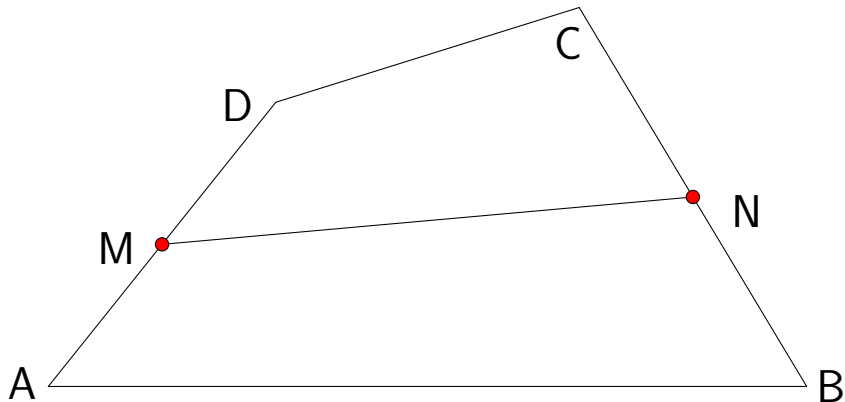
3. Feladat

$ABCD$ négyszögben legyen AD oldal felezőpontja M , BC oldalé N . Ha $2MN = AB + CD$, akkor bizonyítsuk be, hogy

$$AB \parallel CD$$

Megoldás

M és N felezőpont:



Indirekt:

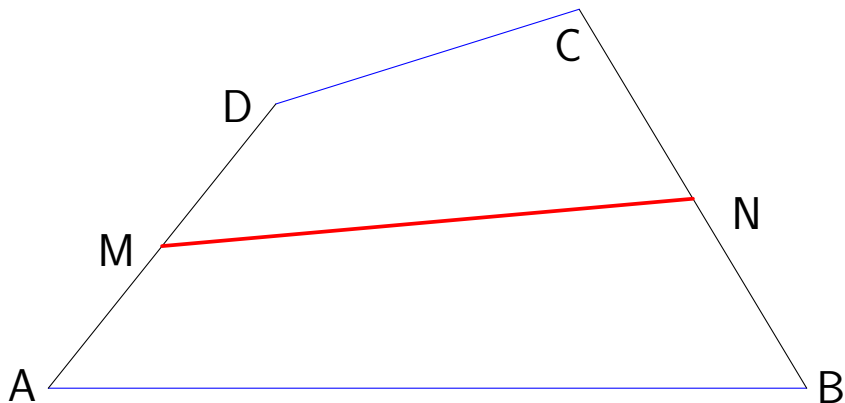
Tegyük fel, hogy:

$$2MN = AB + CD,$$

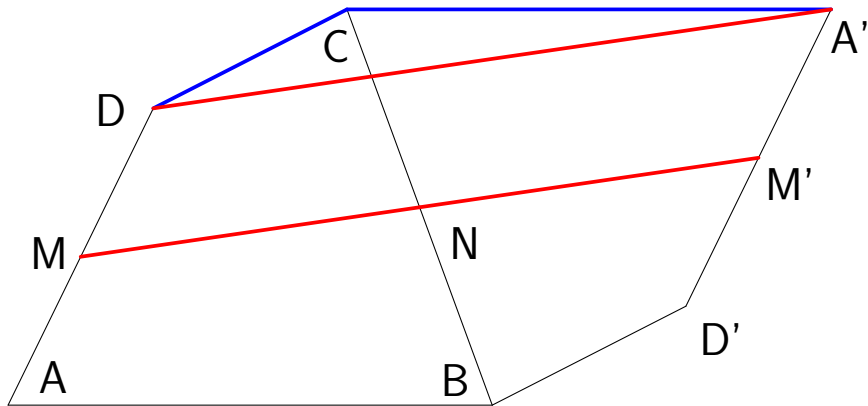
de

$$AB \nparallel CD$$

Tükrözzük az ábrát N pontra.

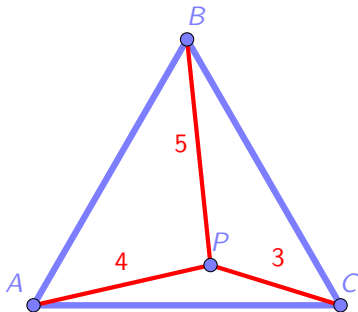


$$2MN = MM' \Rightarrow AB + CD = CD + A'C > A'D$$



4. Feladat

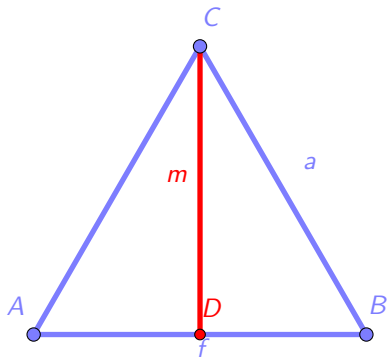
Egy ABC szabályos háromszögben van egy P pont úgy, hogy $PC = 3$, $PA = 4$ és $PB = 5$. Mekkora a háromszög kerülete?



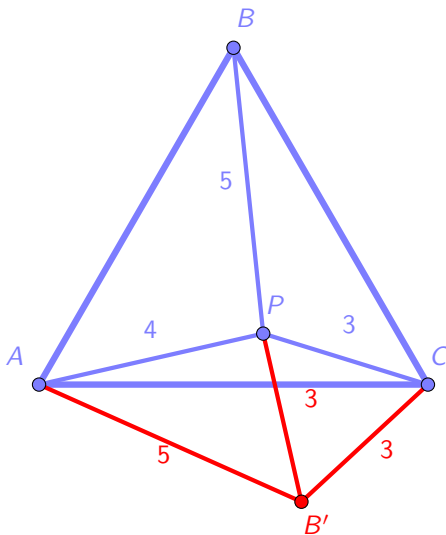
1. Megoldás

Szabályos háromszög

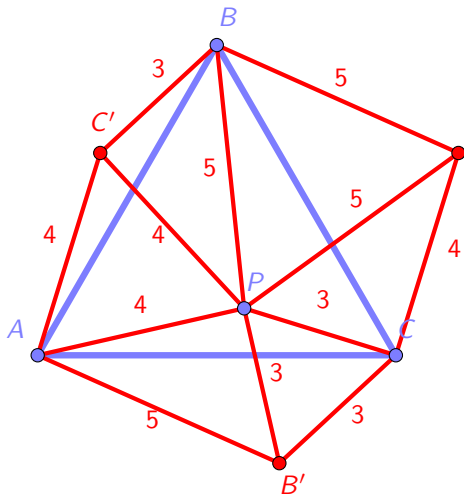
Ha egy szabályos háromszögnek tudjuk a oldalát, akkor a háromszög területe $\frac{a \cdot m}{2} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ha a területe T , akkor meg az oldala $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} T}$.



Forgassuk el $BPC\triangle$ -et
 C pont körül 60° -kal.
 $\Rightarrow B'$. Így keletkezett
egy $B'CP$ szabályos, és
egy $B'CA$ 3, 4, 5 oldalú
háromszög.



Úgyanígy 60° -kal forgassuk el $CPA\triangle$ -et, A körül, és $APB\triangle$ -et B körül. Így keletkezik egy hatszög, aminek a területe az eredeti háromszög területének kétszerese.



