

# Kettőhatványok

Matektábor

2015. 10. 07.

## 2. Szorzás, szorzási művelet nélkül

Vegyük fel a kétösszszorzandó számot.

$$73 \cdot 23$$

## 2. Szorzás, szorzási művelet nélkül

Vegyük fel a két összeshorzandó számot.

$$73 \cdot 23$$

Folyamatosan felezzük meg a bal oszlopban lévő számot, miközben duplázzuk a jobb oldali számot.

$$\begin{array}{r} 73 \cdot 23 \\ 36 \quad 46 \\ 18 \quad 92 \\ 9 \quad 184 \\ 4 \quad 368 \\ 2 \quad 736 \\ 1 \quad 1472 \end{array}$$

Húzzuk át az összes sort amiben a bal oldali szám páros és adjuk össze az összes jobb oldalon megmaradt számot.

73	·	23
36		46
18		92
9		184
4		368
2		736
1		1472

$$23 + 184 + 1472 = 1679$$

$$73 \cdot 23 = 1679$$

Miért működik ez?

$$13_{10} = 1101_2$$

$$\begin{aligned} 13_{10} &= 1101_2 \\ 6_{10} &= 110_2 \end{aligned}$$

$$13_{10} = 1101_2$$

$$6_{10} = 110_2$$

Így egyszerűen megállapítható egy szám bináris kódja

$$73_{10} = 1001001_2$$

	73	·	23
	36		46
	18		92
	9		184
	4		368
	2		736
	1		1472

$$73 = 1 + 2^3 + 2^6$$

$$73 \cdot 23 = (1 + 2^3 + 2^6) \cdot 23$$



Felbontva a zárójelet a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} & +2^6 \cdot 23 = 1472 \\ & +2^5 \cdot 23 \\ & +2^4 \cdot 23 \\ 73 \cdot 23 = & +2^3 \cdot 23 = 184 \\ & +2^2 \cdot 23 \\ & +2^1 \cdot 23 \\ & +2^0 \cdot 23 = 23 \end{aligned}$$

Felbontva a zárójelet a következőt kapjuk:

$$+2^6 \cdot 23 = 1472$$

$$+2^5 \cdot 23$$

$$+2^4 \cdot 23$$

$$73 \cdot 23 = +2^3 \cdot 23 = 184$$

$$+2^2 \cdot 23$$

$$+2^1 \cdot 23$$

$$+2^0 \cdot 23 = 23$$

$$23 + 184 + 1472 = 1679$$

Felbontva a zárójelet a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} &+2^6 \cdot 23 = 1472 \\ &+2^5 \cdot 23 \\ &+2^4 \cdot 23 \\ 73 \cdot 23 = &+2^3 \cdot 23 = 184 \\ &+2^2 \cdot 23 \\ &+2^1 \cdot 23 \\ &+2^0 \cdot 23 = 23 \end{aligned}$$

$$23 + 184 + 1472 = 1679$$

## Számítógépek

A számítógépek is bináris számrendszert használnak, mert ezzel sokkal gyorsabban lehet műveleteket végezni, mint például a duplázás vagy felezés.

## 1. Egy súly probléma

- ▶ Egy nőről van szó, akinek öt köve van.
- ▶ Ki tud rakni minden 32-nél kisebb tömegű követ egy egyszerű kétkarú mérleggel.

## Megoldás

- ▶ A kövek 1,2,4,8,16 tömegűek (kg-ban)
- ▶ Szóval kettes számrendszerben ezzel öt helyiértékkel ki tudunk rakni minden egyes számot 31-ig.

## Továbbgondolás

- ▶ Egy ugyanolyan kétkarú mérleggel, de másik öt kövel meg tud állapítani 243-ig minden követ.
- ▶ Most viszont nem tudja kirakni a kövek súlyát, csak megállapítan

## Megoldás

- ▶ Ha meg tudjuk állapítani az összes páros tömegű követ akkor meg tudunk állapítani minden páratlant is.
- ▶ Rakhatunk mindkét oldalra súlyokat.

## Megoldás

- ▶ Ha meg tudjuk állapítani az összes páros tömegű követ akkor meg tudunk állapítani minden páratlant is.
- ▶ Rakhatunk mindkét oldalra súlyokat.

## Megoldás

- ▶ A kövek 2,6,18,54,162 tömegűek.



## 4. Feladat

### Túlélés

Egy szigeten van  $k$  darab ember, egymás mellett állnak, és arról szavaznak, hogy a sor végén álló meghaljon, vagy ne. Amelyikre több szavazat érkezik, az győz, ha ugyanannyi a két szavazat akkor túléli. A túlélők között egyenlően elosztanak 1 millió dollárt. Mindenki minél több pénzt akar, de nem akar meghalni. Kik lehetnek túlélők?

