Geometriai transzformációk

11 elemi geometriafeladat

10. B és C

BDG Matektábor

2016. október 6.

Röviden a transzformációkról

- Tengelyes tükrözés

Röviden a transzformációkról

- Tengelyes tükrözés
- Középpontos tükrözés

Röviden a transzformációkról

- Tengelyes tükrözés
- Középpontos tükrözés
- Pont körüli elforgatás

Röviden a transzformációkról

- Tengelyes tükrözés
- Középpontos tükrözés
- Pont körüli elforgatás
- Párhuzamos eltolás

Röviden a transzformációkról

- Tengelyes tükrözés
- Középpontos tükrözés
- Pont körüli elforgatás
- Párhuzamos eltolás

- Középpontos hasonlóság

Röviden a transzformációkról

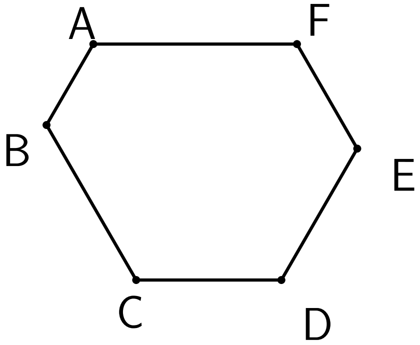
- Tengelyes tükrözés
- Középpontos tükrözés
- Pont körüli elforgatás
- Párhuzamos eltolás

- Középpontos hasonlóság

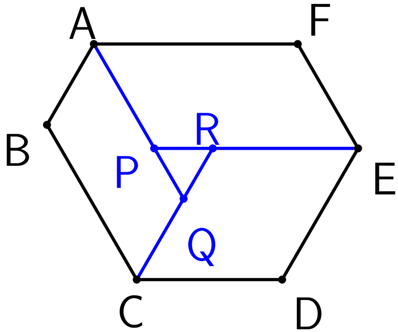
- Forgatva nyújtás: $S(E, FED\angle, \frac{ED}{EF})$

1. Feladat

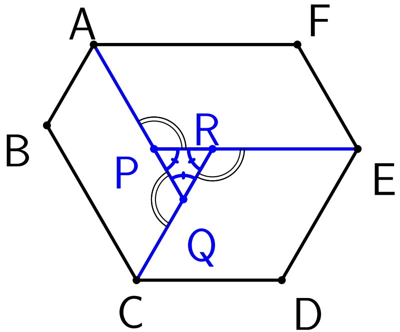
Az $ABCDEF$ hatszög oldalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy ha $BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$, akkor a hatszög szögei egyenlők.



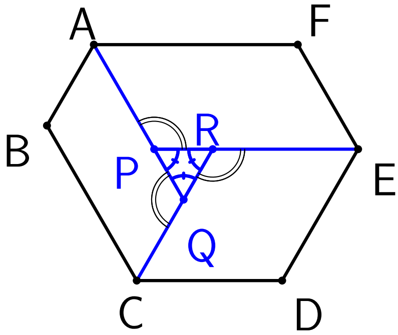
Megoldás



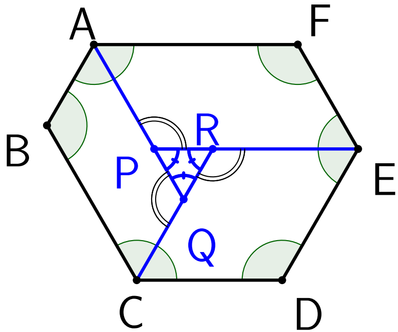
EF -et eltoljuk $\overrightarrow{FA}$ -ral
$\Rightarrow P$
AB -t eltoljuk $\overrightarrow{BC}$ -ral
$\Rightarrow Q$
CD -t eltoljuk $\overrightarrow{DE}$ -ral
$\Rightarrow R$



Az eltolások miatt
$BC - EF = PQ$,
$AF - CD = PR$ és
$ED - AB = RQ$.
Ezekről tudjuk, hogy
egyenlőek $\Rightarrow$ $PQR\triangle$
szabályos



$\Rightarrow$ a kék szögek 60°-osak $\Rightarrow$ a dupla szögek (külső szögek) 120°-osak $\Rightarrow$ $CDE\angle = 120^\circ$ és $DCR\angle = DER\angle = 60^\circ$. Ugyanígy a többi paralelogrammában.



Tehát a hatszög minden szöge 120°**-os.**

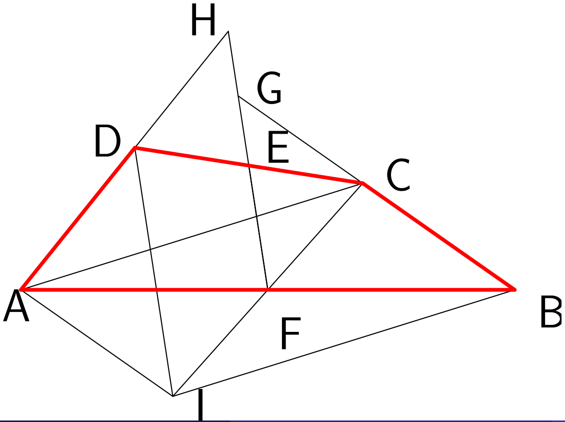
2. Feladat

$ABCD$ konvex négyszögben $AD = BC$. Legyen CD oldal felezőpontja E, AB oldalé F. AD és FE egyenesek metsszék egymást H pontban, BC és FE egyenesek G pontban. Mutassuk meg, hogy:

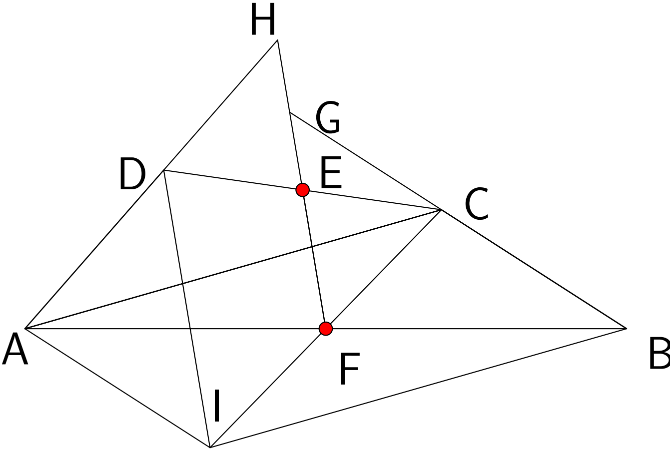
$$AHF\angle = BGF\angle$$

Megoldás

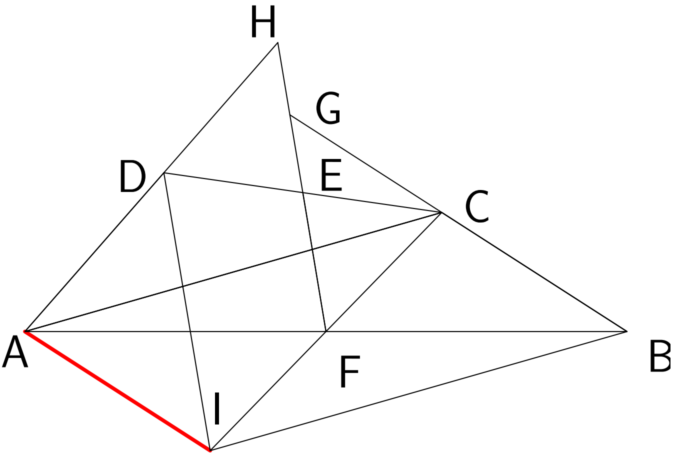
ABCD négyszög:



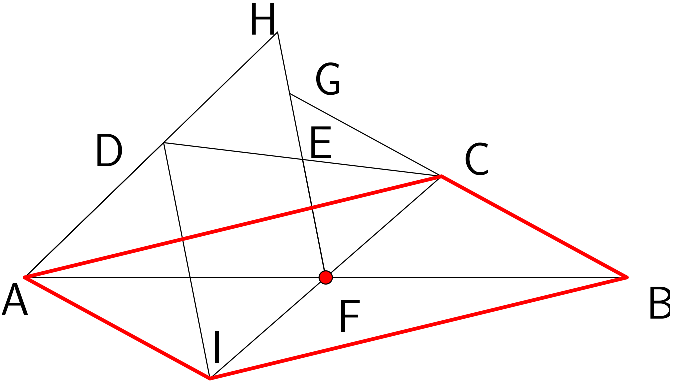
E és F felezőpont:



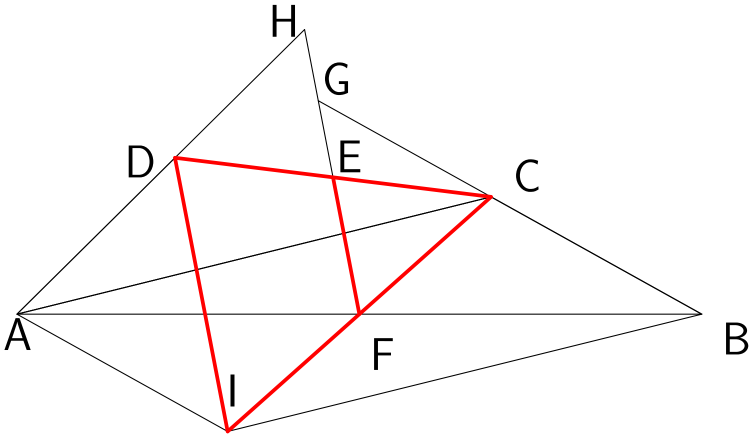
Toljuk el CB szakaszt CA vektorral $\Rightarrow AI$.