Keletkezett három szabályos, és három 3,4,5 oldalú \triangle , melyeknek egyenként tudjuk a területét.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 6 + 9 \frac{\sqrt{3}}{4} + 16 \frac{\sqrt{3}}{4} + 25 \frac{\sqrt{3}}{4} &= \\ &= 18 + 50 \frac{\sqrt{3}}{4} = 18 + 25 \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$T_{\Delta} = \frac{18 + 25\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{18 + 25\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}} =$$

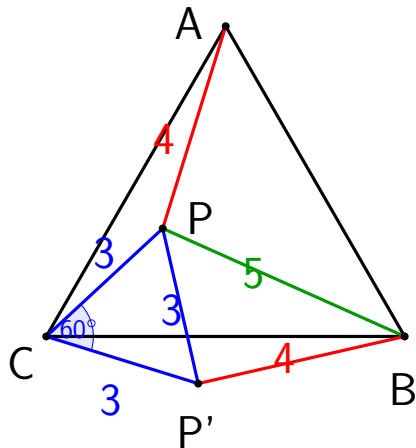
$$= \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{36\sqrt{3} + 25 \cdot 3}{3}} =$$

$$= \sqrt{12\sqrt{3} + 25}$$

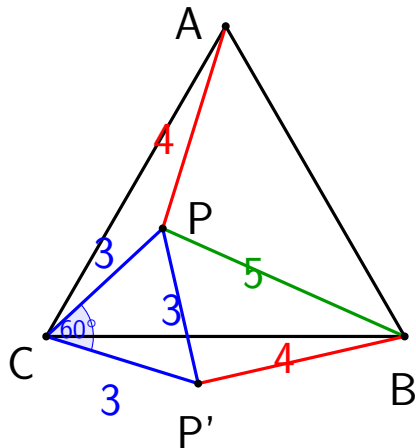
$$K_{\Delta} = 3 \cdot \sqrt{12\sqrt{3} + 25}$$

2. Megoldás



$APC \triangle$ -et elforgatjuk C körül -60° -kal.

2. Megoldás

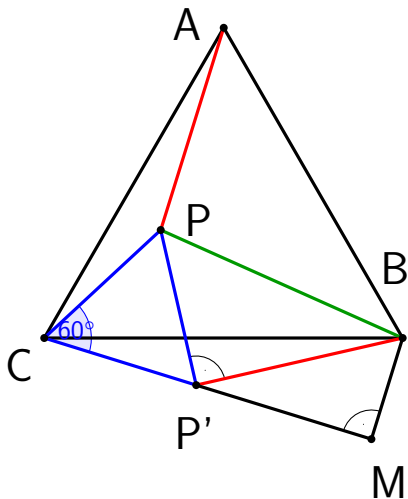


$APC \triangle$ -et elforgatjuk C körül -60° -kal.

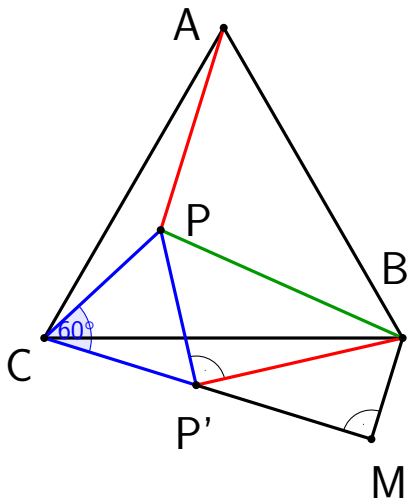
$\Rightarrow B \equiv C'$

$PCP' \angle = 60^\circ$ a forgatás miatt $\Rightarrow PCP' \triangle$

szabályos $\Rightarrow PP' = 3$

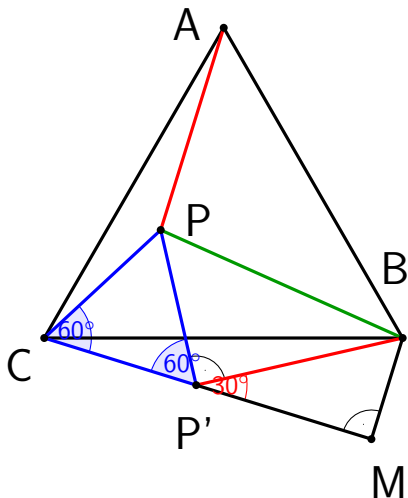


$PP'B\triangle$ -ben $PP' = 3$,
 $P'B = 4$ és $PB = 5 \Rightarrow$
 $PP'B\angle = 90^\circ$
 (Pitagorasz-
 számhármás)

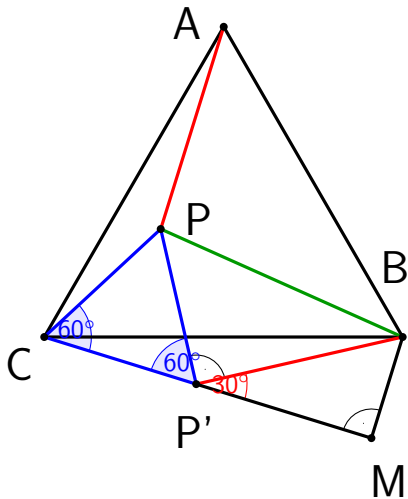


$PP'B\triangle$ -ben $PP' = 3$,
 $P'B = 4$ és $PB = 5 \Rightarrow$
 $PP'B\angle = 90^\circ$
 (Pitagorasz
 számhármás)

Állítsunk merőlegest
 CP' -re B -ből $\Rightarrow M$



$CP'P \angle = 60^\circ$ és
 $PP'B \angle = 90^\circ \Rightarrow$
 $BP'M \angle = 30^\circ \Rightarrow$
 $BP'M \triangle$ egy szabályos
 \triangle fele $\Rightarrow BM = 2,$
 $P'M = 2\sqrt{3}$



$CP'P \angle = 60^\circ$ és

$PP'B \angle = 90^\circ \Rightarrow$

$BP'M \angle = 30^\circ \Rightarrow$

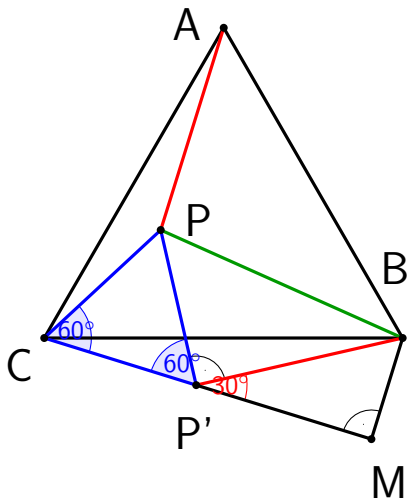
$BP'M \triangle$ egy szabályos

\triangle fele $\Rightarrow BM = 2,$

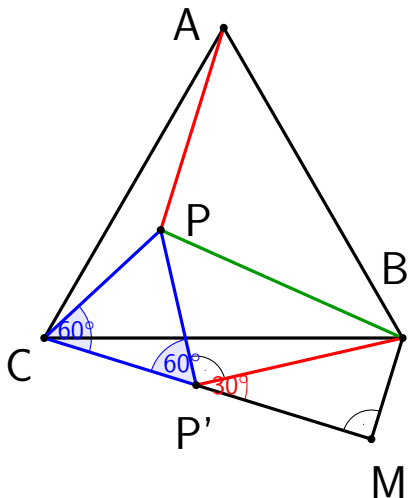
$P'M = 2\sqrt{3}$

$CMB \triangle$ -ben alkalmazva
a Pitagorasz-tételt

$$CB^2 = (3 + 2\sqrt{3})^2 + 2^2$$



$$CB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} = 6,7664$$



$$CB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} = 6,7664$$

$$Ker = 3 \cdot CB = 3 \cdot 6,7664 = 20,2992$$

5. Feladat

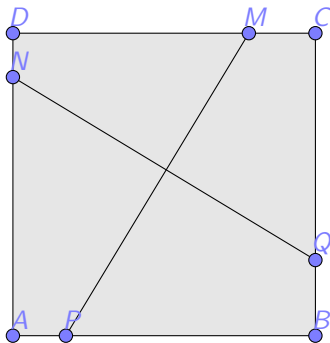
$ABCD$ egy egység oldalú négyzet. P , Q , M és N pontok AB , BC , CD és DA oldalakon helyezkednek el úgy, hogy

$$AP + AN + CQ + CM = 2.$$

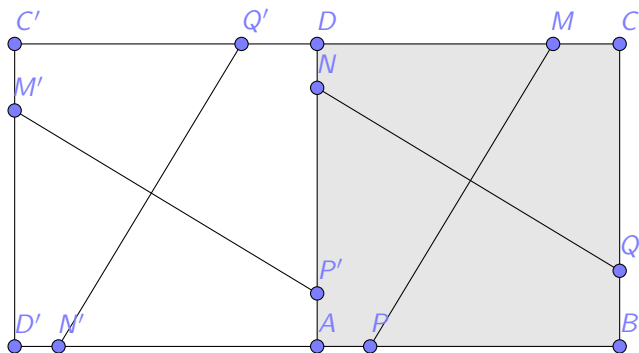
Bizonyítsuk be, hogy $PM \perp QN$

Megoldás

$$AP + AN + CQ + CM = 2$$



A 90° -os forgatás után.

