Kettőhatványok

Matektábor

2015. 10. 07.

2. Szorzás, szorzási művelet nélkül

Vegyük fel a két összesszorzandó számot.

$$73 \quad \cdot \quad 23$$

2. Szorzás, szorzási művelet nélkül

Vegyük fel a két összesszorzandó számot.

$$73 \quad \cdot \quad 23$$

Folyamatosan felezzük meg a bal oszlopban lévő számot, miközben duplázzuk a jobb oldali számot.

73	·	23
36		46
18		92
9		184
4		368
2		736
1		1472

Húzzuk át az összes sort amiben a bal oldali szám páros és adjuk össze az összes jobb oldalon megmaradt számot.

$$\begin{array}{lcr}
73 & \cdot & 23 \\
36 & & 46 \\
18 & & 92 \\
9 & & 184 \\
4 & & 368 \\
2 & & 736 \\
1 & & 1472
\end{array}$$

$$23 + 184 + 1472 = 1679$$

$$73 \cdot 23 = 1679$$

Miért működik ez?

$$13_{10} = 1101_2$$

$$13_{10} = 1101_2$$
$$6_{10} = 110_2$$

$$13_{10} = 1101_2$$
$$6_{10} = 110_2$$

Így egyszerűen megállapítható egy szám bináris kódja

$$73_{10} = 1001001_2$$

73	$\cdot$	23
36		46
18		92
9		184
4		368
2		736
1		1472

$$73 = 1 + 2^3 + 2^6$$
$$73 \cdot 23 = (1 + 2^3 + 2^6) \cdot 23$$

Felbontva a zárójelet a következőt kapjuk:

$$73 \cdot 23 = \begin{array}{l} +2^6 \cdot 23 = 1472 \\ +2^5 \cdot 23 \\ +2^4 \cdot 23 \\ +2^3 \cdot 23 = 184 \\ +2^2 \cdot 23 \\ +2^1 \cdot 23 \\ +2^0 \cdot 23 = 23 \end{array}$$

Felbontva a zárójelet a következőt kapjuk:

$$73 \cdot 23 = \begin{array}{l} +2^6 \cdot 23 = 1472 \\ +2^5 \cdot 23 \\ +2^4 \cdot 23 \\ +2^3 \cdot 23 = 184 \\ +2^2 \cdot 23 \\ +2^1 \cdot 23 \\ +2^0 \cdot 23 = 23 \end{array}$$

$$23 + 184 + 1472 = 1679$$

Felbontva a zárójelet a következőt kapjuk:

$$73 \cdot 23 = \begin{array}{l} +2^6 \cdot 23 = 1472 \\ +2^5 \cdot 23 \\ +2^4 \cdot 23 \\ +2^3 \cdot 23 = 184 \\ +2^2 \cdot 23 \\ +2^1 \cdot 23 \\ +2^0 \cdot 23 = 23 \end{array}$$

$$23 + 184 + 1472 = 1679$$

Számítógépek

A számítógépek is bináris számrendszert használnak, mert ezzel sokkal gyorsabban lehet műveleteket végezni, mint például a duplázás vagy felezés.

1.Egy súly probléma

- Egy nőről van szó, akinek öt köve van.
- Ki tud rakni minden 32-nél kisebb tömegű követ egy egyszerű kétkarú mérleggel.

Megoldás

- A kövek 1,2,4,8,16 tömegűek (kg-ban)
- Szóval kettes számrendszerben ezzel öt helyiértékkel ki tudunk rakni minden egyes számot 31-ig.

Továbbgondolás

- Egy ugyanolyan kétkarú mérleggel,de másik öt kővel meg tud állapítani 243-ig minden követ.
- Most viszont nem tudja kirakni a kövek súlyát,csak megállapítan

Megoldás

- Ha meg tudjuk állapítani az összes páros tömegű követ akkor meg tudunk állapítani minden páratlant is.
- Rakhatunk mindkét oldalra súlyokat.

Megoldás

- Ha meg tudjuk állapítani az összes páros tömegű követ akkor meg tudunk állapítani minden páratlant is.
- Rakhatunk mindkét oldalra súlyokat.

Megoldás

- A kövek 2,6,18,54,162 tömegűek.