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 2 ember van
  - ▶ 1 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  túléli

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 2 ember van
  - ▶ 1 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 3 ember van
  - ▶ 1 mellette, 2 ellene  $\Rightarrow$  meghal

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 2 ember van
  - ▶ 1 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 3 ember van
  - ▶ 1 mellette, 2 ellene  $\Rightarrow$  meghal
- ▶ Ha 4 ember van
  - ▶ 2 mellette, 2 ellene  $\Rightarrow$  túléli

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 2 ember van
  - ▶ 1 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 3 ember van
  - ▶ 1 mellette, 2 ellene  $\Rightarrow$  meghal
- ▶ Ha 4 ember van
  - ▶ 2 mellette, 2 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 5 ember van
  - ▶ 1 mellette, 4 ellene  $\Rightarrow$  meghal

Aki túléli, az attól kezdve halállal szavaz, ezért kell annyi életre szavazó, mint amennyi halálra, ezért mindig duplázni kell az előző számot.

$$1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ db}}$$

Aki túléli, az attól kezdve halállal szavaz, ezért kell annyi életre szavazó, mint amennyi halálra, ezért mindig duplázni kell az előző számot.

$$1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ db}}$$

Ami egyenlő :

$$2^n$$



# Mi van ha?

Mi történik, ha 50% már halált jelent?

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 2 ember van
  - ▶ 1 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  meghal

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 2 ember van
  - ▶ 1 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  meghal
- ▶ Ha 3 ember van
  - ▶ 2 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  túléli

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 2 ember van
  - ▶ 1 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  meghal
- ▶ Ha 3 ember van
  - ▶ 2 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 4 ember van
  - ▶ 1 mellette, 3 ellene  $\Rightarrow$  meghal

- ▶ Ha 1 ember van
  - ▶ 1 mellette, 0 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 2 ember van
  - ▶ 1 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  meghal
- ▶ Ha 3 ember van
  - ▶ 2 mellette, 1 ellene  $\Rightarrow$  túléli
- ▶ Ha 4 ember van
  - ▶ 1 mellette, 3 ellene  $\Rightarrow$  meghal
- ▶ Ha 5 ember van
  - ▶ 2 mellette, 3 ellene  $\Rightarrow$  meghal

$$\underbrace{\left( \left( \left( \dots (1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \right) \cdot 2 + 1 \right) \dots \cdot 2 + 1 \right)}_{n-1 \text{ db}}$$

$$\underbrace{\left( \left( \left( \dots \left( 1 \cdot 2 + 1 \right) \cdot 2 + 1 \right) \cdot 2 + 1 \right) \dots \cdot 2 + 1 \right)}_{n-1 \text{ db}}$$

Ez egyenlő:

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0$$



$$\underbrace{\left( \left( \left( \dots \left( 1 \cdot 2 + 1 \right) \cdot 2 + 1 \right) \cdot 2 + 1 \right) \dots \cdot 2 + 1 \right)}_{n-1 \text{ db}}$$

Ez egyenlő:

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

A szám 2-es számrendszerben:

$$\underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ db}}$$

$$\underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ db}}$$

Ha ehhez hozzáadunk 1-et:

$$1 \underbrace{00 \dots 00}_{n \text{ db}}$$

$$\underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ db}}$$

Ha ehhez hozzáadunk 1-et:

$$1 \underbrace{00 \dots 00}_{n \text{ db}}$$

Ez pedig :

$$2^n$$

$$\underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ db}}$$

Ha ehhez hozzáadunk 1-et:

$$1 \underbrace{00 \dots 00}_{n \text{ db}}$$

Ez pedig :

$$2^n$$

Tehát az eredeti szám:

$$2^n - 1$$

# 5.Feladat

A Pascal-háromszög hányadik soraiban lesznek csak páratlan számok?

Írjuk fel csak a 2-es maradékokat a számok helyett! a szükséges sorok tagjai csak 1-esek. Belátjuk, hogy a maradékok összege ugyanolyan összegeket ad ki a háromszög tetszőleges egyforma részénél.

Ezen háromszögek oldalai mind páratlan számok. Ezek a 2 hatványainak a soraiban helyezkednek el.

Ismerős valahonnan?



# 6. feladat

Játék:

$N$  db. fekete v. fehér korong körbe

# 6. feladat

Játék:

$N$  db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

# 6. feladat

Játék:

$N$  db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

Eredetiek le

# 6. feladat

Játék:

$N$  db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

Eredetiek le

Ismételgetik

# 6. feladat

Játék:

$N$  db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

Eredetiek le

Ismételgetik

# 6. feladat

Játék:

$N$  db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

Eredetiek le

Ismételgetik

**Állítás: Ha  $N$  egy 2-hatvány, minden korong fehér lesz az elsőktől függetlenül.**

# Megoldás

Kör  $\rightarrow$  sor, szélsők szomszédosak

# Megoldás

Kör  $\rightarrow$  sor, szélsők szomszédosak

$\rightarrow$  0-k és 1-esek pl: 0110110  $\rightarrow$  fehér;  
két fekete; fehér; két fekete; fehér.