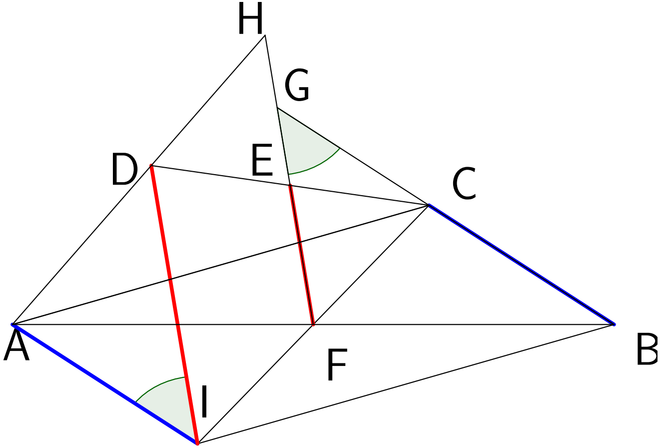
$BCAI$ paralelogramma. F felezőpontja AB szakasznak, így CI-nek is.



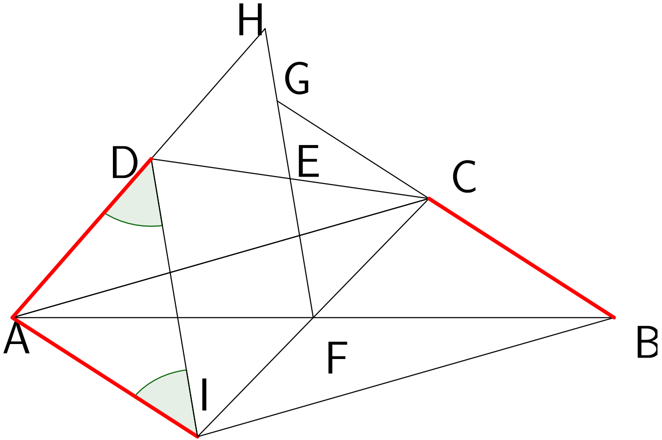
$CDI\triangle$-ben EF középvonal $\Rightarrow EF \| DI$



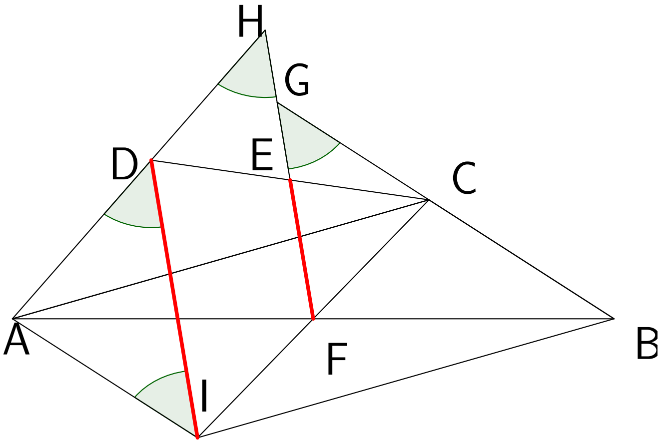
$$EF \parallel DI \text{ és } CB \parallel AI \Rightarrow BGF\angle = AID\angle$$



$AI = BC = AD \Rightarrow AID\angle = ADI\angle$



$$EF \| DI \Rightarrow AHF\angle = ADI\angle = AID\angle = BGF\angle$$



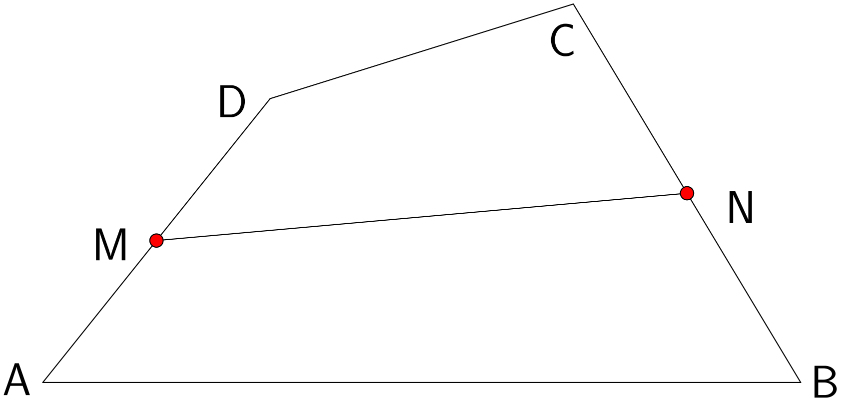
3. Feladat

$ABCD$ négyszögben legyen AD oldal felezőpontja M, BC oldalé N. Ha $2MN = AB + CD$, akkor bizonyítsuk be, hogy

$$AB \parallel CD$$

Megoldás

M és N felezőpont:



Indirekt:

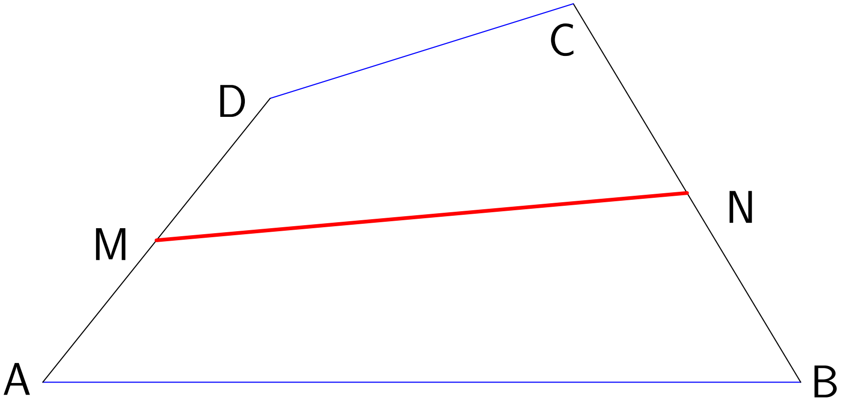
Tegyük fel, hogy:

$$2MN = AB + CD,$$

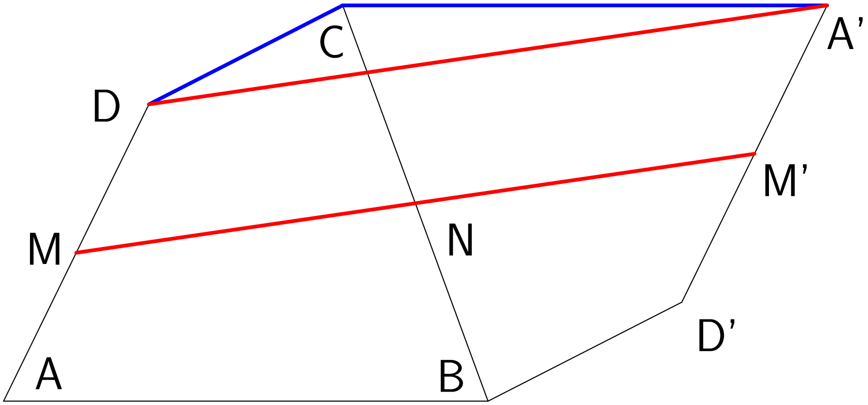
de

$$AB \nparallel CD$$

Tükrözzük az ábrát N pontra.

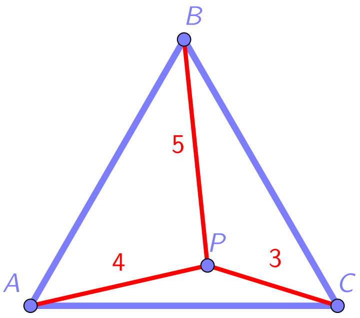


$$2MN = MM' \Rightarrow AB + CD = CD + A'C > A'D$$



4. Feladat

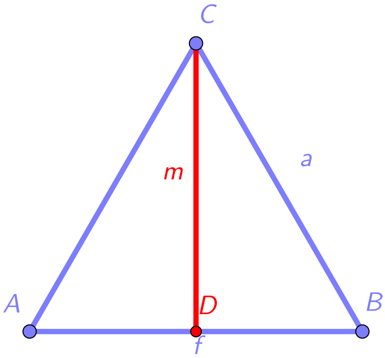
Egy ABC szabályos háromszögben van egy P pont úgy, hogy $PC = 3$, $PA = 4$ és $PB = 5$ Mekkora a háromszög kerülete?



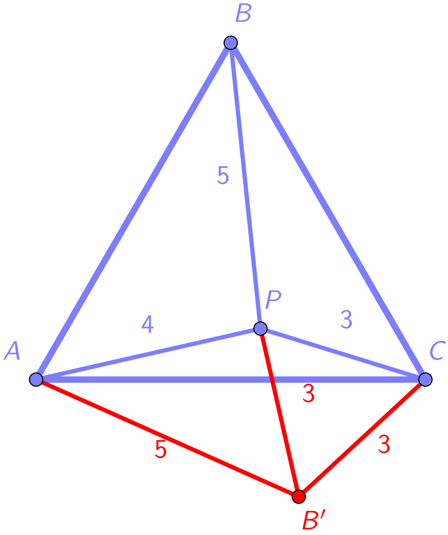
1. Megoldás

Szabályos háromszög

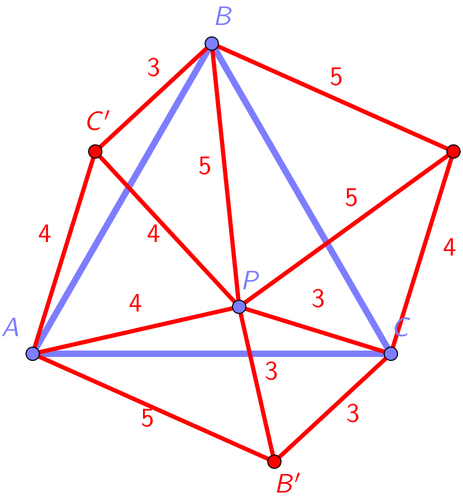
Ha egy szabályos háromszögnek tudjuk *a* oldalát, akkor a háromszög területe $\frac{a \cdot m}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ha a területe T, akkor meg az oldala $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}T}$.