4. Feladat

Túlélés

Egy szigeten van k darab ember, egymás mellett állnak, és arról szavaznak, hogy a sor végén álló meghaljon, vagy ne. Amelyikre több szavazat érkezik, az győz, ha ugyanannyi a két szavazat akkor túléli. A túlélők között egyenlően elosztanak 1 millió dollárt. Mindenki minél több pénzt akar, de nem akar meghalni. Kik lehetnek túlélők?

- Ha 1 ember van
  - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli

- Ha 1 ember van
  - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 2 ember van
  - 1 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ túléli

- Ha 1 ember van
  - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 2 ember van
  - 1 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 3 ember van
  - 1 mellette, 2 ellene $\Rightarrow$ meghal

- Ha 1 ember van
    - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 2 ember van
    - 1 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 3 ember van
    - 1 mellette, 2 ellene $\Rightarrow$ meghal
- Ha 4 ember van
    - 2 mellette, 2 ellene $\Rightarrow$ túléli

- Ha 1 ember van
  - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 2 ember van
  - 1 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 3 ember van
  - 1 mellette, 2 ellene $\Rightarrow$ meghal
- Ha 4 ember van
  - 2 mellette, 2 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 5 ember van
  - 1 mellette, 4 ellene $\Rightarrow$ meghal

Aki túléli, az attól kezdve halállal szavaz, ezért kell annyi életre szavazó, mint amennyi halálra, ezért mindig duplázni kell az előző számot.

$$1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ db}}$$

Aki túléli, az attól kezdve halállal szavaz, ezért kell annyi életre szavazó, mint amennyi halálra, ezért mindig duplázni kell az előző számot.

$$1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ db}}$$

Ami egyenlő :

$$2^n$$

Mi van ha?

Mi történik, ha 50% már halált jelent?

- Ha 1 ember van
  - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli

- Ha 1 ember van
  - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 2 ember van
  - 1 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ meghal

- Ha 1 ember van
  - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 2 ember van
  - 1 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ meghal
- Ha 3 ember van
  - 2 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ túléli

- Ha 1 ember van
  - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 2 ember van
  - 1 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ meghal
- Ha 3 ember van
  - 2 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 4 ember van
  - 1 mellette, 3 ellene $\Rightarrow$ meghal

- Ha 1 ember van
  - 1 mellette, 0 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 2 ember van
  - 1 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ meghal
- Ha 3 ember van
  - 2 mellette, 1 ellene $\Rightarrow$ túléli
- Ha 4 ember van
  - 1 mellette, 3 ellene $\Rightarrow$ meghal
- Ha 5 ember van
  - 2 mellette, 3 ellene $\Rightarrow$ meghal

$$(((\ldots(1\cdot\underbrace{2+1)\cdot 2+1)\cdot 2+1)\ldots\cdot 2+1}_{n-1\ \text{db}}$$

$$(((\ldots(1\cdot \underbrace{2+1)\cdot 2+1)\cdot 2+1)\ldots\cdot 2+1}_{n-1\ \text{db}}$$

Ez egyenlő:

$$2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}\ldots+2^{2}+2^{1}+2^{0}$$

$$(((\dots(1\cdot\underbrace{2+1)\cdot 2+1)\cdot 2+1)\dots\cdot 2+1}_{n-1\ \text{db}}$$

Ez egyenlő:

$$2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}\dots+2^2+2^1+2^0$$

A szám 2-es számrendszerben:

$$\underbrace{111\dots11}_{n\ \text{db}}$$

$$\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ db}}$$

Ha ehhez hozzáadunk 1-et:

$$1\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ db}}$$

$$\underbrace{111\ldots11}_{n\ \text{db}}$$

Ha ehhez hozzáadunk 1-et:

$$1\underbrace{00\ldots00}_{n\ \text{db}}$$

Ez pedig :

$$2^n$$

$$\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ db}}$$

Ha ehhez hozzáadunk 1-et:

$$1\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ db}}$$

Ez pedig :

$$2^n$$

Tehát az eredeti szám:

$$2^n - 1$$

5.Feladat

A Pascal-háromszög hányadik soraiban lesznek csak páratlan számok?