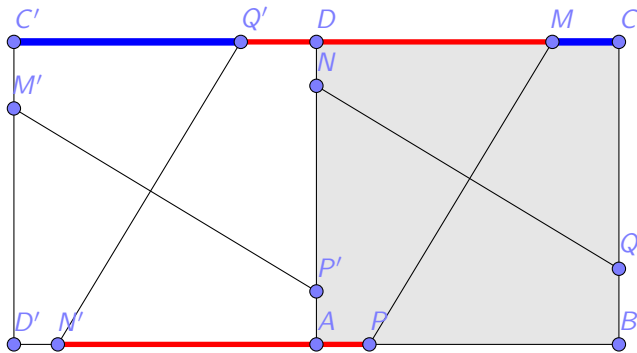


A feladat meghatározása miatt tudjuk, hogy:

$$AP + AN + CQ + CM = 2$$

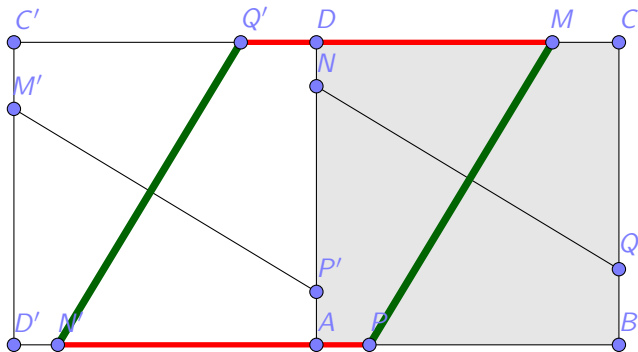
$$AP + AN = 2 - CQ - CM$$

Az ábráról látszik, hogy: $MQ' = 2 - C'Q' - CM$



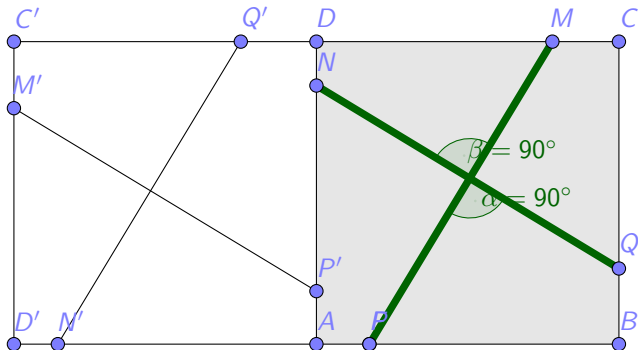
Tehát $AP + AN' = MQ'$ és párhuzamosak is.
 Vagyis $Q'MPN'$ egy paralelogramma, ezért

$$Q'N' \parallel MP$$



Tehát a 90° -os forgatás előtt:

$$PM \perp QN$$



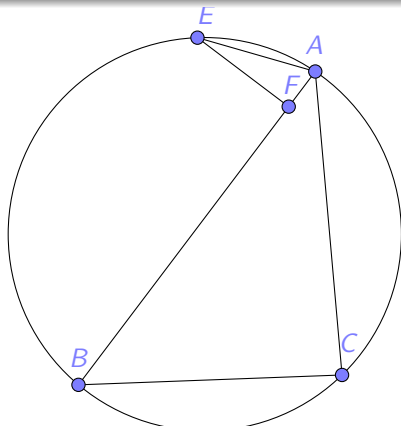
6. Feladat

ABC háromszögben, $AB \geq AC$. BAC külső szögfelezője E pontban metszi ABC körülírt körét. Legyen E -ből AB -ra állított merőleges talppontja F . Bizonyítsuk, hogy:

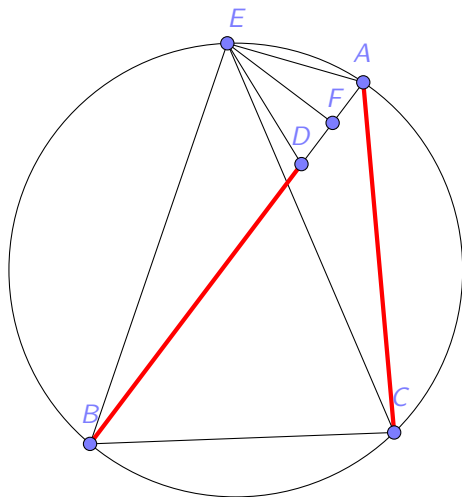
$$2AF = AB - AC$$

Megoldás

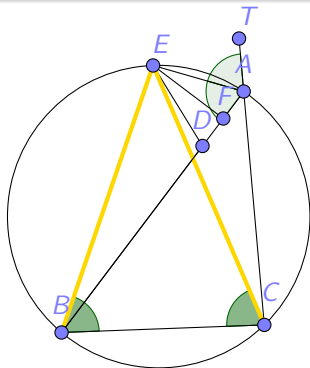
$$2AF = AB - AC$$



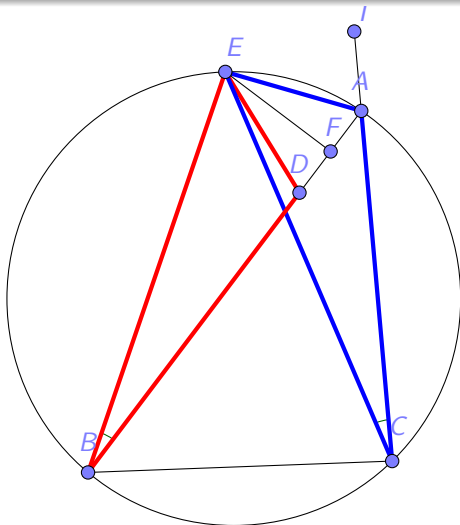
Mérjük fel AC -t AB -re $\Rightarrow D$.



Tehát tudjuk, hogy $AC = BD$ és
 $EBA\angle = ECA\angle$ valamint,
 $EBC\angle = EAT\angle = EAB\angle = ECB\angle \Rightarrow$
 $EB = EC$



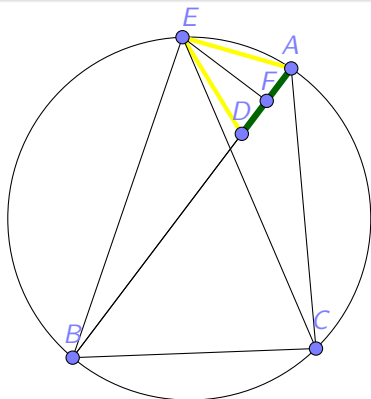
$$EDB\triangle \cong EAC\triangle$$



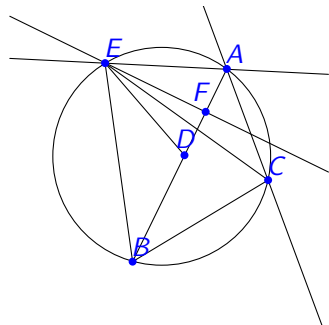
$EA = ED \Rightarrow EAD\triangle$ egyenlőszárú.

Tehát EF magasság felezi az alapot. Vagyis:

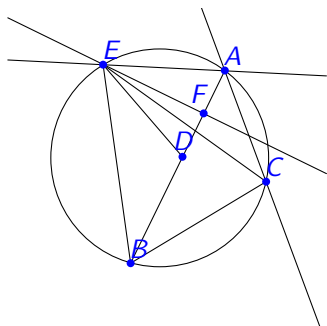
$$2AF = AB - AC$$



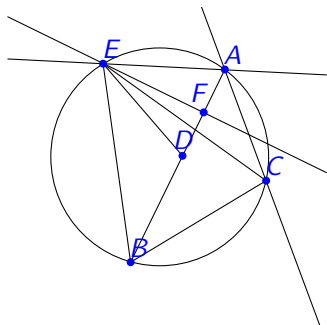
2. Megoldás



Tükrözzük A-t az
F-re \Rightarrow D. Kellene, hogy
 $BD = AC$.