Forgassuk el $BPC\triangle$-et C pont körül $60°$-kal. $\Rightarrow B'$. Így keletkezett egy $B'CP$ szabályos, és egy $B'CA$ $3, 4, 5$ oldalú háromszög.



Úgyanígy 60°-kal forgassuk el $CPA\triangle$-et, A körül, és $APB\triangle$-et B körül. Így keletkezik egy hatszög, aminek a területe az eredeti háromszög területének kétszerese.



Keletkezett három szabályos, és három 3,4,5 oldalú $\triangle$, melyeknek egyenként tudjuk a területét.

$$3 \cdot 6 + 9\frac{\sqrt{3}}{4} + 16\frac{\sqrt{3}}{4} + 25\frac{\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 18 + 50\frac{\sqrt{3}}{4} = 18 + 25\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T_{\triangle} = \frac{18 + 25\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{18 + 25\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}} =$$

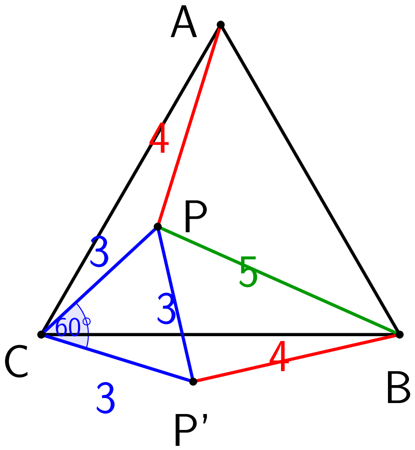
$$= \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{36\sqrt{3} + 25 \cdot 3}{3}} =$$

$$= \sqrt{12\sqrt{3} + 25}$$

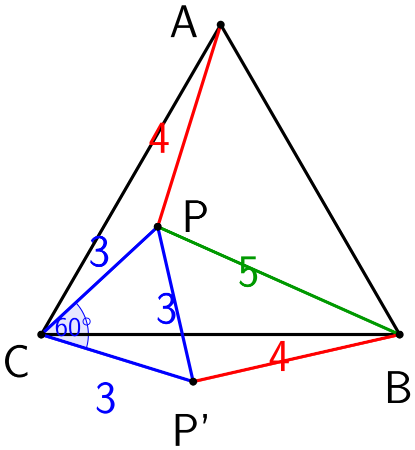
$$K_{\triangle} = 3 \cdot \sqrt{12\sqrt{3} + 25}$$

2. Megoldás



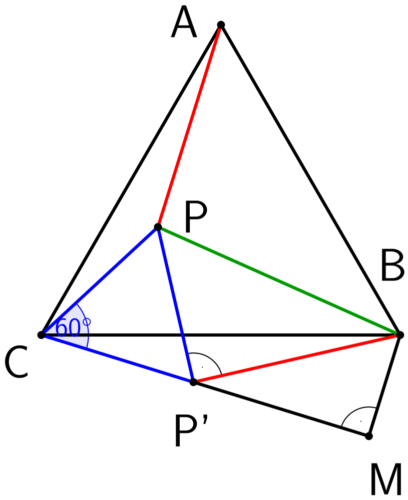
$APC\triangle$-et elforgatjuk C körül $-60°$-kal.

2. Megoldás

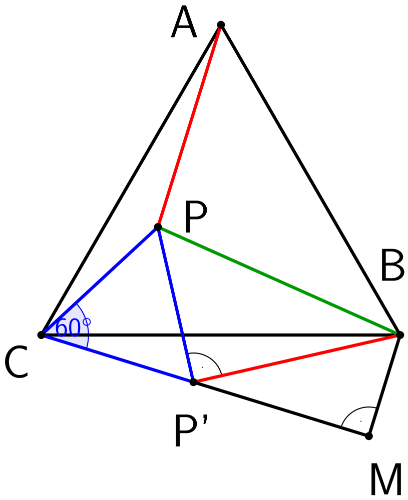


$APC\triangle$-et elforgatjuk C körül $-60°$-kal.

$\Rightarrow B \equiv C'$
$PCP'\angle = 60°$ a forgatás miatt $\Rightarrow PCP'\triangle$ szabályos $\Rightarrow PP' = 3$

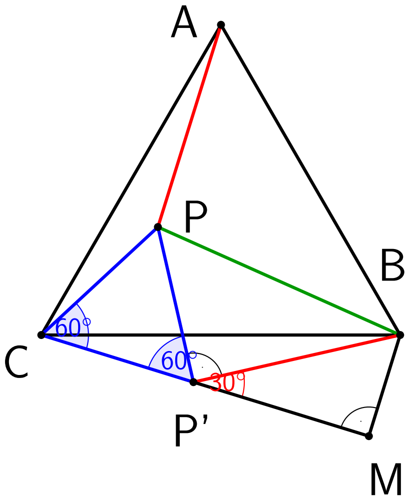


$PP'B\triangle$-ben $PP' = 3$,
$P'B = 4$ és $PB = 5 \Rightarrow$
$PP'B\angle = 90^\circ$
(Pitagoraszi számhármas)

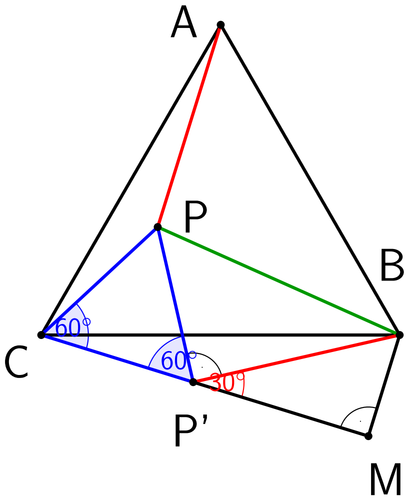


$PP'B\triangle$-ben $PP' = 3$, $P'B = 4$ és $PB = 5 \Rightarrow$ $PP'B\angle = 90°$ (Pitagoraszi számhármas)

Állítsunk merőlegest CP'-re B-ből $\Rightarrow$ M

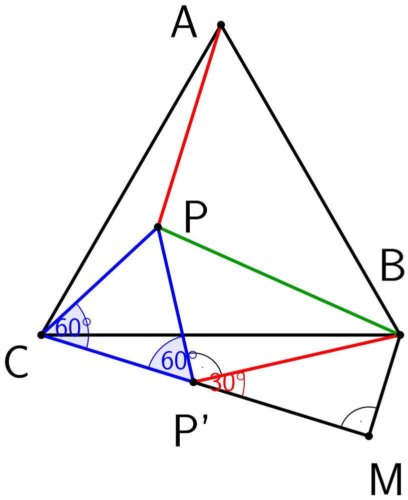


$CP'P\angle = 60°$ és
$PP'B\angle = 90° \Rightarrow$
$BP'M\angle = 30° \Rightarrow$
$BP'M\triangle$ egy szabályos
$\triangle$ fele $\Rightarrow BM = 2$,
$P'M = 2\sqrt{3}$

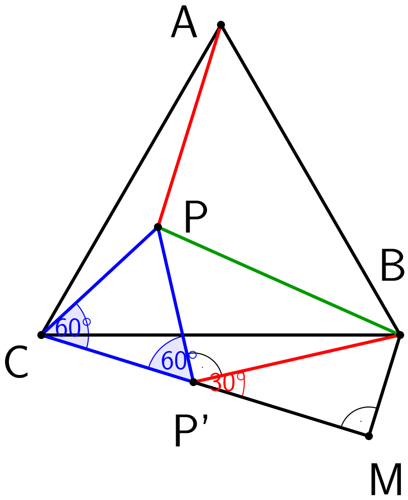


$CP'P\angle = 60^\circ$ és
$PP'B\angle = 90^\circ \Rightarrow$
$BP'M\angle = 30^\circ \Rightarrow$
$BP'M\triangle$ egy szabályos
$\triangle$ fele $\Rightarrow BM = 2$,
$P'M = 2\sqrt{3}$

$CMB\triangle$-ben alkalmazva
a Pitagorasz-tételt
$CB^2 = (3 + 2\sqrt{3})^2 + 2^2$



$$CB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} = 6,7664$$



$$CB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} = 6,7664$$

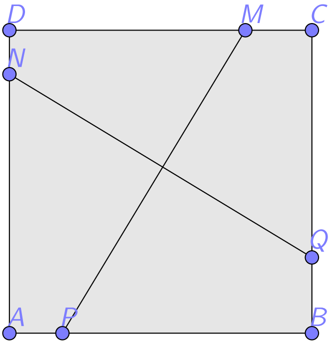
$$Ker = 3 \cdot CB = 3 \cdot 6,7664 = 20,2992$$

5. Feladat

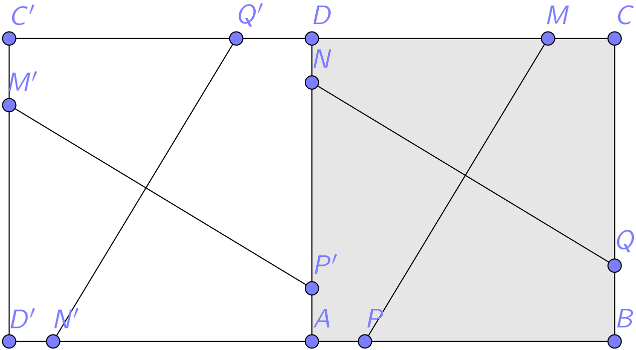
$ABCD$ egy egység oldalú négyzet. P, Q, M és N pontok AB, BC, CD és DA oldalakon helyezkednek el úgy, hogy $AP + AN + CQ + CM = 2$. Bizonyítsuk be, hogy $PM \perp QN$

Megoldás

$$AP + AN + CQ + CM = 2$$



A 90°-os forgatás után.