# Megoldás

Kör  $\rightarrow$  sor, szélsők szomszédosak

$\rightarrow$  0-k és 1-esek pl: 0110110  $\rightarrow$  fehér;  
két fekete; fehér; két fekete; fehér.

Lépés: Új sor, ahol egy jegy a főső  
kettő összege

▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek

*Tfh:  $N$  hatványa 2-nek*

▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek

Tfh:  $N$  hatványa 2-nek

Minden fehér, első nem

▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek

Tfh:  $N$  hatványa 2-nek

Minden fehér, első nem

100...0

- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶ 100...0

Pascal- $\Delta$ : 2-es maradékok

- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶ 100...0

Pascal- $\triangle$ : 2-es maradékok

Utolsó sor csupa 1

- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶ 100...0

Pascal- $\triangle$ : 2-es maradékok

Utolsó sor csupa 1

$N - 1$  lépés  $\Rightarrow$  mind fekete

- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶ 100...0

Pascal- $\triangle$ : 2-es maradékok

Utolsó sor csupa 1

$N - 1$  lépés  $\Rightarrow$  mind fekete

$\Rightarrow$  az  $N$ . lépés után mind fehér lesz.



- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶ 100 ... 0
- ▶ Pascal- $\Delta$ , 100 ... 0  $\Rightarrow$  mindegyik fehér  $N$  lépés után

Egymásra helyezés Pl:

$$0110 \rightarrow 0100 + 0010$$

- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶ 100...0
- ▶ Pascal- $\Delta$ , 100...0  $\Rightarrow$  mindegyik fehér  $N$  lépés után

Egymásra helyezés Pl:

0110  $\rightarrow$  0100 + 0010

**Maradékok nincsenek**

- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶ 100...0
- ▶ Pascal- $\Delta$ , 100...0  $\Rightarrow$  mindegyik fehér  $N$  lépés után

Egymásra helyezés Pl:

$$0110 \rightarrow 0100 + 0010$$

Maradékok nincsenek

0100 és 0010 is 0000-ba megy ily módon

- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶ 100...0
- ▶ Pascal- $\Delta$ , 100...0  $\Rightarrow$  mindegyik fehér  $N$  lépés után

Egymásra helyezés Pl:

$$0110 \rightarrow 0100 + 0010$$

Maradékok nincsenek

0100 és 0010 is 0000-ba megy ily módon

- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶  $100 \dots 0$
- ▶ Pascal- $\Delta$ ,  $100 \dots 0 \Rightarrow$  mindegyik fehér  $N$  lépés után
- ▶  $0110 = 0010 + 0100$

**Minden szituáció visszavezethető**

- ▶ Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- ▶  $N = 2^n$
- ▶ 100 ... 0
- ▶ Pascal- $\Delta$ , 100 ... 0  $\Rightarrow$  mindegyik fehér  $N$  lépés után
- ▶  $0110 = 0010 + 0100$

Minden szituáció visszavezethető

**Tehát ha  $N$  egy hatványa 2-nek,  
 $N$  db. lépés után minden korong  
fehér lesz.**

# Továbbgondolás

Mi van, ha  $N$  nem egy 2-hatvány?

# 7-es feladat

Kérdés: Prím-e a  $2^{91} - 1$  és a  $2^{91} + 1$ ?



# Megoldás

Tudjuk, hogy:  $2^{91} = (2^7)^{13}$

# Megoldás

Tudjuk, hogy:  $2^{91} = (2^7)^{13}$

Legyen:  $2^7 = x$

# Megoldás

Tudjuk, hogy:  $2^{91} = (2^7)^{13}$

Legyen:  $2^7 = x$

Ekkor felírhatjuk a következőket:

$$x^{13} - 1^{13} = (x - 1)(x^{12} + x^{11} + \dots + x + 1)$$

és

$$x^{13} + 1^{13} = (x + 1)(x^{12} - x^{11} + \dots - x + 1)$$

$$x^{13} - 1^{13} = (x - 1)(x^{12} + x^{11} + \dots + x + 1)$$

és

$$x^{13} + 1^{13} = (x + 1)(x^{12} - x^{11} + \dots - x + 1)$$

Ebből láthatjuk, hogy  $2^7 - 1 = 127$  osztója a  $2^{91} - 1$ -nek, a  $2^7 + 1 = 129$  pedig a  $2^{91} + 1$ -nek.