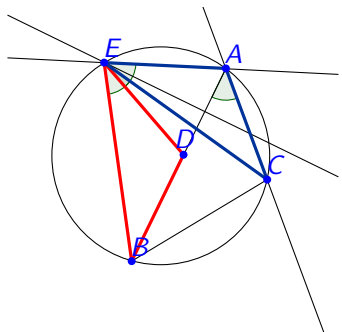


Ha $EAC \triangle$ -t E körül
elforgatjuk, akkor
 $EDB \triangle$ -t kellene
kapnunk, mert akkor
 $AC = DB$.

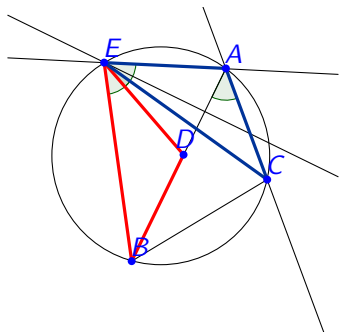


Ha $EAC \triangle$ -t E körül elforgatjuk, akkor $EDB \triangle$ -t kellene kapnunk, mert akkor $AC = DB$.

Kellene, hogy $BAC \angle = BEC \angle = DEA \angle$.



$BAC \angle = BEC \angle$, mert
BC-n lévő kerületi
szögek.



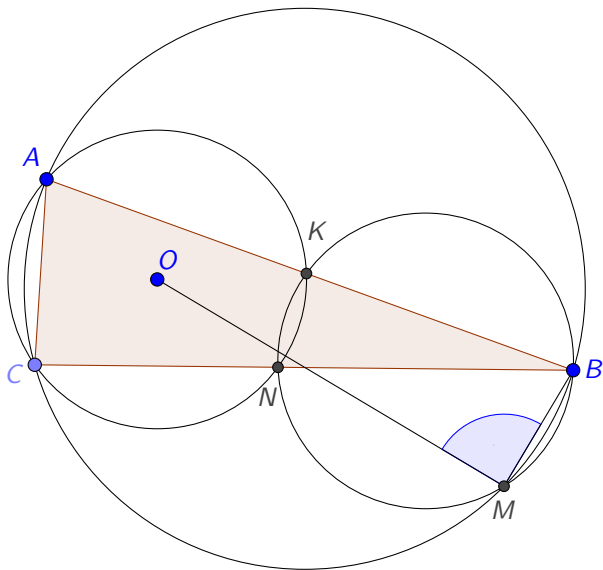
$BAC \angle = BEC \angle$, mert
BC-n lévő kerületi
szögek.

$DEA \triangle$ egyenlőszárú
 $\Rightarrow EDA \angle = EAD \angle \Rightarrow$
 $DEA \angle = 180^\circ - 2EAD \angle$
 $BAC \angle =$
 $180^\circ - 2EAD \angle$

7. Feladat

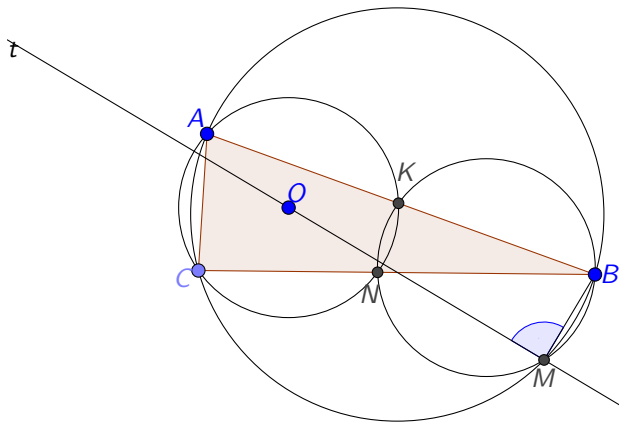
Az O középpontú kör áthalad $ABC\triangle$ A és C csúcán és elmetszi AB és BC oldalakat K és N pontokban. $ABC\triangle$ és $KBN\triangle$ körül írt körei B és M pontokban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy

$$OMB\angle = 90^\circ$$

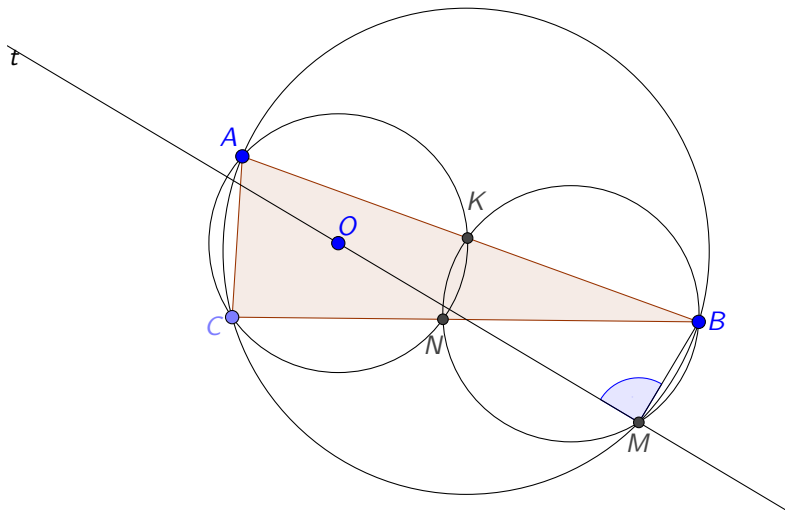


Megoldás

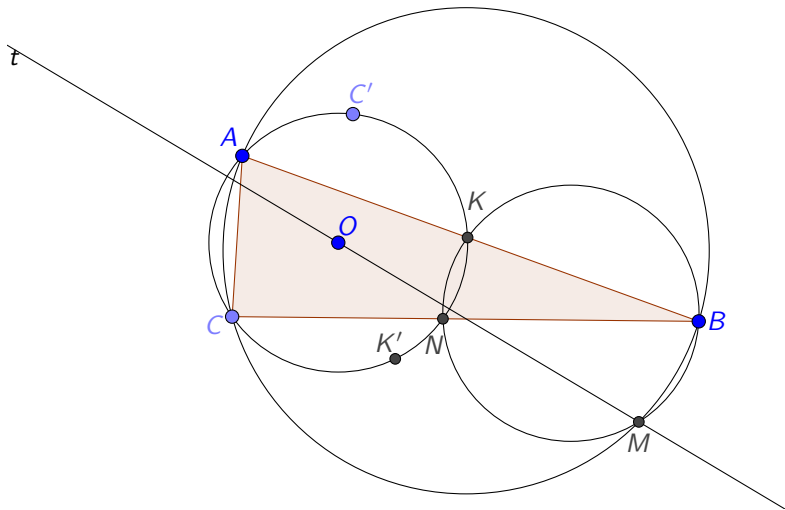
Legyen t egy O -n áthaladó BM -re \perp egyenes



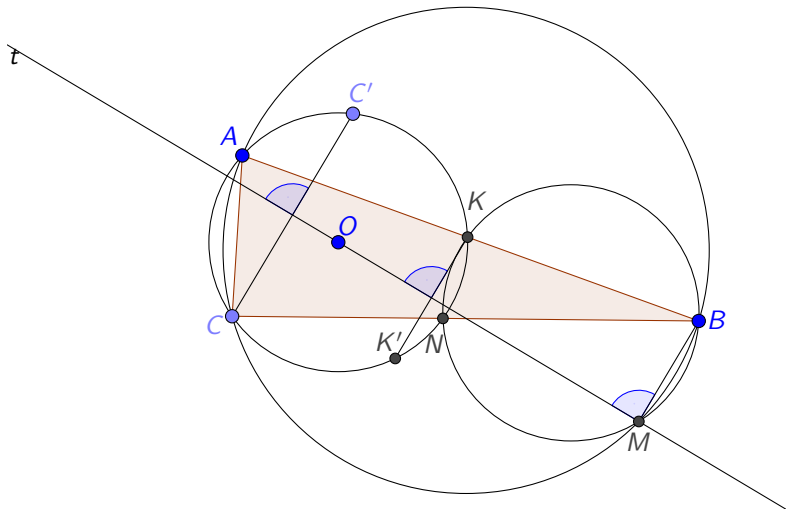
Ha M pont a t egyenesre esik $OMB\angle = 90^\circ$