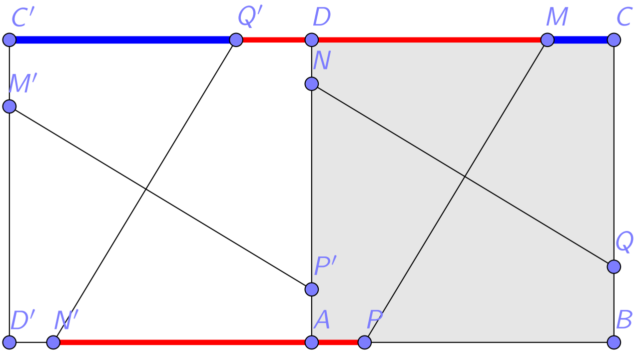


A feladat meghatározása miatt tudjuk, hogy:

$AP + AN + CQ + CM = 2$

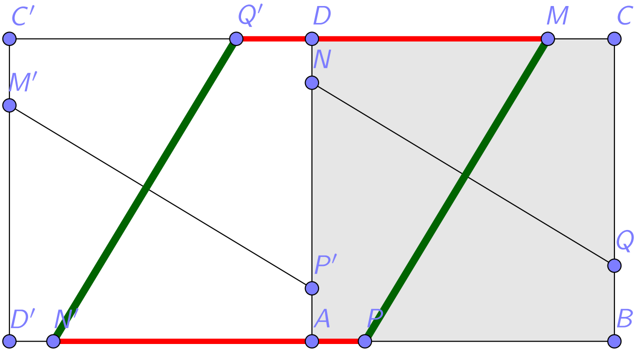
$AP + AN = 2 - CQ - CM$

Az ábrárol látszik, hogy: $MQ' = 2 - C'Q' - CM$



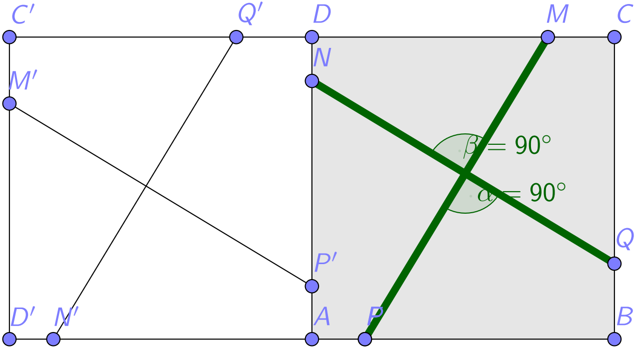
Tehát $AP + AN' = MQ'$ és párhuzamosak is. Vagyis $Q'MPN'$ egy paralelogramma,ezért

$$Q'N' \| MP$$



Tehát a 90°-os forgatás előtt:

$$PM \perp QN$$



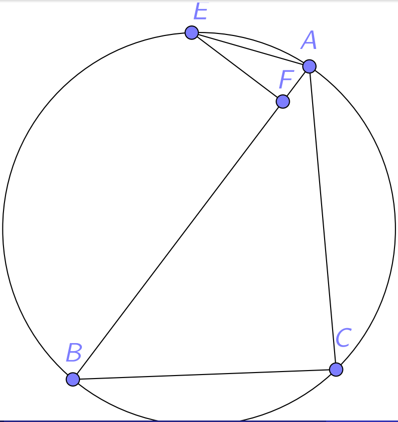
6. Feladat

ABC háromszögben, $AB \geq AC$. $BAC\angle$ külső szögfelezője E pontban metszi ABC körülírt körét. Legyen E-ből AB-ra állított merőleges talppontja F. Bizonyítsuk, hogy:

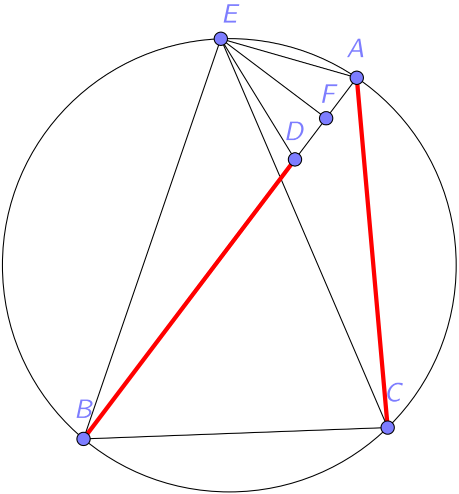
$$2AF = AB - AC$$

Megoldás

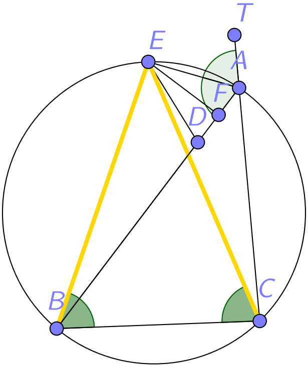
$$2AF = AB - AC$$



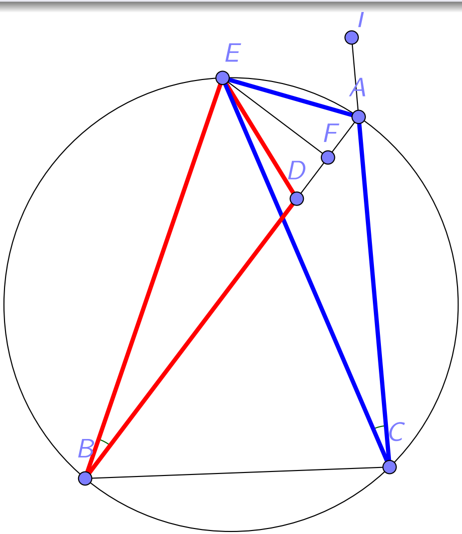
Mérjük fel AC-t AB-re $\Rightarrow D$.



Tehát tudjuk, hogy $AC = BD$ és $EBA\angle = ECA\angle$ valamint, $EBC\angle = EAT\angle = EAB\angle = ECB\angle \Rightarrow EB = EC$

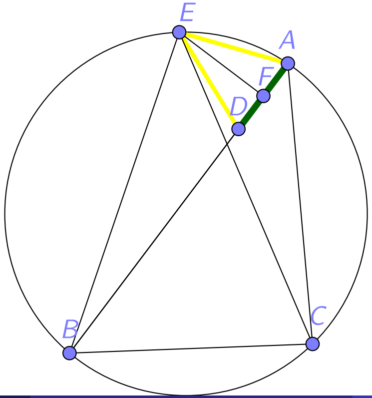


$EDB\triangle \cong EAC\triangle$

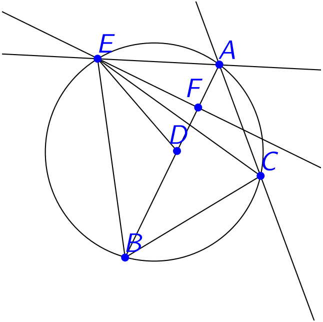


$EA = ED \Rightarrow EAD\triangle$ egyenlőszárú.
Tehát EF magasság felezi az alapot. Vagyis:

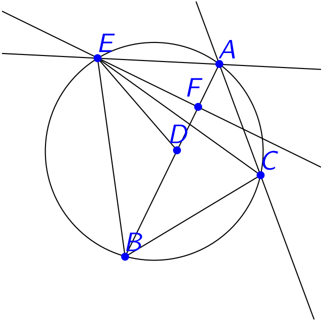
$$2AF = AB - AC$$



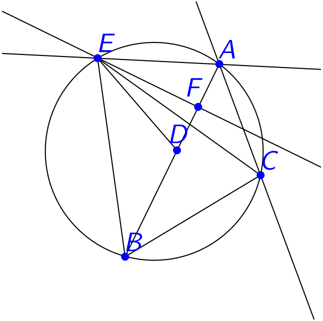
2. Megoldás



Tükrözzük A-t az F-re⇒D.Kellene, hogy $BD = AC$.

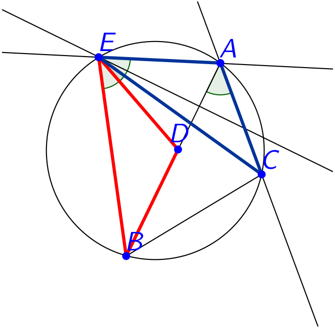


Ha $EAC\triangle$-t E körül elforgatjuk, akkor $EDB\triangle$-t kellene kapnunk, mert akkor $AC = DB$.

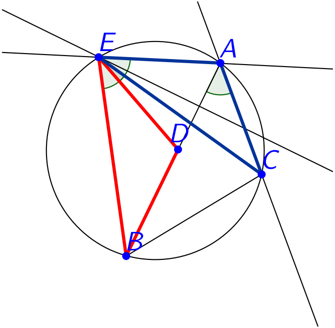


Ha $EAC\triangle$-t E körül elforgatjuk, akkor $EDB\triangle$-t kellene kapnunk, mert akkor $AC = DB$.

Kellene, hogy $BAC\angle = BEC\angle = DEA\angle$.



$BAC\angle = BEC\angle$, mert BC-n lévő kerületi szögek.



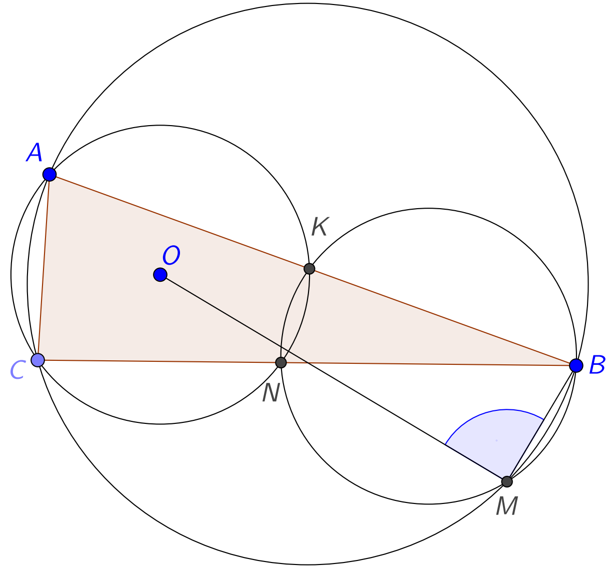
$BAC\angle = BEC\angle$, mert BC-n lévő kerületi szögek.