# Továbbgondolás

$2^n - 1$  alakú prímek a Mersenne-prímek.

# Továbbgondolás

$2^n - 1$  alakú prímek a Mersenne-prímek.  
Azonban ha  $n$  összetett szám  $\Rightarrow$  az előbbi azonosság miatt mindig lesz valódi osztója a  $2^n - 1$ -nek.

# Továbbgondolás

$2^n - 1$  alakú prímekek a Mersenne-prímekek.

Azonban ha  $n$  összetett szám  $\Rightarrow$  az előbbi azonosság miatt mindig lesz valódi osztója a  $2^n - 1$ -nek.

Ha  $n$  prím  $\Rightarrow n = 2; 3; 5; 7; 13; 17$  és  $19$  esetén a kifejezés prím, azonban  $n = 11$  esetén nem.

Ha  $n = 2$ , akkor:

$$2^2 - 1 = 3$$

A 3 prímszám! :)



Ha  $n = 11$ , akkor:

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

Nem prím! :(

48 Mersenne-prímet ismerünk.

Legnagyobb 17 millió számjegyből áll.

Wordben 12-es betűmérettel több, mint 5603 oldal.

Ha megnyitjuk Chromeban a legnagyobbat, rákérdez, biztos meg akarjuk-e nézni, mert 33,2MB.

48 Mersenne-prímet ismerünk.

Legnagyobb 17 millió számjegyből áll.

Wordben 12-es betűmérettel több, mint 5603 oldal.

Ha megnyitjuk Chromeban a legnagyobbat, rákérdez, biztos meg akarjuk-e nézni, mert 33,2MB.

Egy kis ízelítő belőle:

# Ízelítő

1692963953016186253024653606540849486805955  
4429780831691514196141022874432720897714828  
5713369697110994468055934073846906655411181  
7907647997489686357539171225103220545679943  
3974192590093380896754133702007155124351231  
2867959424955507275074476132727862802813410  
2028643393745139361245598086541391038650501  
6331618835310376302024975294001826974011395  
4200069920025039582825801254212598566660307

7350063526588935210181270621141358325511601  
8211053139686073136875440221095684149542469  
2465356596960356423335761870127801735746780  
0851989147817819779267588468622691706981275  
5093502948748499968021416795179910866757162  
3360490969947412219841103913093635441797264  
3598535947356383834462732135318338972459420  
7493889390673051571004012970498533376341380  
4719672531744839553320647879222939113968837  
2306824678335094282179718466564823151878895  
2053644769478536964858930791024637512201523

2691842676643953171941821484691476976007610  
9680432238191703939237160288420577180174557  
3656676023165260104243859660327254532435654  
1144921382684260162364370278498342628821353  
0103808271339095138297537998354780450054778  
5259710486379962818746912749596992936838446  
5675093520131749166706329417276032567449981  
3740784918473720722452955781883687771565449  
4505165296642738679956026169690510631758704  
9128052491470023084166634404931980003976882  
6349798424953041488602752303385567465081309

8414718912552478199892076842739252251993801  
9575967171707779756576777334027063839498217  
4302280842438433714568169312608610587527596  
2682917116821956438941712636561094550649087  
8950256378780884060946969158023565781933467  
8353498321134982124912061927527332807930607  
4887087105606961298730778662549758322434809  
1709708038789219212518816318989314764064984  
5289228058957853919940220480153616039943656  
0375103641022303867358221725999251338268592  
2684384634933152942079053208482688950565270

9948333214747936522777277309040991677400513  
6592098300215225234049114897454372890009684  
2943382384006733626465667521802892300871495  
3960462916418660358931892027625067723178157  
7632780665083528861969200265979824781708106  
9309944591582200428625786065843898858961047  
7959824907939229048437891671353366024940714  
7695541986878612253540149187746459924454610  
3117039604722912069453889561926755017668585  
6076337688344511505205935146486104538199223  
1703617859747702549544124005717222807051362



3484458095882736790369640418787888310582809  
5002314567616959023909976804772827625702094  
9341513981435617304892607546819979785710809  
2524348274372196615614079355060771927303885  
7426163455458615585613575293568136427413534  
4720081015230849692198465228003496781028280  
9052572338256942068428714907449653628594153  
8844430308847941266070062524505531807491963  
2371409230784437330359463997166969622484993  
1685250942802211008517420959939039346530813  
6278421198967267222638315610448766702565873

9589047883656626640209705957294930660606192  
2634774273054421457910689762235017286727803  
1206934009713929648675311784607668687677013  
0252970388218174285057357323957202780373565  
6306966980130583025520087066995986863758652  
0569420110310208482298350540251055845745659  
1582376929004594895009979566966554080575008  
6765616995609480860313558524211390540091850  
2725314175009542570160428868966313783376448  
9962476264418944323253338507791834391619727  
5597469351548751030605628537364885091705670