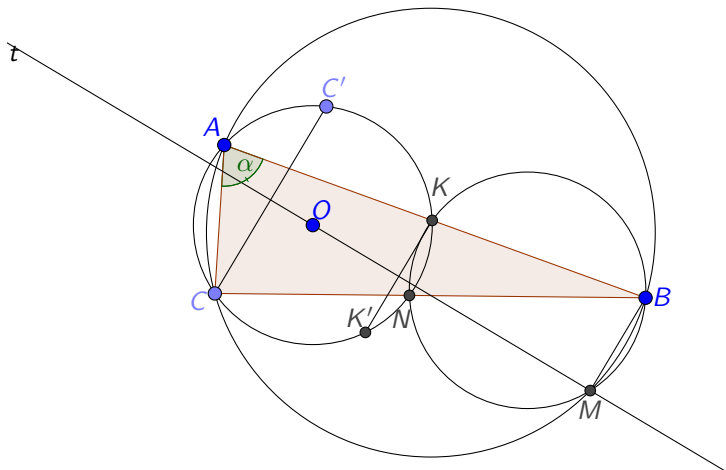
C, K pontokat tükrözzük t tengelyre $\rightarrow C', K'$



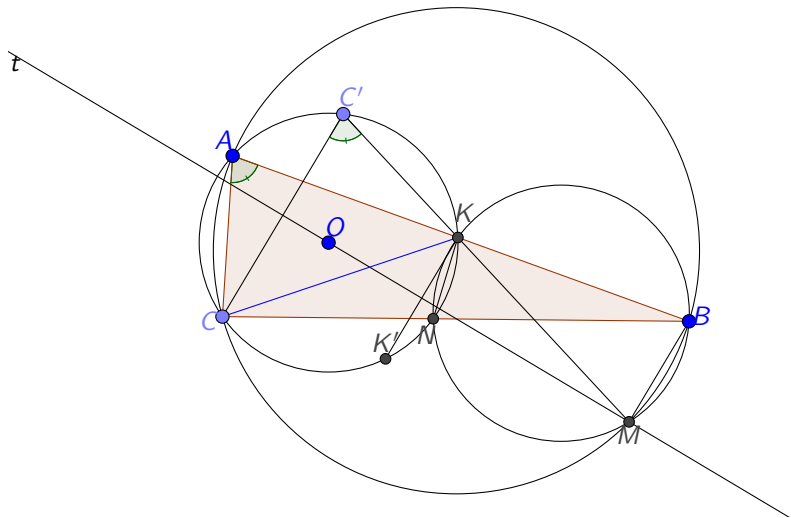
$CC' \perp t, KK' \perp t, BM \perp t \rightarrow CC' \parallel KK' \parallel BM$



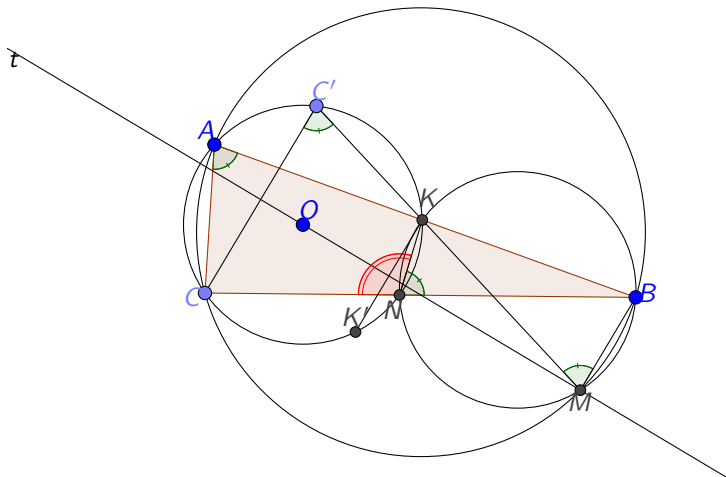
Legyen $\alpha = \angle KAC \rightarrow \angle CAB = \alpha$ mert K az AB egyenesen fekszik



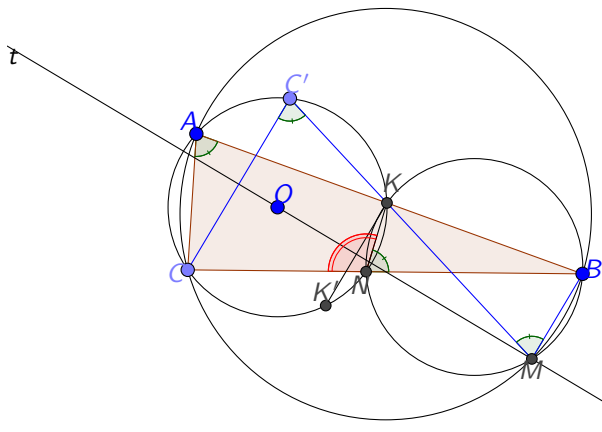
$KAC \sphericalangle$ és $KC'C \sphericalangle$ kerületi szögek $\rightarrow KC'C = \alpha$



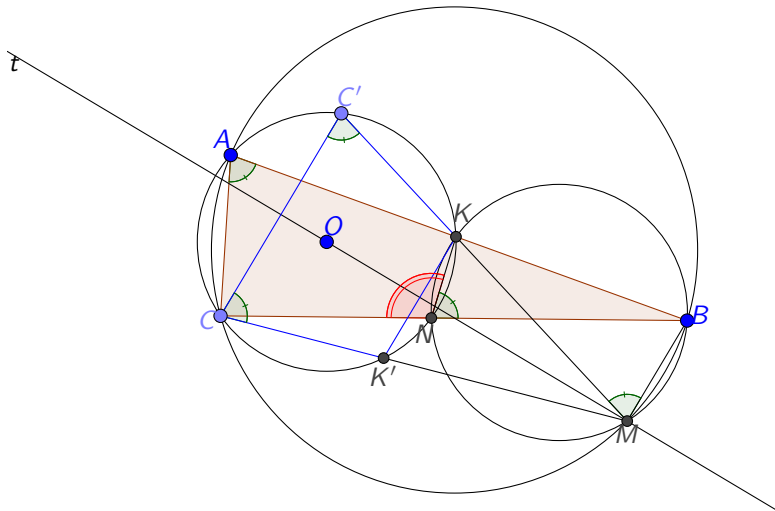
$CNK \angle = 180^\circ - \alpha$, $BNK \angle$ és $BMK \angle$ is
kerületi szögek, ezért $BNK \angle = BMK \angle = \alpha$



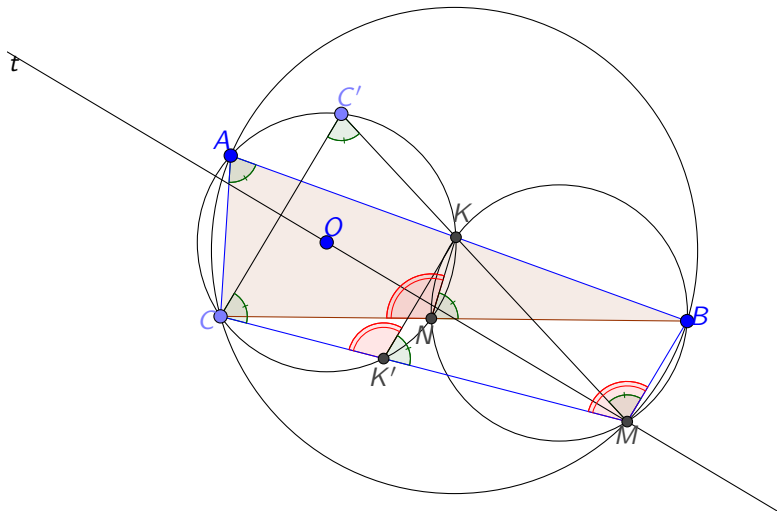
$CC' \parallel BM$ és $BMK \angle = CC'K \angle \rightarrow CC'K \angle$ és $BMK \angle$ váltószögek $\rightarrow C', K, M$ egy egyenesre esik