$DEA\triangle$ egyenlőszárú $\Rightarrow EDA\angle = EAD\angle \Rightarrow$ $DEA\angle = 180^\circ - 2EAD\angle$ $BAC\angle =$ $180^\circ - 2EAD\angle$

7. Feladat

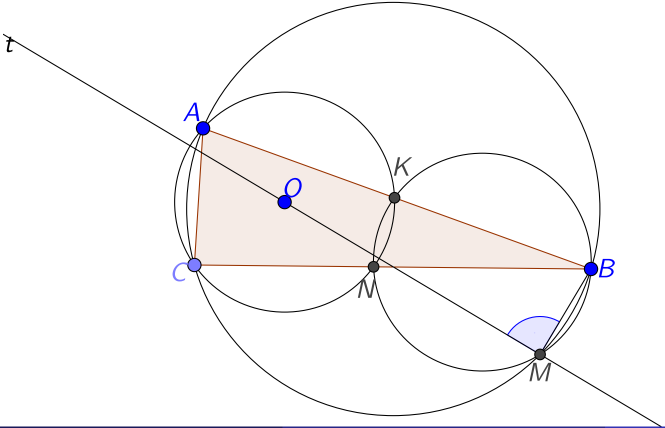
Az O középpontú kör áthalad $ABC\triangle$ A és C csúcsán és elmetszi AB és BC oldalakat K és N pontokban. $ABC\triangle$ és $KBN\triangle$ körül írt körei B és M pontokban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy

$$OMB\angle = 90^\circ$$

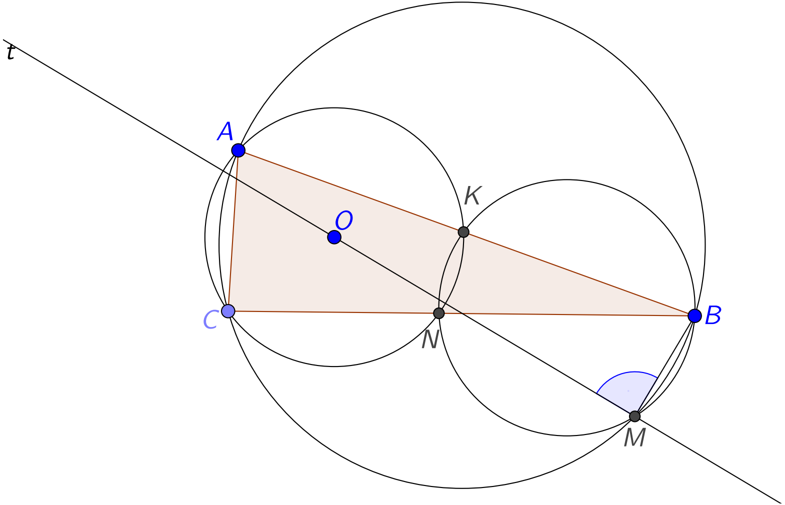

A
K
O
C
N
B
M

Megoldás

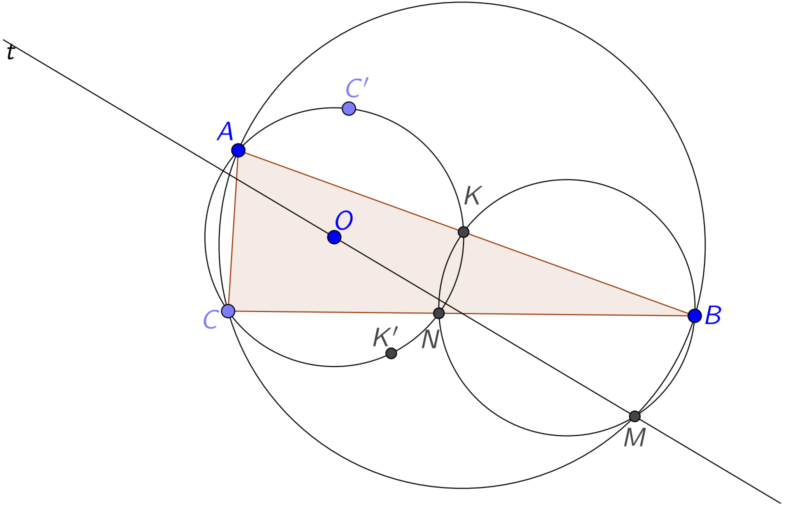
Legyen t egy O-n áthaladó BM-re $\perp$ egyenes



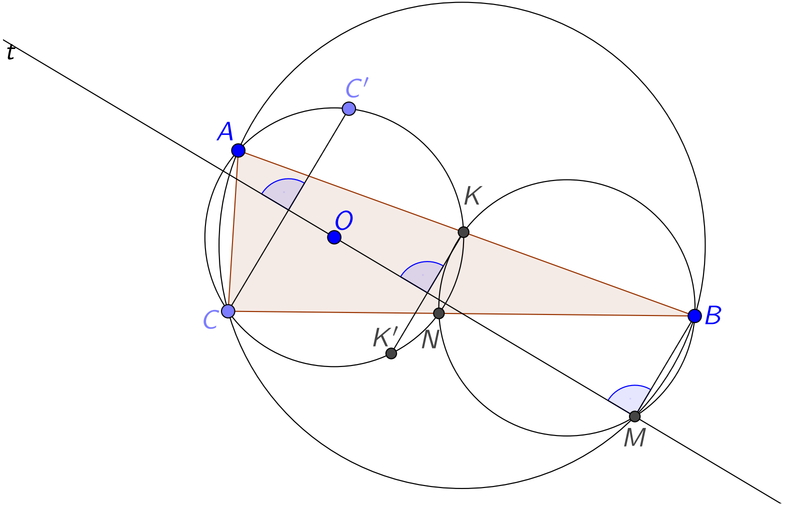
Ha M pont a t egyenesre esik $OMB\angle = 90^\circ$



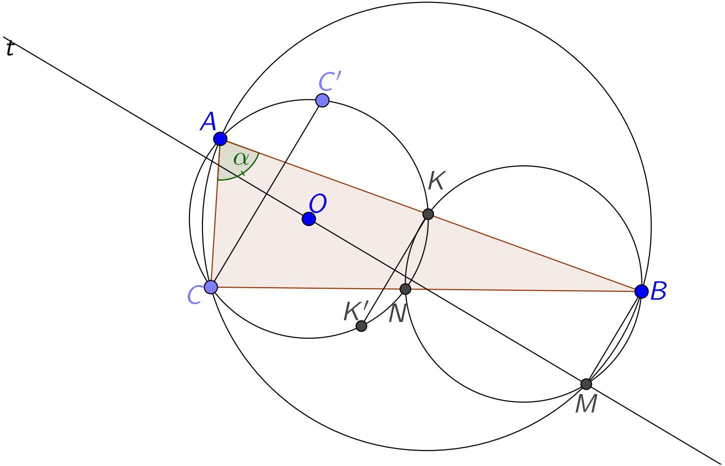
C, K pontokat tükrözzük t tengelyre $\rightarrow$ C', K'



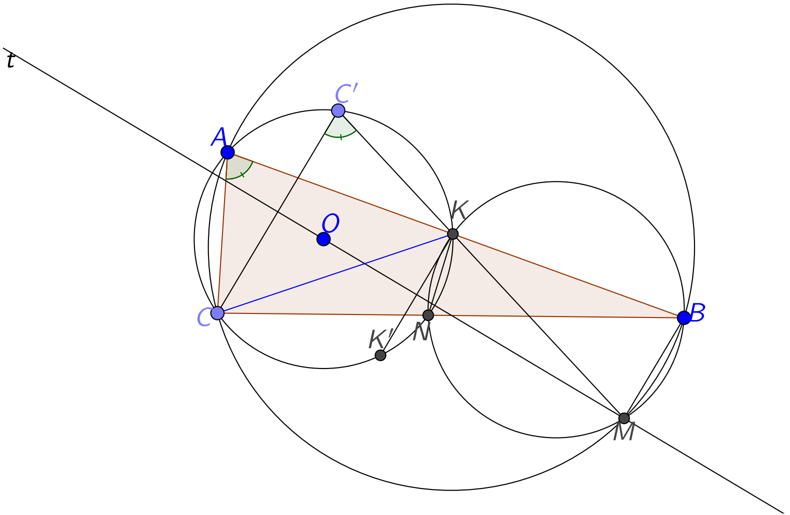
$CC' \perp t,\ KK' \perp t,\ BM \perp t \rightarrow CC' \| KK' \| BM$



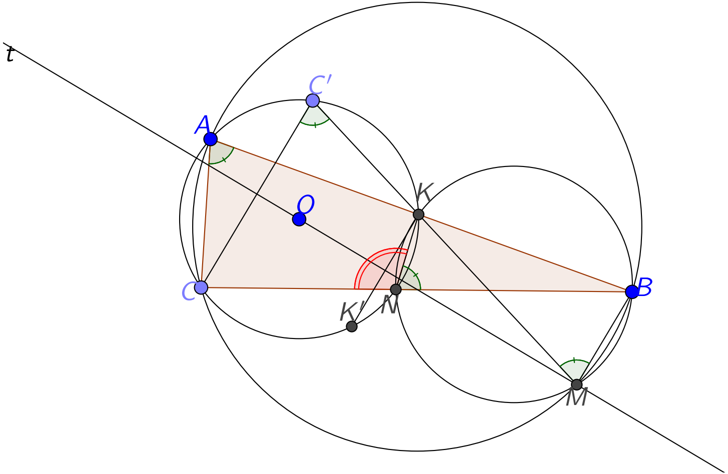
Legyen $\alpha = KAC\angle \rightarrow CAB\angle = \alpha$ mert K az AB egyenesen fekszik



