Euler egyik formulájának bizonyítása inverzióval

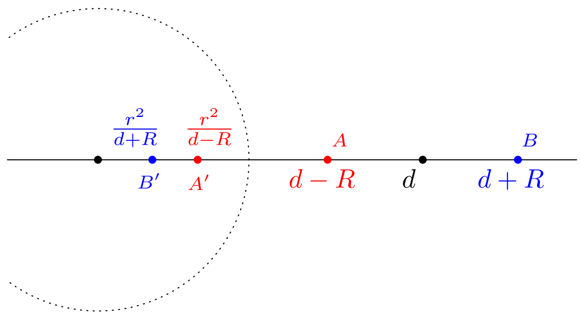
Ha egy háromszög beírt és köréírt körének középpontja d távolságra van egymástól, akkor $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, ahol R a köréírt, r pedig a beírt kör sugara.

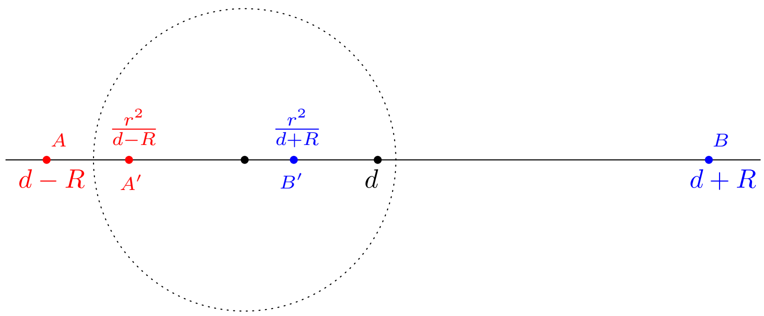
Megadunk egy bizonyítást, ami inverziót használ, és a 2015-ös tábor 10-es előadásában már elhangzott vázlatosan. (Az idei táborban egyvalaki emlékezett is erre . . . ☺)

Az inverz kör sugara

Legyen egy inverzió alapkörének sugara r. Ha egy P pont t távolságra van az inverzió pólusától, akkor képe, P' $\frac{r^2}{t}$ távolságra lesz a pólustól, az inverzió definíciója szerint. Ez a formula akkor is működik, ha t előjeles távolság, vagyis jelzi, hogy P melyik oldalára esik a pólusnak.

Most vizsgáljunk egy olyan R sugarú kört, amelynek középpontja $d \neq R$ távolságra van a pólustól ($d > 0$). E kör középpontját a pólussal összekötő egyenesen fekvő átmérőjének végpontjai legyenek A és B. Az alábbi ábrák a $d > R$ és a $d < R$ eseteket illusztrálják.



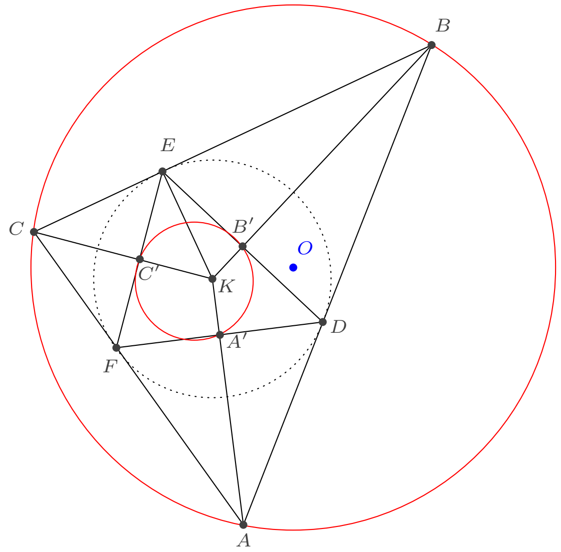


Mindkét esetben egyszerűen számolható az inverz kör sugara:

$$R' = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r^2}{d-R} - \frac{r^2}{d+R} \right) = r^2 \frac{R}{d^2 - R^2}, & \text{ha } d > R \\ \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r^2}{d+R} - \frac{r^2}{d-R} \right) = r^2 \frac{R}{R^2 - d^2}, & \text{ha } d < R \end{cases}$$

A tétel bizonyítása

Legyen az ABC háromszög köréírt körének középpontja O, beírt körének középpontja K, és a beírt kör oldalakon vett érintési pontjai D, E, F, az alábbi ábra szerint. A belső szögfelezők metszéspontjai a DEF háromszög oldalaival A', B' és C'.



Az első észrevételünk az, hogy $CE = CF$ (érintőszakaszok) miatt $CC' \perp EF$. Továbbá EK a beírt kör sugara, ezért $EK \perp EC$. A befogó-tételt KEC-re alkalmazva $EK^2 = KC' \cdot KC$, vagyis C' éppen C inverze a beírt körre vonatkozóan. Hasonlóan kapjuk, hogy A' az A, B' pedig a B inverze.

Az is igaz, hogy A', B' és C' felezik a DEF oldalait, ez szintén az érintőszakaszok egyenlőségének következménye. Tehát $A'B'C'$ köréírt köre éppen az EDF Feuerbach-köre, ezért sugara $\frac{r}{2}$.

Lényegében kész vagyunk. Három pont meghatároz egy kört ha nincsenek egy egyenesen, így az ábrán pirossal rajzolt körök egymás inverzei a beírt körre vonatkozóan.

Az előző szakasz eredményét fogjuk használni. $OK = d < R$, hiszen a beírt kör a köréírt kör belsejébe esik.

$$\frac{r}{2} = R' = r^2 \frac{R}{R^2 - d^2}$$

$$R^2 - d^2 = 2Rr \Leftrightarrow d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$