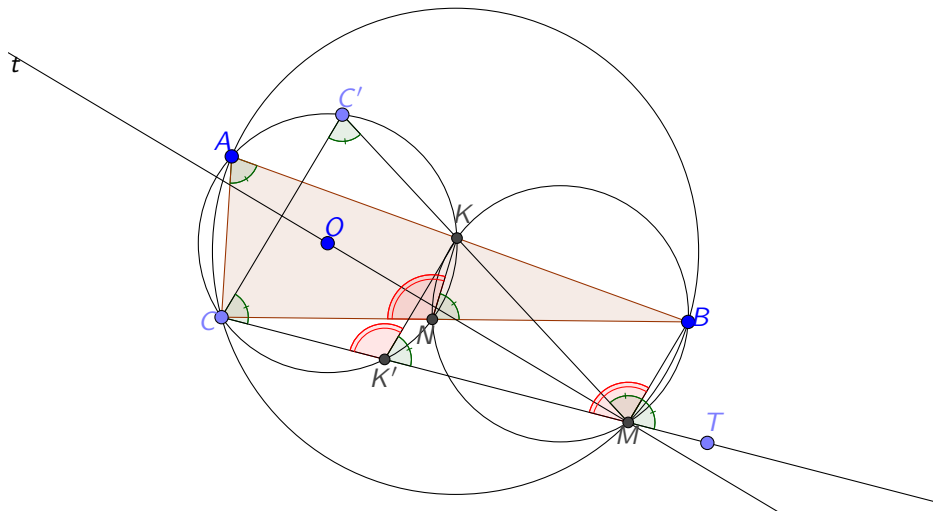
$C'K$ tükörképe t -re $CK' \rightarrow CC'K\angle = C'CK'\angle$



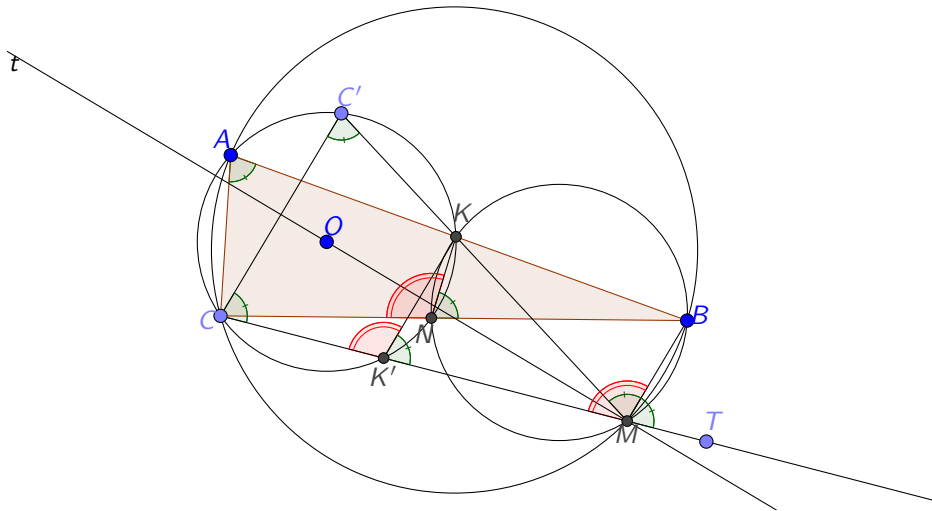
$BMC \angle = 180^\circ - \alpha$ mivel $ABMC$ húrnégyszög



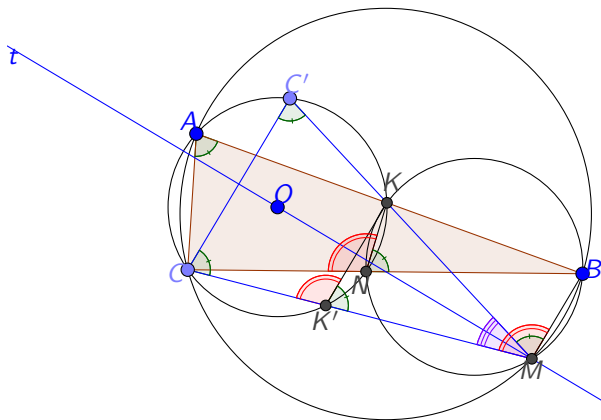
$BMT \angle = \alpha$, mert $BMC \angle = 180^\circ - \alpha$

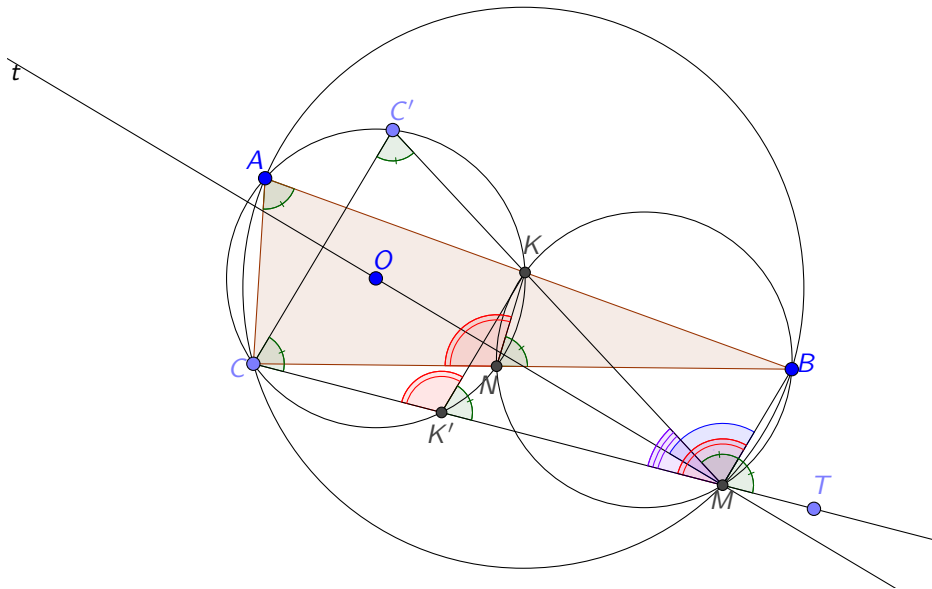


$C'CM\angle = \alpha$ mert egyállású szög $BMT\angle$ -gel



$C'MC \angle = 180^\circ - 2\alpha \rightarrow C'MC \triangle$ egy
 egyenlőszárú $\triangle M$ csúccsal és t
 szimmetriatengellyel, tehát t átmegy M -en



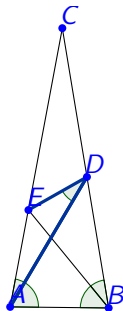


8. Feladat

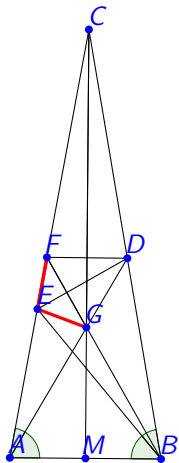
$$\angle EAD = 20^\circ, \angle DAB = 60^\circ$$

$$\angle DBE = 30^\circ, \angle EBA = 50^\circ$$

$$\angle EDA = ?$$

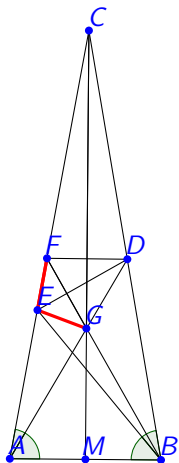


Megoldás



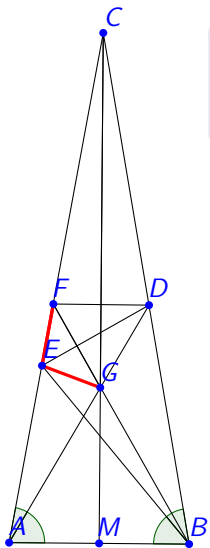
Tükrözzük D -t az $ACB\angle$
szögfelezőjére

Megoldás

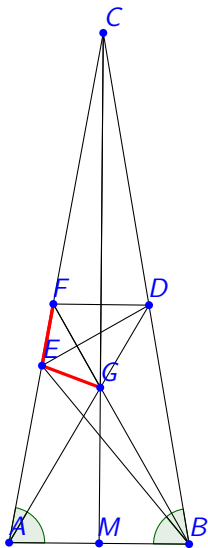


Tükrözzük D -t az $ACB\angle$ szögfelezőjére

$BGA\triangle$ és $DGF\triangle$ egyenlő oldalú.
Kellene, hogy $FE = EG$, mert akkor $FED\triangle \equiv DEG\triangle$.