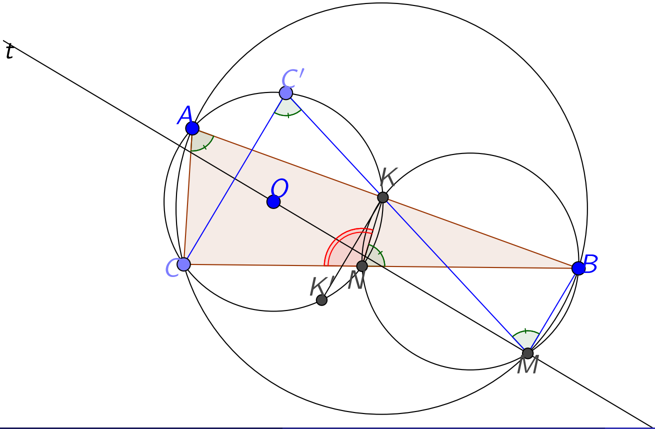
$KAC\angle$ és $KC'C\angle$ kerületi szögek $\rightarrow$ $KC'C = \alpha$



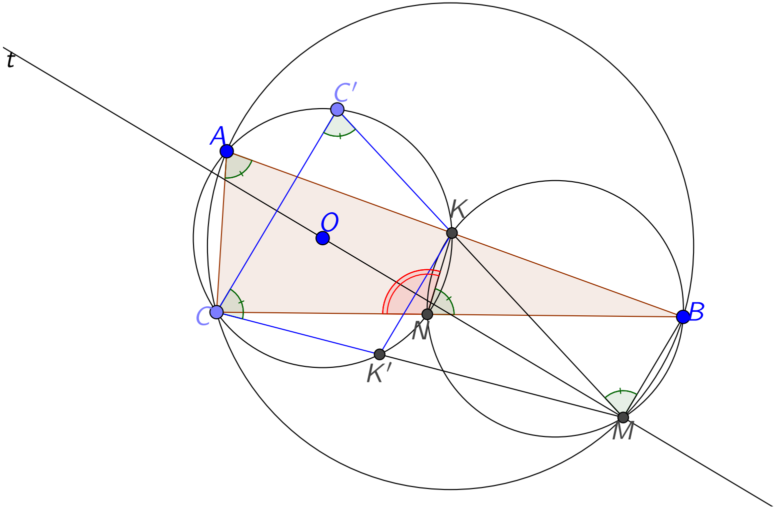
$CNK\angle = 180° - \alpha$, $BNK\angle$ és $BMK\angle$ is kerületi szögek, ezért $BNK\angle = BMK\angle = \alpha$



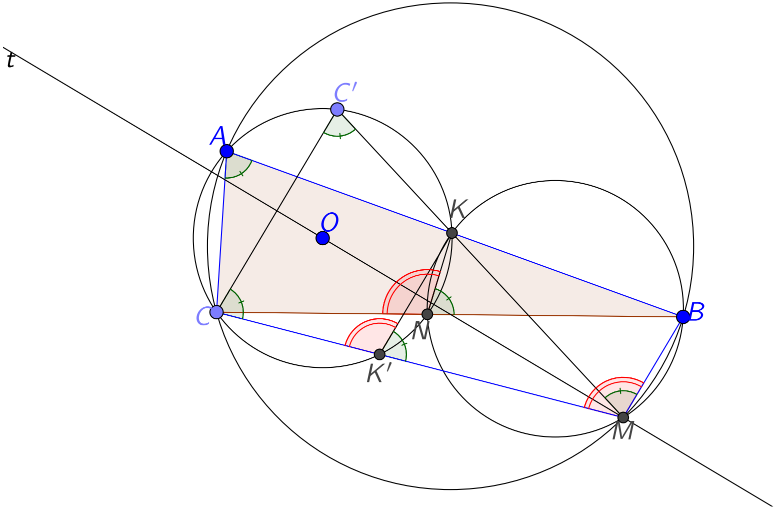
$CC' \| BM$ és $BMK\angle = CC'K\angle \to CC'K\angle$ és $BMK\angle$ váltószögek $\to$ C', K, M egy egyenesre esik



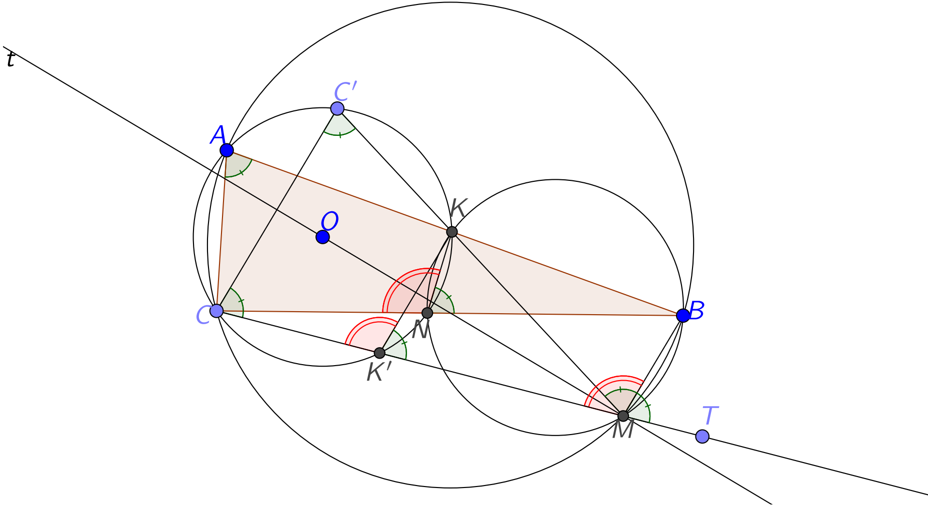
$C'K$ tükörképe t-re $CK' \rightarrow CC'K\angle = C'CK'\angle$



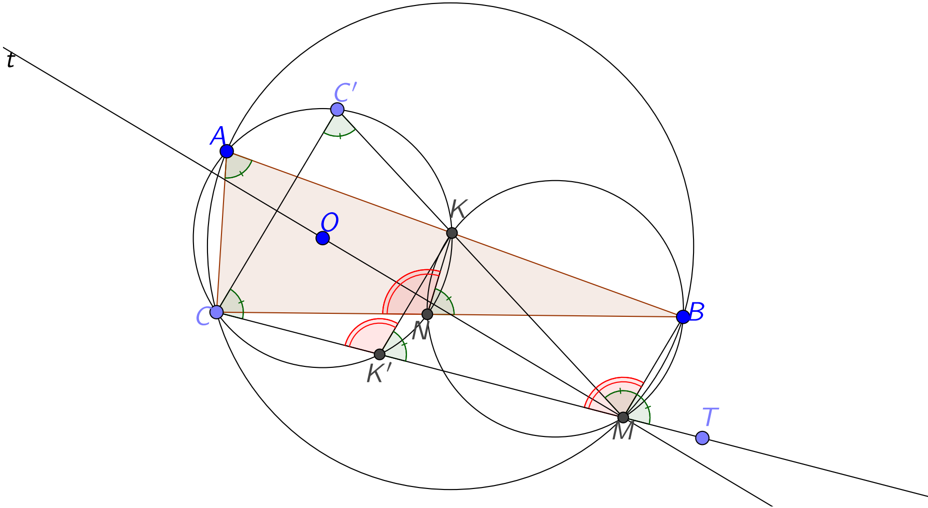
$BMC\angle = 180° - \alpha$ mivel $ABMC$ húrnégyszög



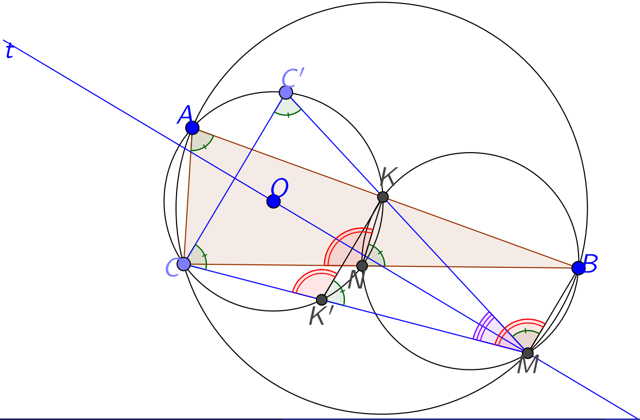
$BMT\angle = \alpha$, mert $BMC\angle = 180° - \alpha$

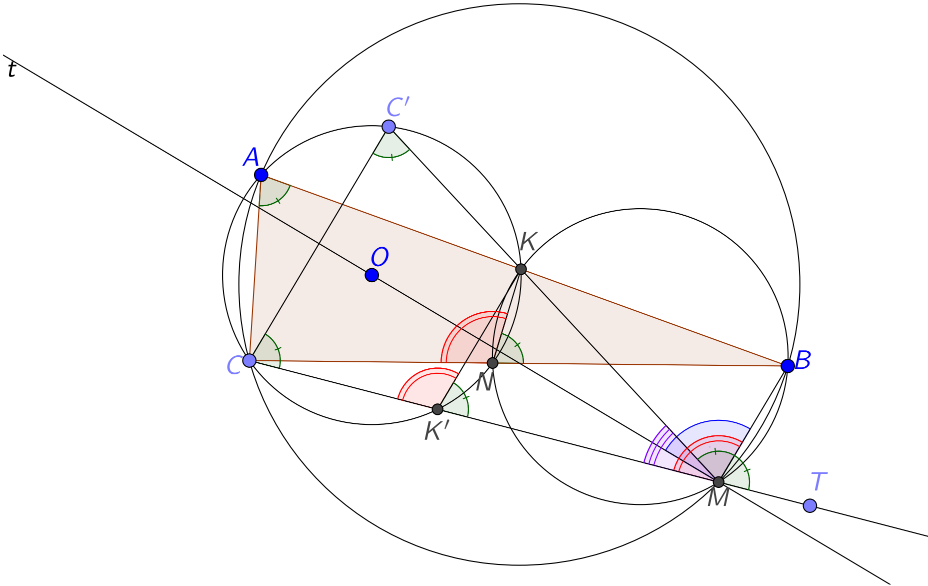


$C'CM\angle = \alpha$ mert egyállású szög $BMT\angle$-gel



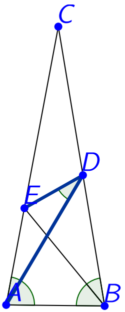
$C'MC\angle = 180^\circ - 2\alpha \to C'MC\triangle$ egy egyenlőszárú $\triangle$ M csúccsal és t szimmetriatengellyel, tehát t átmegy M-en