Írjuk fel csak a 2-es maradékokat a számok helyett! a szükséges sorok tagjai csak 1-esek. Belátjuk, hogy a maradékok összege ugyanolyan összegeket ad ki a háromszög tetszőleges egyforma részénél.

Ezen háromszögek oldalai mind páratlan számok. Ezek a 2 hatványainak a soraiban helyezkednek el.

Ismerős valahonnan?

6. feladat

Játék:

N db. fekete v. fehér korong körbe

6. feladat

Játék:

N db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

6. feladat

Játék:

N db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

Eredetiek le

6. feladat

Játék:

N db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

Eredetiek le

Ismételgetik

6. feladat

Játék:

N db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

Eredetiek le

Ismételgetik

6. feladat

Játék:

N db. fekete v. fehér korong körbe

Azonosak közé fehér, különbözőek közé fekete

Eredetiek le

Ismételgetik

Állítás: Ha N egy 2-hatvány, minden korong fehér lesz az elsőktől függetlenül.

Megoldás

Kör $\rightarrow$ sor, szélsők szomszédosak

Megoldás

Kör $\rightarrow$ sor, szélsők szomszédosak

$\rightarrow$ 0-k és 1-esek pl: 0110110 $\rightarrow$ fehér; két fekete; fehér; két fekete; fehér.

Megoldás

Kör $\to$ sor, szélsők szomszédosak

$\to$ 0-k és 1-esek pl: 0110110 $\to$ fehér; két fekete; fehér; két fekete; fehér.

Lépés: Új sor, ahol egy jegy a fölső kettő összege

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek

Tfh: *N hatványa 2-nek*

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek

Tfh: N *hatványa* 2*-nek*

Minden fehér, első nem

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek

Tfh: N *hatványa* 2-*nek*

Minden fehér, első nem

$100\dots0$

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100\ldots0$

Pascal-△: 2-es maradékok

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100\ldots0$

Pascal-$\triangle$: 2-es maradékok

Utolsó sor csupa 1

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100 \ldots 0$

Pascal-$\triangle$: 2-es maradékok

Utolsó sor csupa 1

$N - 1$ lépés $\Rightarrow$ mind fekete

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100\ldots0$

Pascal-$\triangle$: 2-es maradékok

Utolsó sor csupa 1

$N - 1$ lépés $\Rightarrow$ mind fekete

$\Rightarrow$ az N. lépés után mind fehér lesz.

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100\ldots0$
- Pascal-$\triangle$, $100\ldots0 \Rightarrow$ mindegyik fehér N lépés után

Egymásra helyezés PI:
$0110 \rightarrow 0100 + 0010$

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100\ldots0$
- Pascal-$\triangle$, $100\ldots0 \Rightarrow$ mindegyik fehér N lépés után

Egymásra helyezés PI:
$0110 \rightarrow 0100 + 0010$
Maradékok nincsenek

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100\ldots0$
- Pascal-$\triangle$, $100\ldots0 \Rightarrow$ mindegyik fehér N lépés után

Egymásra helyezés PI:
$0110 \rightarrow 0100 + 0010$
Maradékok nincsenek
0100 és 0010 is 0000-ba megy ily módon

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100\ldots0$
- Pascal-$\triangle$, $100\ldots0 \Rightarrow$ mindegyik fehér N lépés után

Egymásra helyezés PI:
$0110 \rightarrow 0100 + 0010$
Maradékok nincsenek
0100 és 0010 is 0000-ba megy ily módon

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100\ldots0$
- Pascal-$\triangle$, $100\ldots0 \Rightarrow$ mindegyik fehér N lépés után
- $0110 = 0010 + 0100$

Minden szituáció visszavezethető

- Kör - Sorozat - 0-k és 1-esek
- $N = 2^n$
- $100\ldots0$
- Pascal-$\triangle$, $100\ldots0 \Rightarrow$ mindegyik fehér N lépés után
- $0110 = 0010 + 0100$

Minden szituáció visszavezethető

Tehát ha N egy hatványa 2-nek, N db. lépés után minden korong fehér lesz.

Továbbgondolás

Mi van, ha N nem egy 2-hatvány?

7-es feladat

Kérdés: Prím-e a $2^{91}-1$ és a $2^{91}+1$?