4866559031828564438116998485413882246187795  
2938456492484823269109870747214577728335126  
3331362156990434328501477594298191903874562  
3685171354620904463725686066852663072034554  
7510452426912829697071397730828249175597969  
7343900150545895016955552299540856477926826  
4185982690918950678052957535993080583715306  
3078126998896805763926730821589728984486814  
7932794585220817081228695844483679016707177  
2351888546508422957049810040085622152193181  
3672253680922738426823148567458204294782565

6810180678322483746625937757543432321566195  
3855734576877339103743529395005673775434754  
3346373763682250422314331181283125146504478  
3696292834101691704758868679587143728270349  
1413759566894269393940900514675571563391697  
2588740375611994486978510668113872474903922  
1958940138600877339449049035846625654508112  
9437067972673941598428665343005096238024560  
6042105495089406750041855473702768102891143  
0406566182637263630081171361316103724599911  
3955247859290282485776222091642827291557848

1240748663150897456020018089382115851839837  
3313037439791765425721780719244945677026462  
7720645299866917710567118016598516057112855  
3644490253078087856114821492006770358591674  
9519824457268882081324054752343254469081734  
1898127131836349779573194366319879872378454  
5884243033270327039561915800502184103796351  
8521000969993465290283477388905717035383995  
0070277005431571552407940989888151697744512  
7296849501413576633940385368642434729415554  
7589952584579753916288925468368966141372757

2835532695192544318160128685766965405070081  
2283718328055828678299987777613314363475873  
3733847392451174103103284263926886631812650  
8547764900477242154952399914404902860535047  
3451627258282529257293956107685517807022157  
6074335582634698255381023740140974985325452  
6978271851919341445969389648344366012241588  
7926542394924015150892532414376768361911757  
6727499926724960851100463791805359446367751  
3896964614170675401460506199978754456816364  
7856666001201519596829283276010355681985661

7743412016439260389364178384808465659756688  
3982864037990754882251349728365874842736486  
1620728469636965576939471458825223847670782  
3718900265636950354475842211347051512877698  
6877053367445863017328011675147857073072832  
9746629418087377890272374577665919250835881  
6056661508489665649762423194783013121649379  
2926644393228556527839951020832945780781099  
6063957676324527956478470923940814299256233  
2073993267105624678264154826283067067230327  
5608757222520826708347017287595498271022992

8800816121748853490841428437831066336809675  
9453958357118407451558437860535758076219193  
0995489632049708267411743410923371638553029  
4883215486096917257467406379266036727662684  
9101379150850204009897651681930834774884255  
9332098436865505281591330356037390722081406  
2428794982328613754185045546643128690598699  
8891951321274296329268469183466508303704084  
5963636814309629061837629209313238988319401  
3102836019254867073974607069453361466777377  
4655210026044663870292864092660709319746613



1985501670439142749480276759172927160822499  
9217848182570423045746051370841798475013090  
5292482381280589010535906802453020975733380  
3218587465362849060003837007178076335556831  
7163708625959802427034808400418362817142036  
9386900546428496652644544178854588353057945  
3408273780410677456688741815807967061347489  
8904259677179517893483015469782344664771052  
0041080433774056890720091846623249419476582  
0226310624483246914478502752354039665151654  
0935712980870531481092562664046269286050857

9369951614315151587956004431056871496612834  
8947203941158253442237092334164580076594999  
8540851578826808800959499873932274764785581  
5573332451206069807266624899546971521599925  
0274208852861520679798531400596246957707480  
5032477817870716714704835140899582131100045  
6758180921450276850456415032381709208017793  
3860590058255780746648878826545159386643088  
4176179006348349111630063801696805909129031  
8678474161671728219785325336127910471455622  
2970199780545711787539766933493100784733347

6109595465519629452144315763039112848346762  
3036399178686614935870895965707235525501777  
7937166840019796075975423267350157114644442  
3115364454512589802695372316973658849267046  
2558165618686525805159938056319554147750648  
3564131283006660919385875224653901523429360  
2627846816673546866722703844925201585240010  
9009063916798416304613809560389419689376360  
3287807469791189712400023312524605397172976  
1419758140747968201357883669515400875429465  
2636389359832498554698573018802330189183779

6755606432909285940540083906119317690729692  
1848438116158082928760577536689238821810517  
1042348042689972332636504513493111181872953  
1229115020769100942776853304205288873447076  
6942375303685150968566542167780793544731092  
2044063614084488833452355872108180966540028  
5951176243802564934719976979939333497174512  
6304446529589276105713892941396271780987403  
8016427098222206973952422312564498798943105  
1010138292651366065597220164366218326743163  
5542772139969216125890008540432432631159379