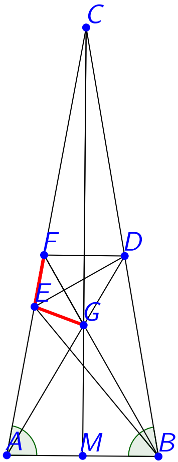

t
C'
A
K
O
C
N
B
K'
T
M

8. Feladat

$EAD\angle = 20°, DAB\angle = 60°$
$DBE\angle = 30°, EBA\angle = 50°$
$EDA\angle = ?$

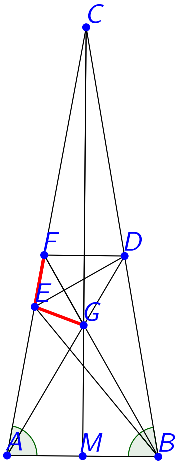


Megoldás



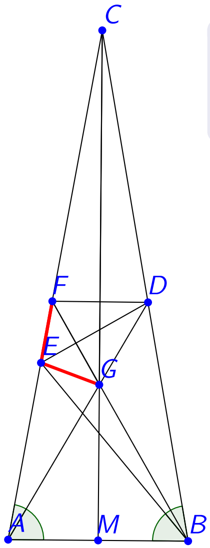
Tükrözzük D-t az $ACB\angle$ szögfelezőjére

Megoldás

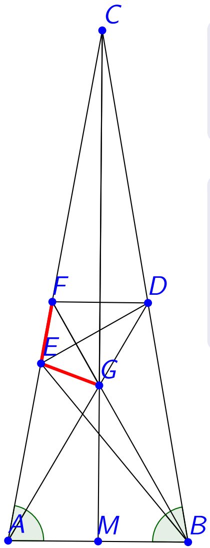


Tükrözzük D-t az $ACB\angle$ szögfelezőjére

$BGA\triangle$ és $DGF\triangle$ egyenlő oldalú. Kellene, hogy $FE = EG$, mert akkor $FED\triangle \equiv DEG\triangle$.

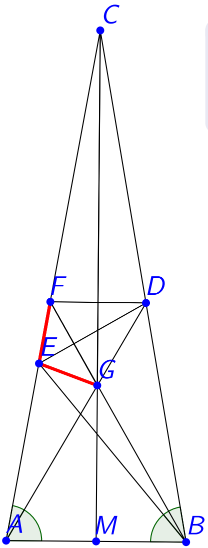


$AG = AB = AE \Rightarrow EGA\triangle$ egyenlőszárú $\Rightarrow EGA\angle = 80^\circ$.

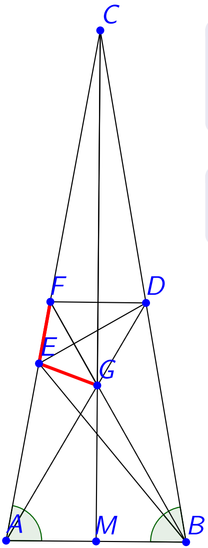


$AG = AB = AE \Rightarrow EGA\triangle$ egyenlőszárú $\Rightarrow EGA\angle = 80^\circ$.

$EGF\angle = FGA\angle - EGA\angle = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ$.
$FEG\angle = 180^\circ - GEA\angle = 100^\circ$.



$GFE\angle = 40^\circ = FGE\angle \Rightarrow EF = EG \Rightarrow$ ez kellett.

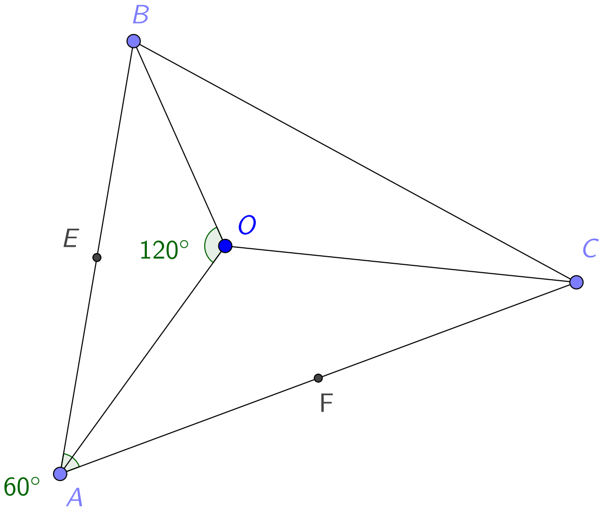


$GFE\angle = 40^\circ = FGE\angle \Rightarrow EF = EG \Rightarrow$ ez kellett.

$EDA\angle = \frac{FDA\angle}{2} = 30^\circ.$

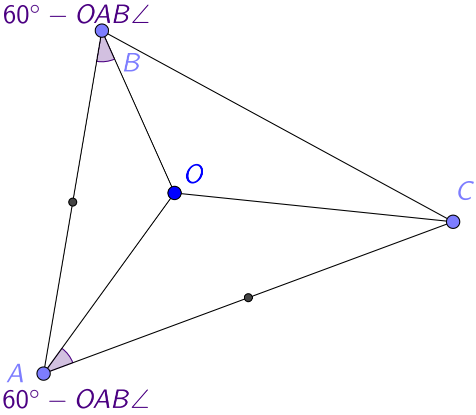
9. Feladat

Egy ABC háromszögben, $CAB\angle = 60^\circ$. O pont úgy helyezkedik el, hogy $AOB\angle = BOC\angle = COA\angle$. E és F pontok AB és AC oldalak felezőpontjai.
Bizonyítsuk be, hogy A, E, O és F pontok egy körön helyezkednek el.

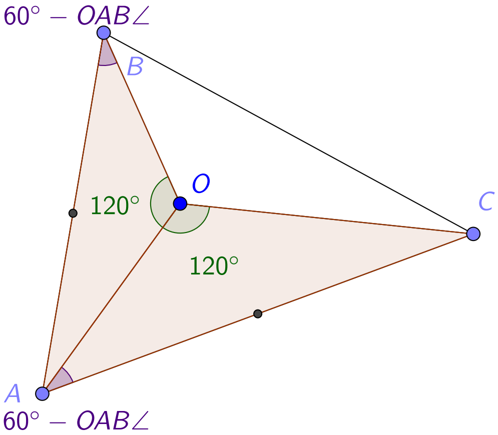

B
O
120°
E
C
F
60°
A

Megoldás

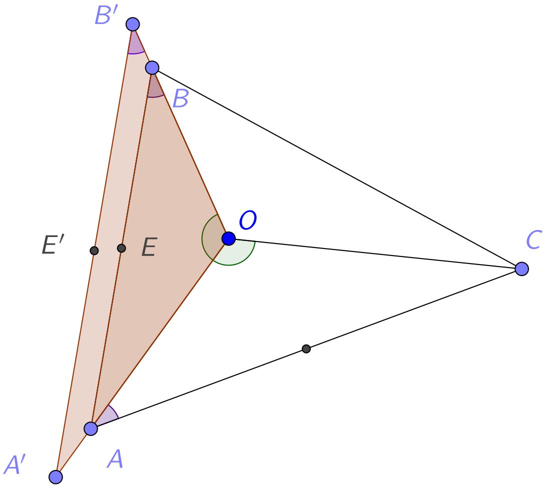
$ABO\angle = CAO\angle$



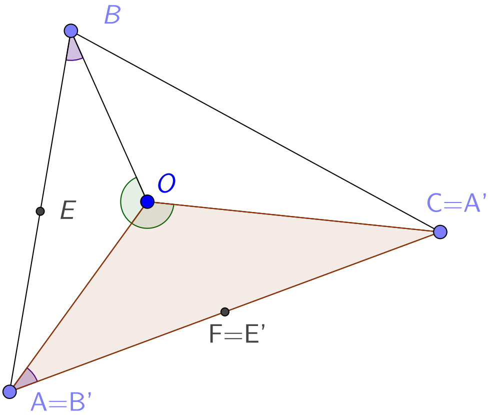
$OBA\triangle$ és $OAC\triangle$ hasonló



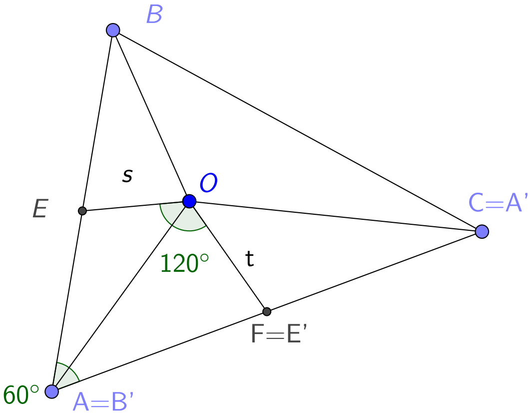
A $OBA\triangle$ -t nagyítjuk/kicsinyítjük AC/BA aránnyal



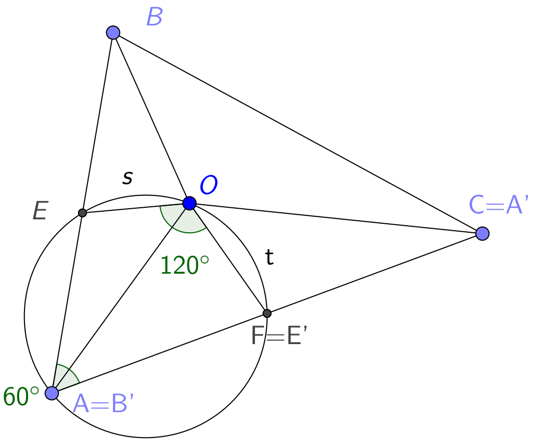
Az $OA'\ B'\triangle$ -t elforgatjuk $+120\angle$ kal O pont körül
ekkor $OA'\ B'\ \triangle = OAC\triangle$ és $E' = F$



$EOF = 120°$, és mivel $CAB = 60°$ következik, hogy O, E, A és F pontok egy körön vannak.