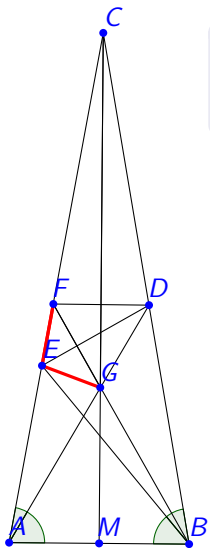
$AG = AB = AE \Rightarrow EGA\triangle$
 egyenlőszárú $\Rightarrow EGA\angle = 80^\circ$.



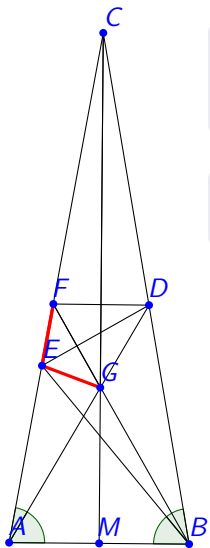
$AG = AB = AE \Rightarrow EGA\triangle$
 egyenlőszárú $\Rightarrow EGA\angle = 80^\circ$.

$EGF\angle = FGA\angle - EGA\angle =$
 $120^\circ - 80^\circ = 40^\circ$.

$FEG\angle = 180^\circ - GEA\angle = 100^\circ$.



$GFE \angle = 40^\circ = FGE \angle \Rightarrow EF = EG \Rightarrow$ ez kellett.



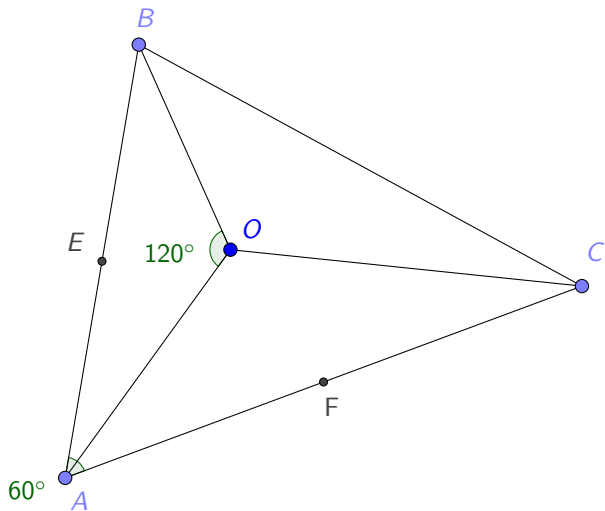
$GFE \angle = 40^\circ = FGE \angle \Rightarrow EF = EG \Rightarrow$ ez kellett.

$$EDA \angle = \frac{FDA \angle}{2} = 30^\circ.$$

9. Feladat

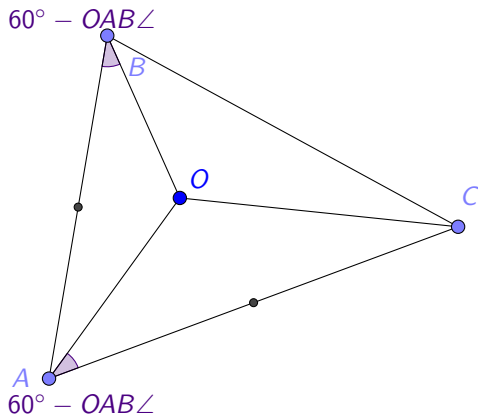
Egy ABC háromszögben, $CAB\angle = 60^\circ$. O pont úgy helyezkedik el, hogy $AOB\angle = BOC\angle = COA\angle$. E és F pontok AB és AC oldalak felezőpontjai.

Bizonyítsuk be, hogy A , E , O és F pontok egy körön helyezkednek el.

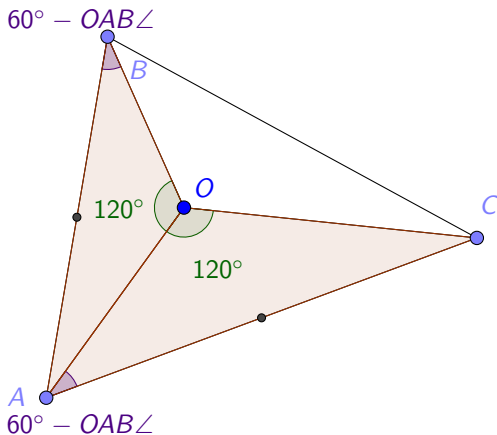


Megoldás

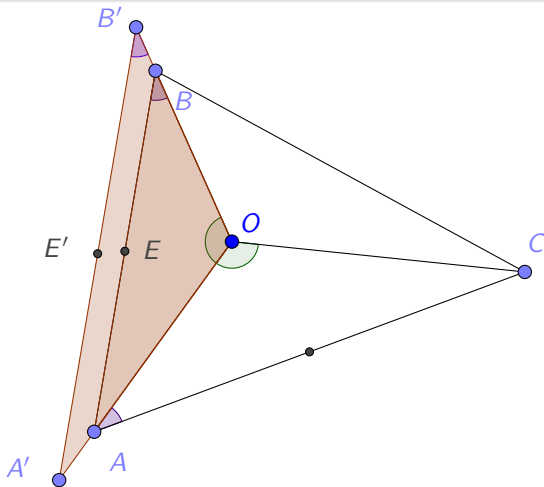
$$ABO\angle = CAO\angle$$



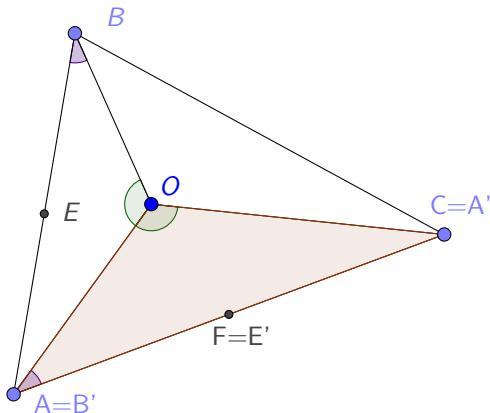
$OBA\triangle$ és $OAC\triangle$ hasonló



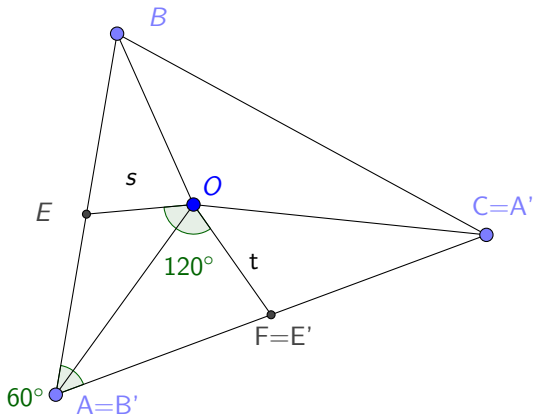
A $OBA\triangle$ -t nagyítjuk/kicsinyítjük AC/BA aránnyal



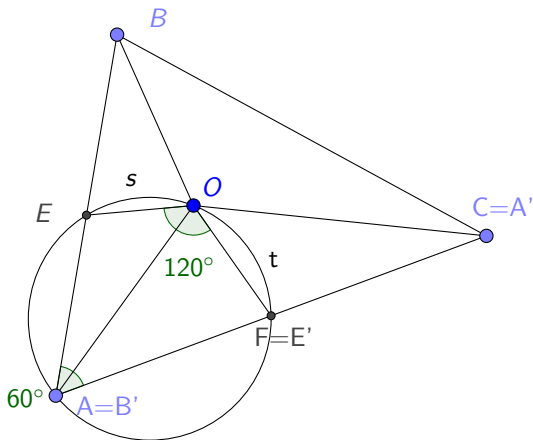
Az $OA'B'\triangle$ -t elforgatjuk $+120^\circ$ kal O pont körül
 ekkor $OA'B'\triangle = OAC\triangle$ és $E' = F$



$EOF = 120^\circ$, és mivel $CAB = 60^\circ$ következik, hogy O, E, A és F pontok egy körön vannak.