2981450952080582674828633932286919748651090  
1283863183311972731676172002632098818515568  
2061877085964026255208680400809638833233816  
8542231425684749494077708222938898891414550  
1349786254036971655038264722942762419735581  
7550352275946777933065679540116329246455110  
2190218506658083281528041221382447883470155  
2774864903695512831127267093000986226831839  
7306354260830196722846173366227048545598036  
8874872858868309884252169734617768463335515  
6679549159799623693180037192159576854767890

8564468923305987995037945144570786507026815  
5895154787973344344760634239644942814486784  
2260872504670384781930974706497653449204146  
2731537542081506755876085100412967418686717  
1171287532284613569090853127070078210218342  
7208914424253326207871708281300005207445506  
5664189628997343565475267520347366937665443  
1730057842234339426132714806759152101621856  
5029128316512991843627683281021804777252826  
1008429533764606547797657939879976832576494  
3219922265709813762927468790434477253047374

3258608464114686103934782454641580642987549  
9456027426295471765343916234464391061545751  
8833645472301825585530119933780914303027904  
1725638102112941591857632807977087323307845  
8899445244951476489093194821583186857514287  
5125428417169735261324830064242256976766989  
6064379533334603647588311108796296793213334  
2670953775458235595134529768315763126042349  
2796431115299179659444442315665591783546309  
5193401504049906619909578578337980036013025  
0177423166250434575300719036982544138849337

8417598540112246154446617973418395799516019  
4396152794355873586743031906298317848280555  
6101756103281454437856115579216491594577431  
1271179805083059758676479917455192399977058  
7528518153801946576495492850533136063845254  
1647732067954324377365187275336583980757385  
3304088236457987216984462386641093267541620  
6842829550355483649637820766133245476993217  
9879439153124135459429044101233740480899106  
1290495492596728458607016787478380067004402  
5858285336804385610563703085802645003111503



3515061198367291081922253447026590109214177  
6361758936275623247779164741607236788007649  
3550331342008832016574684582305568169830322  
3057783297257262639062832830366876699620016  
4505225250531270485702207509061992077344949  
3502911203948429843070437368120160465800752  
5742333360939688437251194216118367890259841  
6294713560281628132637961669106514043994440  
8628518855063745401034404431874487112279313  
8103953831839566097646967587409543942948811  
2225575168939781630169213626478196514133288

4904802139359709545094184339291940751542087  
4465489371307621187450249846900834417214327  
7717071326648766748033725891610496393190870  
9308102502317599662520724374763515114780283  
9799137608238375539428323404515912456793767  
3045827135629970772450793745725669954322700  
7038956925785944801085329448009007502887227  
4845323589789681172352520849777355092249406  
6160764644328126211125812811583919001146037  
2633840512070319100080246496854176062689911  
5626894138935974277252795413009453530145057

3347632349198060796417819934544377937356651  
7626964970490339857726223986352468411105349  
0034720514606563306419090113007612574393529  
5058408430812877585163605711304922761466795  
7140219560382777157122631319945312009339756  
5972543771385756494563062142606156578110946  
6280901421868960001339842366823934092231785  
8083500599335538492885372999066816329380781  
6331720958977292325710259942627319272302542  
7451621022793903421315139302455493963709910  
3388460393751273252924110530562400869235873

9527184893205842749198101840085304907373636  
2564358374830962606556121730597155714419982  
3869906123770158872603831600575369768375221  
2363570594424155219669145445797987550173004  
5861499347102413558414648953983937725423092  
6821964101261655388177915577132077815744838  
5312982799837247931276202805090937369849577  
1896186226568506086617628149141543831100532  
4607124924594387211588770692378481174382028  
6709519986452622984530847067026551948368036  
2502870074871885036589250483242566067062658

7631642001049290540833406593464458669383759  
8701559826479436582022179147694098206400328  
5779920089551242688116858976642140554287681  
7854904643383721995993497973621176111014329  
6378435874708581359442521195252921790589545  
9203249101593318736828100828177749613339923  
6067540229620975517541413564110406713341304  
6961767806308450531691471022325293660730029  
2001638144980913093730920621200114139984058  
2801521044949624582810666574044850733815507  
6470157005053842300038951710421859743505812

5520980303654371396795968382522153814773976  
3138320121155196288781024920845340616187647  
8801760221973595820375367202283311369485678  
8428422952196362035853791272327619144834404  
4409014394883920428382927809622377339791604  
7310736723522558617486523771645624139882054  
1080840879562867941912332966233009330532062  
8184391709627773070600870875446692529209549  
2184299849107046104277145310525422770149327  
1286966009397019275020334312992732988619866  
1147732200789392688510651556920936100862098