Megoldás

Tudjuk, hogy: $2^{91} = (2^7)^{13}$

Megoldás

Tudjuk, hogy: $2^{91} = (2^7)^{13}$

Legyen: $2^7 = x$

Megoldás

Tudjuk, hogy: $2^{91} = (2^7)^{13}$
Legyen: $2^7 = x$
Ekkor felírhatjuk a következőket:

$$x^{13} - 1^{13} = (x - 1)(x^{12} + x^{11} + \ldots + x + 1)$$

és

$$x^{13} + 1^{13} = (x + 1)(x^{12} - x^{11} + \ldots - x + 1)$$

$$x^{13} - 1^{13} = (x-1)(x^{12} + x^{11} + \ldots + x + 1)$$

és

$$x^{13} + 1^{13} = (x+1)(x^{12} - x^{11} + \ldots - x + 1)$$

Ebből láthatjuk, hogy $2^7 - 1 = 127$ osztója a $2^{91} - 1$-nek, a $2^7 + 1 = 129$ pedig a $2^{91} + 1$-nek.

Továbbgondolás

$2^n - 1$ alakú prímek a Mersenne-prímek.

Továbbgondolás

$2^n - 1$ alakú prímek a Mersenne-prímek.
Azonban ha n összetett szám $\Rightarrow$ az előbbi azonosság miatt mindig lesz valódi osztója a $2^n - 1$-nek.

Továbbgondolás

$2^n - 1$ alakú prímek a Mersenne-prímek.
Azonban ha n összetett szám $\Rightarrow$ az előbbi azonosság miatt mindig lesz valódi osztója a $2^n - 1$-nek.
Ha n prím $\Rightarrow$ $n = 2; 3; 5; 7; 13; 17$ és 19 esetén a kifejezés prím, azonban $n = 11$ esetén nem.

Ha $n = 2$, akkor:

$$2^2 - 1 = 3$$

A 3 prímszám! :)

Ha $n = 11$, akkor:

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

Nem prím! :(

48 Mersenne-prímet ismerünk.
Legnagyobb 17 millió számjegyből áll.
Wordben 12-es betűmérettel több, mint 5603 oldal.
Ha megnyitjuk Chromeban a legnagyobbat, rákérdez, biztos meg akarjuk-e nézni, mert $33,2$MB.

48 Mersenne-prímet ismerünk.
Legnagyobb 17 millió számjegyből áll.
Wordben 12-es betűmérettel több, mint 5603 oldal.
Ha megnyitjuk Chromeban a legnagyobbat, rákérdez, biztos meg akarjuk-e nézni, mert $33,2$MB.
Egy kis ízelítő belőle:

Ízelítő

1692963953016186253024653606540849486805955
4429780831691514196141022874432720897714828
5713369697110994468055934073846906655411181
7907647997489686357539171225103220545679943
3974192590093380896754133702007155124351231
2867959424955507275074476132727862802813410
2028643393745139361245598086541391038650501
6331618835310376302024975294001826974011395
4200069920025039582825801254212598566660307

7350063526588935210181270621141358325511601
8211053139686073136875440221095684149542469
2465356596960356423335761870127801735746780
0851989147817819779267588468622691706981275
5093502948748499968021416795179910866757162
3360490969947412219841103913093635441797264
3598535947356383834462732135318338972459420
7493889390673051571004012970498533376341380
4719672531744839553320647879222939113968837
2306824678335094282179718466564823151878895
2053644769478536964858930791024637512201523

2691842676643953171941821484691476976007610
9680432238191703939237160288420577180174557
3656676023165260104243859660327254532435654
1144921382684260162364370278498342628821353
0103808271339095138297537998354780450054778
5259710486379962818746912749596992936838446
5675093520131749166706329417276032567449981
3740784918473720722452955781883687771565449
4505165296642738679956026169690510631758704
9128052491470023084166634404931980003976882
6349798424953041488602752303385567465081309

8414718912552478199892076842739252251993801
9575967171707779756576777334027063839498217
4302280842438433714568169312608610587527596
2682917116821956438941712636561094550649087
8950256378780884060946969158023565781933467
8353498321134982124912061927527332807930607
4887087105606961298730778662549758322434809
1709708038789219212518816318989314764064984
5289228058957853919940220480153616039943656
0375103641022303867358221725999251338268592
2684384634933152942079053208482688950565270