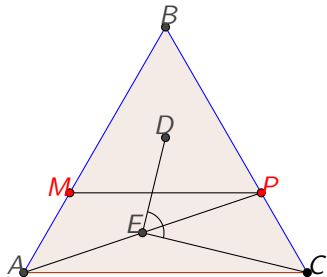


$EOF = 120^\circ$, és mivel $CAB = 60^\circ$ következik, hogy O, E, A és F pontok egy körön vannak.

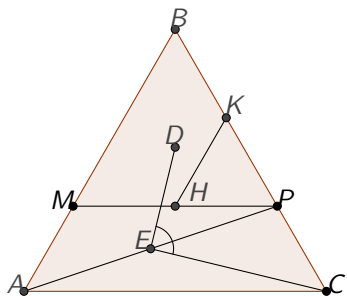


10. Feladat

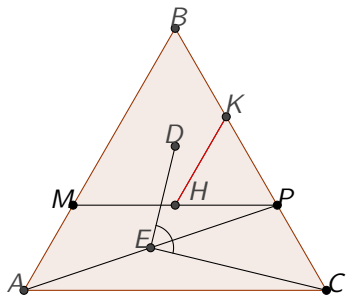
ABC egy szabályos \triangle , AB és CB oldalakon úgy helyezkednek el M és P pontok, hogy $MP \parallel AC$ -vel. MPB \triangle súlypontja D és PA felezőpontja E . Határozzuk meg DEC \triangle szögeit.



Megoldás

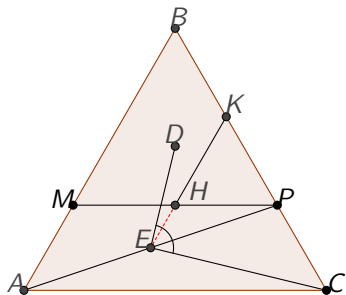


Megoldás



Forgatva kicsinyítsük
 BP szakaszt D körül

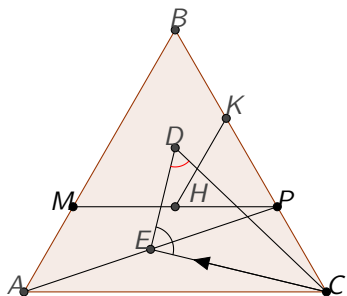
Megoldás



Forgatva kicsinyítsük
 BP szakaszt D körül

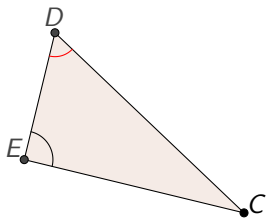
K , H és E egy
egyenesre esik \Rightarrow

$$\frac{BC}{BP} = \frac{BA}{BM} = \frac{KE}{KH}$$

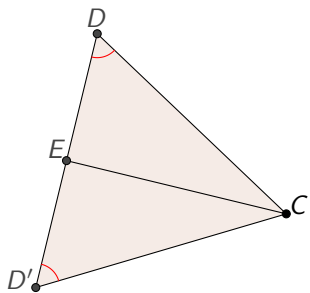


$$C\text{-ből} \rightarrow E \longrightarrow EDC$$

$$\angle = 60^\circ \ \& \ DE = \frac{1}{2} DC$$



→ $DEC \triangle$ egy
szabályos \triangle fele



→ $DEC \triangle$ egy szabályos \triangle fele

→ Szabályos \triangle

11. Feladat

Legyen $ABCDEF$ egy konvex hatszög, amiben teljesül, hogy $\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ$ és

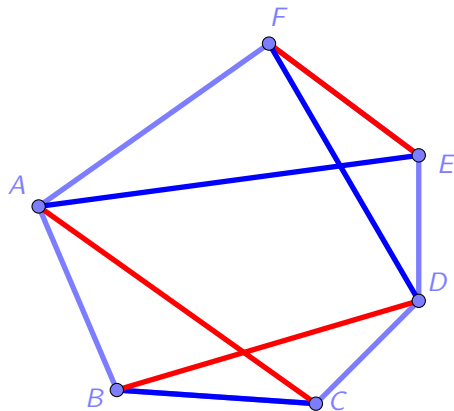
$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Bizonyítsd be, hogy $\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1$?

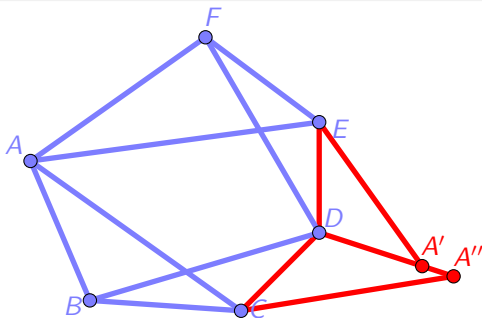
$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$$

Kéne:

$$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1$$

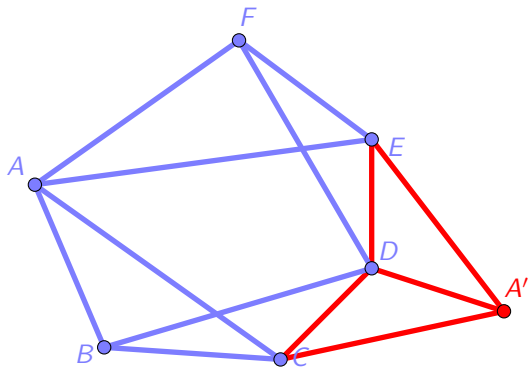


Mivel $\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ$ ezért, hogyha megcsináljuk a következő két forgatást:
 $S(E, FED\angle, ED/EF)$ és $S(C, BCD\angle, CD/CB)$
 akkor D, A' és A'' egy egyenesre esnek.



Ha ezt a kettőt egyenlővé teszem, és leosztok $FA \cdot \frac{ED}{EF}$ -fel, akkor kijön, hogy $\frac{AB}{FA} \cdot \frac{CD}{CB} \cdot \frac{EF}{ED} = 1$ amiről tudjuk, hogy igaz.

Tehát $A' \equiv A''$

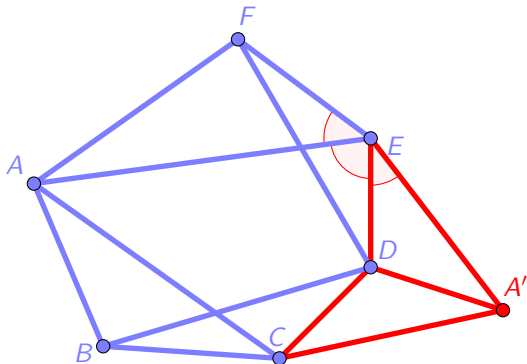


Hasonlóságok miatt:

$$AEF \angle = A'ED \angle \rightarrow DEF \angle = A'EA \angle;$$

$$DE/FE = A'E/AE$$

$$\Rightarrow DEF \triangle \sim A'EA \triangle$$



Köszönjük a figyelmet!

Barta Gergely, Formanek Balázs, Gáll Péter,
Horváth Andor, Kiss Mária, Kovács Máté,
Szendi Ágoston, Telek Benjámín
Felkészített: Groma Tanárnő

Forrás: Mathematical Excalibur 13/2

2016. október 6.