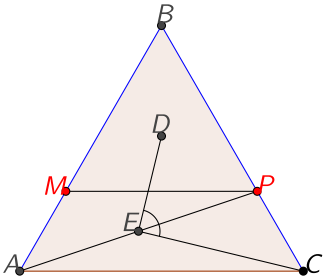


$EOF = 120°$, és mivel $CAB = 60°$ következik, hogy O,E,A és F pontok egy körön vannak.

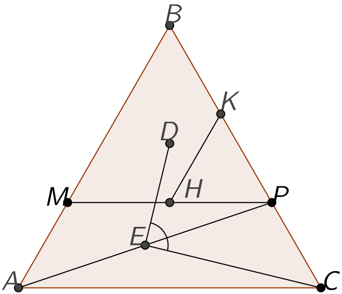


10. Feladat

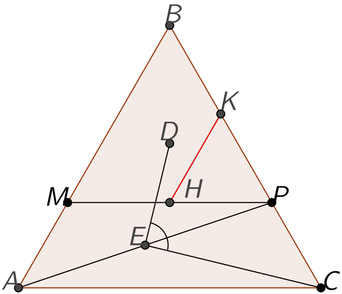
ABC egy szabályos $\triangle$, AB és CB oldalakon úgy helyezkednek el M és P pontok, hogy $MP \parallel AC$-vel. MPB $\triangle$ súlypontja D és PA felezőpontja E. Határozzuk meg DEC $\triangle$ szögeit.



Megoldás

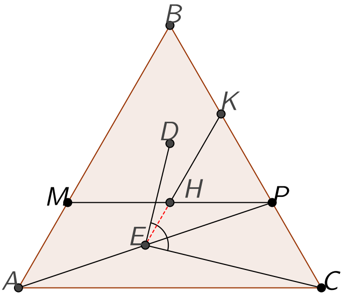


Megoldás



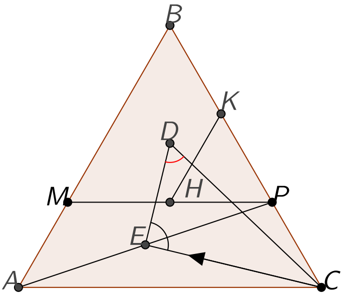
Forgatva kicsinyítsük BP szakaszt D körül

Megoldás



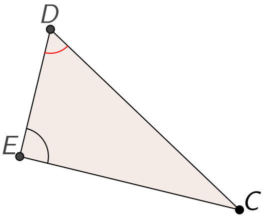
Forgatva kicsinyítsük BP szakaszt D körül

K, H és E egy egyenesre esik $\Rightarrow$ $\frac{BC}{BP} = \frac{BA}{BM} = \frac{KE}{KH}$

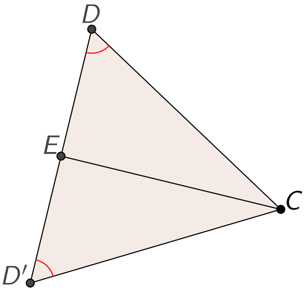


C-ből $\to E \longrightarrow EDC$

$\angle = 60^\circ$ & $DE = \frac{1}{2}\, DC$



$\rightarrow$ $DEC\triangle$ egy szabályos $\triangle$ fele



→ $DEC\triangle$ egy szabályos $\triangle$ fele

→ Szabályos $\triangle$

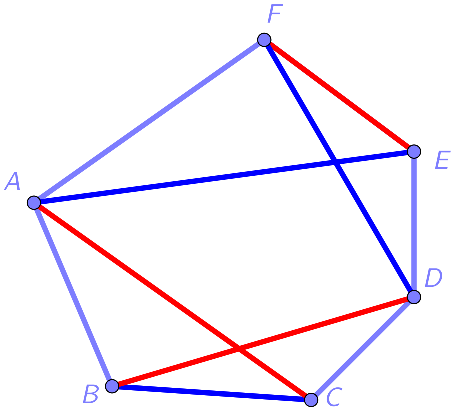
11. Feladat

Legyen $ABCDEF$ egy konvex hatszög, amiben teljesül, hogy $\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ$ és $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$.
Bizonyítsd be, hogy $\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1$?

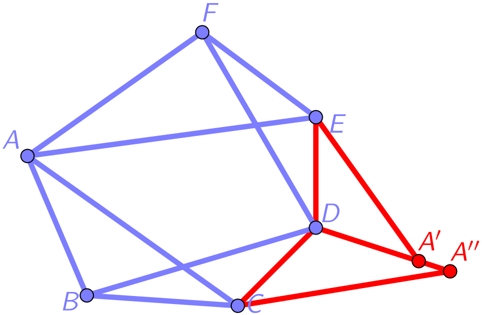
$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$$

Kéne:

$$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1$$



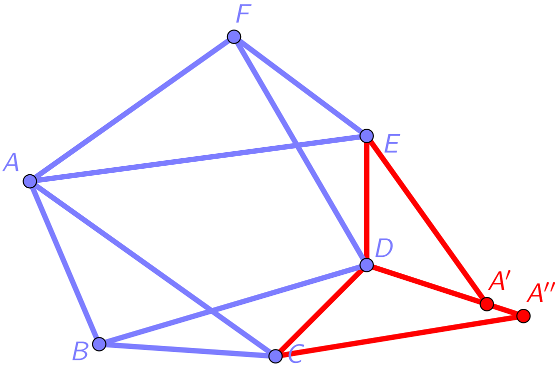
Mivel $\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ$ ezért, hogyha megcsináljuk a következő két forgatást: $S(E, FED\angle, ED/EF)$ és $S(C, BCD\angle, CD/CB)$ akkor D, A' és A'' egy egyenesre esnek.



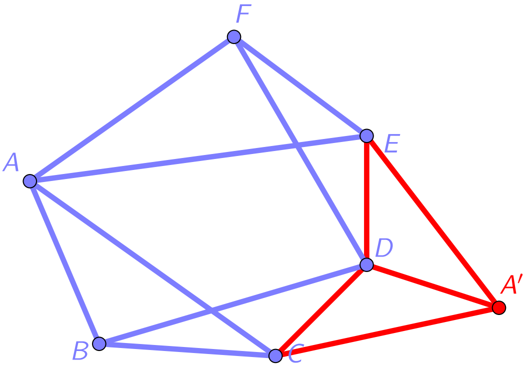
A forgatás miatt

$$DA' = FA \cdot \frac{ED}{EF}$$

$$DA'' = AB \cdot \frac{CD}{CB}$$



Ha ezt a kettőt egyenlővé teszem, és leosztok $FA \cdot \frac{ED}{EF}$-fell, akkor kijön, hogy $\frac{AB}{FA} \cdot \frac{CD}{CB} \cdot \frac{EF}{ED} = 1$ amiről tudjuk, hogy igaz.
Tehát $A' \equiv A''$

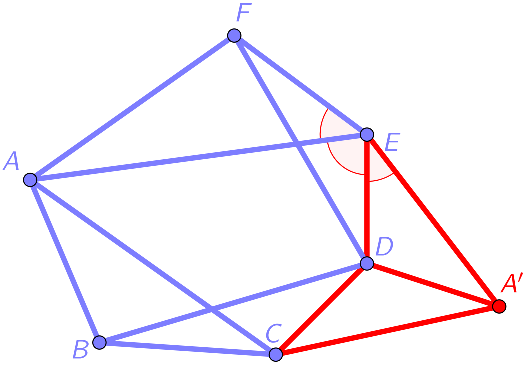


Hasonlóságok miatt:

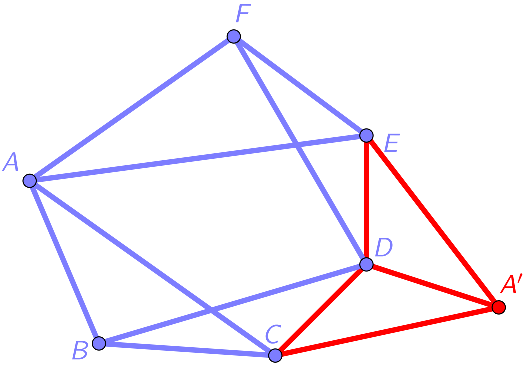
$AEF\angle = A'ED\angle \to DEF\angle = A'EA\angle;$

$DE/FE = A'E/AE$

$\Rightarrow DEF\triangle \sim A'EA\triangle$



Ugyanígy $BCD\triangle \sim BAA'\triangle$
Tehát $AA' = BD \cdot \frac{AC}{BC} = FD \cdot \frac{AE}{EF}$
Ebből az következik, hogy $\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1$



Köszönjük a figyelmet!

Barta Gergely, Formanek Balázs, Gáll Péter,
Horváth Andor, Kiss Mária, Kovács Máté,
Szendi Ágoston, Telek Benjámin
Felkészített: Groma Tanárnő

Forrás: Mathematical Excalibur 13/2

2016. október 6.