8357416314014437628219582599040169324562203  
5033644285693121318387974119442863190414679  
6886576162500191943176425191439983581791791  
3904895403062251104365560737365996387540385  
8872604460938195631760682251343325418448496  
6235281196118840455632526016786794122034743  
6969818058010337373277272824417241799639197  
1074419175669374337540207732013942655526429  
9132899090746036402716464070008038416785800  
5673823818149987555045285748341821756809085  
0164696371869544863276652594991393510821499

0845615374136238876610776512214451001497957  
3529735746179304117752310137822291989911287  
4647028163195199951061920840689355721581648  
7942629479164426118926897234714261582024052  
8179558312817422904808617743858971822470691  
4444928680719472308401597431496809236895346  
4252023552270434994690763801768929179286081  
2450875615081096578011993457650888834490012  
8057825086470081677987830194074845586158519  
6774349021381659677931007883874559228219317  
5923645896306209998202937810284650925440427



3989696556025287308112194227459926846758892  
6871343292862288624757517797187679147777267  
9270313773722742724142146540606199436712503  
9267471472593651679994687252061350831077925  
2054246104529432273617267385553968922065495  
1873168198138256253181727360853330893142224  
4694560190199526598348212630735696852919644  
9133499732735906551509575250868338986309683  
0926018240927654181280295454044893354234808  
2287773804348972452077938181640577921913710  
7966518767113398882587490958141900913891928

1119088675199334320226637554368228299760589  
4728505061511649192032943089854136894179005  
1851464683924683722729171032238965286036499  
1900497565475482480065648998845612254011401  
9156099788417707476800477677495015454903847  
6489261624387936553745872977463124702491027  
2280424718049004298880312293142712715624510  
2334019050984158477180484435504185697689993  
6202673822415381823986791033842841415016762  
7590523871170125519563917538281065891569918  
8514148389748072756906810142726034048665235

7853954670224967879750713804466243718524626  
0178385913113881791292418348331595232614022  
2626455875590683196242147790388515752271182  
2801051421504572122889971192071229066182061  
8073987480557280136691569137560115918410926  
7250764440034096779244681086042122859994704  
1514456023295251424276270249598171249736788  
8418038730621873089087532456884401757185722  
3425877622285633434465399099109103930379945

14964 számjegy után meguntam...

## 8. De Polignacnak a nevezetes sejtése

- ▶ Azt állította, hogy minden 1-nél nagyobb páratlan szám felírható egy prím és egy kettőhatvány összegeként.
- ▶ Azt vallotta, hogy leellenőrizte három millióig az összes páratlan számra.

## Bizonyítás

$2^0 + 126$ ,  $126$  2-vel osztható.

## Bizonyítás

$2^0 + 126$ , 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$ , 125 5-tel osztható.

## Bizonyítás

$2^0 + 126$ , 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$ , 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$ , 123 3-mal osztható.



## Bizonyítás

$2^0 + 126$ , 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$ , 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$ , 123 3-mal osztható.

$2^3 + 119$ , 119 7-tel osztható

## Bizonyítás

$2^0 + 126$ , 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$ , 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$ , 123 3-mal osztható.

$2^3 + 119$ , 119 7-tel osztható

$2^4 + 111$ , 111 3-mal osztható

## Bizonyítás

$2^0 + 126$ , 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$ , 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$ , 123 3-mal osztható.

$2^3 + 119$ , 119 7-tel osztható

$2^4 + 111$ , 111 3-mal osztható

$2^5 + 95$ , 95 5-tel osztható

## Bizonyítás

$2^0 + 126$ , 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$ , 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$ , 123 3-mal osztható.

$2^3 + 119$ , 119 7-tel osztható

$2^4 + 111$ , 111 3-mal osztható

$2^5 + 95$ , 95 5-tel osztható

$2^6 + 63$ , 63 3-mal osztható

## 12. feladat

Egy kettőhatvány első számjegye lehet-e a hetes?

Ha van ilyen, akkor felírható ez az egyenlőtlenség:

$$7 \cdot 10^k \leq 2^n < 8 \cdot 10^k$$

$$7 \cdot 10^k = 7 \underbrace{000 \dots 0}_{k \text{ db}}$$

$$8 \cdot 10^k = 8 \underbrace{000 \dots 0}_{k \text{ db}}$$

Ha van ilyen, akkor felírható ez az egyenlőtlenség:

$$7 \cdot 10^k \leq 2^n < 8 \cdot 10^k$$

$$7 \cdot 10^k = 7 \underbrace{000 \dots 0}_{k \text{ db}}$$

$$8 \cdot 10^k = 8 \underbrace{000 \dots 0}_{k \text{ db}}$$

Az egésznek véve a logaritmisát, alkalmazva az azonosságokat:

$$\lg 7 + k \leq n \cdot \lg 2 < \lg 8 + k$$

## Logaritmus

$\lg a$  az a szám, ahányadik hatványra kell emelni a tizedet, hogy  $a$ -t kapj.  $\lg a = b$  azt lenti, hogy  $10^b = a$ . Pl.:  $\lg 100 = 2$   $\lg 100000 = 5$



$$\lg 7 + k \leq n \cdot \lg 2 < \lg 8 + k$$

$$\lg 7 + k \leq n \cdot \lg 2 < \lg 8 + k$$

Mivel  $k + \lg 7$ -ben  $k$  az egész- és a  $\lg 7$  törtrész ( $\lg 8 + k$ -ban ugyanígy), és a három tagnak ugyanakkora az egészrésze,  $k$  miatt, kivonhatjuk az egyenlőtlenségből  $k$ -t.

$$\lg 7 \leq \{n \cdot \lg 2\} < \lg 8$$

## $\lg 2$ irracionális szám

$$\lg 2 = \frac{a}{b}$$

## $\lg 2$ irracionális szám

$$\lg 2 = \frac{a}{b}$$

$$\lg 2 \cdot b = a$$

## $\lg 2$ irracionális szám

$$\lg 2 = \frac{a}{b}$$

$$\lg 2 \cdot b = a$$

$$10^{\lg 2 \cdot b} = 10^a$$

$$(10^{\lg 2})^b = 10^a$$

## $\lg 2$ irracionális szám

$$\lg 2 = \frac{a}{b}$$

$$\lg 2 \cdot b = a$$

$$10^{\lg 2 \cdot b} = 10^a$$

$$(10^{\lg 2})^b = 10^a$$

$$2^b = 10^a$$

Bármelyik irracionális szám két különböző többszörösének törtrésze különböző szám

Legyen  $d$  egy irracionális szám. Tegyük fel, hogy van két, egész számú többszöröse, amiknek a törtrésze megegyezik.

Bármelyik irracionális szám két különböző többszörösének törtrésze különböző szám

Legyen  $d$  egy irracionális szám. Tegyük fel, hogy van két, egész számú többszöröse, amiknek a törtrésze megegyezik.

$$ad - bd = k$$



## Bármelyik irracionális szám két különböző többszörösének törtrésze különböző szám

Legyen  $d$  egy irracionális szám. Tegyük fel, hogy van két, egész számú többszöröse, amiknek a törtrésze megegyezik.

$$ad - bd = k$$

$$ad - bd = (a - b) \cdot d$$

## Bármelyik irracionális szám két különböző többszörösének törtrésze különböző szám

Legyen  $d$  egy irracionális szám. Tegyük fel, hogy van két, egész számú többszöröse, amiknek a törtrésze megegyezik.

$$ad - bd = k$$

$$ad - bd = (a - b) \cdot d$$

$$\frac{k}{(a-b)} = d$$

## Átugorhatatlanság törvénye

Legyen a két szorzó tényező  $m$ ;  $m + q$ . A következő kettő  $m + q$ ;  $m + 2q$ . Utána  $m + 2q$ ;  $m + 3q$ . Az a  $lg2$  többszörös, ami éppen beleugrik a keresett intervallumba az felírható  $(m + qp) \cdot lg2$  alakban.  $\Rightarrow$  Van olyan kettőhatvány, aminek az első számjegye hetes. Legkisebb ilyen szám:  $2^{46}$

Van olyan kettőhatvány, aminek az első két számjegyéből alkotott szám a 77?

Van olyan kettőhatvány, aminek az első számjegye hetes.

- ▶ Végtelen sok ilyen kettőhatvány van.

Van olyan kettőhatvány, aminek az első számjegye hetes.

- ▶ Végtelen sok ilyen kettőhatvány van.
- ▶ Az esetek 5,8%-ában.

Van olyan kettőhatvány, aminek az első számjegye hetes.

- ▶ Végtelen sok ilyen kettőhatvány van.
- ▶ Az esetek 5, 8%-ában.
- ▶ Van olyan kettőhatvány, aminek az első két számjegyből alkotott szám a 77. Az esetek 0, 56%-ában. ( $\lg 78 - \lg 77 = 0, 0056$ )

Forrás: James Tanton A Dozen Questions about the Powers of Two Math Horizons, vol. 8, Sept. 2001, pp. 5-10



# Köszönjük a figyelmet.

Barta Gergely, Formanek Balázs, Gáll Péter,  
Horváth Andor, Kovács Máté, Kun András,  
Szendi Ágoston

Témavezető tanár: Mahler Attila

2015.10.07.