99483332147479365227772773090409916774005l3

6592098300215225234049114897454372890009684

2943382384006733626465667521802892300871495

3960462916418660358931892027625067723178157

7632780665083528861969200265979824781708106

9309944591582200428625786065843898858961047

7959824907939229048437891671353366024940714

7695541986878612253540149187746459924454610

3117039604722912069453889561926755017668585

6076337688344511505205935146486104538199223

1703617859747702549544124005717222807051362

3484458095882736790369640418787888310582809
5002314567616959023909976804772827625702094
9341513981435617304892607546819979785710809
2524348274372196615614079355060771927303885
7426163455458615585613575293568136427413534
4720081015230849692198465228003496781028280
9052572338256942068428714907449653628594153
8844430308847941266070062524505531807491963
2371409230784437330359463997166969622484993
1685250942802211008517420959939039346530813
6278421198967267222638315610448766702565873

9589047883656626640209705957294930660606192
2634774273054421457910689762235017286727803
1206934009713929648675311784607668687677013
0252970388218174285057357323957202780373565
6306966980130583025520087066995986863758652
0569420110310208482298350540251055845745659
1582376929004594895009979566966554080575008
6765616995609480860313558524211390540091850
2725314175009542570160428868966313783376448
9962476264418944323253338507791834391619727
5597469351548751030605628537364885091705670

48665590318285644381169984854138822461877955
29384564924848232691098707472145777283351266
33313621569904343285014775942981919038745622
36851713546209044637256860668526630720345544
75104524269128296970713977308282491755979699
73439001505458950169555522995408564779268266
41859826909189506780529575359930805837153066
30781269988968057639267308215897289844868144
79327945852208170812286958444836790167071777
23518885465084229570498100400856221521931811
36722536809227384268231485674582042947825655

6810180678322483746625937757543432321566195
3855734576877339103743529395005673775434754
3346373763682250422314331181283125146504478
3696292834101691704758868679587143728270349
1413759566894269393940900514675571563391697
2588740375611994486978510668113872474903922
1958940138600877339449049035846625654508112
9437067972673941598428665343005096238024560
6042105495089406750041855473702768102891143
0406566182637263630081171361316103724599911
3955247859290282485776222091642827291557848

1240748663150897456020018089382115851839837
3313037439791765425721780719244945677026462
7720645299866917710567118016598516057112855
3644490253078087856114821492006770358591674
9519824457268882081324054752343254469081734
1898127131836349779573194366319879872378454
5884243033270327039561915800502184103796351
8521000969993465290283477388905717035383995
0070277005431571552407940989888151697744512
7296849501413576633940385368642434729415554
7589952584579753916288925468368966141372757

2835532695192544318160128685766965405070081
2283718328055828678299987777613314363475873
3733847392451174103103284263926886631812650
8547764900477242154952399914404902860535047
3451627258282529257293956107685517807022157
6074335582634698255381023740140974985325452
6978271851919341445969389648344366012241588
7926542394924015150892532414376768361911757
6727499926724960851100463791805359446367751
3896964614170675401460506199978754456816364
7856666001201519596829283276010355681985661

7743412016439260389364178384808465659756688
3982864037990754882251349728365874842736486
1620728469636965576939471458825223847670782
3718900265636950354475842211347051512877698
6877053367445863017328011675147857073072832
9746629418087377890272374577665919250835881
6056661508489665649762423194783013121649379
2926644393228556527839951020832945780781099
6063957676324527956478470923940814299256233
2073993267105624678264154826283067067230327
5608757222520826708347017287595498271022992

8800816121748853490841428437831066336809675
9453958357118407451558437860535758076219193
0995489632049708267411743410923371638553029
4883215486096917257467406379266036727662684
9101379150850204009897651681930834774884255
9332098436865505281591330356037390722081406
2428794982328613754185045546643128690598699
8891951321274296329268469183466508303704084
5963636814309629061837629209313238988319401
3102836019254867073974607069453361466777377
4655210026044663870292864092660709319746613

1985501670439142749480276759172927160822499
9217848182570423045746051370841798475013090
5292482381280589010535906802453020975733380
3218587465362849060003837007178076335556831
7163708625959802427034808400418362817142036
9386900546428496652644544178854588353057945
3408273780410677456688741815807967061347489
8904259677179517893483015469782344664771052
0041080433774056890720091846623249419476582
0226310624483246914478502752354039665151654
0935712980870531481092562664046269286050857

9369951614315151587956004431056871496612834
8947203941158253442237092334164580076594999
8540851578826808800959499873932274764785581
5573332451206069807266624899546971521599925
0274208852861520679798531400596246957707480
5032477817870716714704835140899582131100045
6758180921450276850456415032381709208017793
3860590058255780746648878826545159386643088
4176179006348349111630063801696805909129031
8678474161671728219785325336127910471455622
2970199780545711787539766933493100784733347

6109595465519629452144315763039112848346762
3036399178686614935870895965707235525501777
7937166840019796075975423267350157114644442
3115364454512589802695372316973658849267046
2558165618686525805159938056319554147750648
3564131283006660919385875224653901523429360
2627846816673546866722703844925201585240010
9009063916798416304613809560389419689376360
3287807469791189712400023312524605397172976
1419758140747968201357883669515400875429465
2636389359832498554698573018802330189183779

675560643290928594054008390611931769072969 2
184843811615808292876057753668923882181051 7
104234804268997233263650451349311118187295 3
122911502076910094277685330420528887344707 6
694237530368515096856654216778079354473109 2
204406361408448883345235587210818096654002 8
595117624380256493471997697993933349717451 2
630444652958927610571389294139627178098740 3
801642709822220697395242231256449879894310 5
101013829265136606559722016436621832674316 3
554277213996921612589000854043243263115937 9

2981450952080582674828633932286919748651090
1283863183311972731676172002632098818515568
2061877085964026255208680400809638833233816
8542231425684749494077708222938898891414550
1349786254036971655038264722942762419735581
7550352275946777933065679540116329246455110
2190218506658083281528041221382447883470155
2774864903695512831127267093000986226831839
7306354260830196722846173366227048545598036
8874872858868309884252169734617768463335515
6679549159799623693180037192159576854767890

85644689233059879950379451445707865070268155
58951547879733443447606342396449428144867845
22608725046703847819309747064976534492041466
27315375420815067558760851004129674186867171
11712875322846135690908531270700782102183421
72089144242533262078717082813000052074455066
56641896289973435654752675203473669376654433
17300578422343394261327148067591521016218566
50291283165129918436276832810218047772528266
10084295337646065477976579398799768325764941
32199222657098137629274687904344772530473741

3258608464114686103934782454641580642987549
9456027426295471765343916234464391061545751
8833645472301825585530119933780914303027904
1725638102112941591857632807977087323307845
8899445244951476489093194821583186857514287
5125428417169735261324830064242256976766989
6064379533334603647588311108796296793213334
2670953775458235595134529768315763126042349
2796431115299179659444442315665591783546309
5193401504049906619909578578337980036013025
0177423166250434575300719036982544138849337

8417598540112246154446617973418395799516019
4396152794355873586743031906298317848280555
6101756103281454437856115579216491594577431
1271179805083059758676479917455192399977058
7528518153801946576495492850533136063845254
1647732067954324377365187275336583980757385
3304088236457987216984462386641093267541620
6842829550355483649637820766133245476993217
9879439153124135459429044101233740480899106
1290495492596728458607016787478380067004402
5858285336804385610563703085802645003111503

3515061198367291081922253447026590109214177
6361758936275623247779164741607236788007649
3550331342008832016574684582305568169830322
3057783297257262639062832830366876699620016
4505225250531270485702207509061992077344949
3502911203948429843070437368120160465800752
5742333360939688437251194216118367890259841
6294713560281628132637961669106514043994440
8628518855063745401034404431874487112279313
8103953831839566097646967587409543942948811
2225575168939781630169213626478196514133288

4904802139359709545094184339291940751542087
4465489371307621187450249846900834417214327
7717071326648766748033725891610496393190870
9308102502317599662520724374763515114780283
9799137608238375539428323404515912456793767
3045827135629970772450793745725669954322700
7038956925785944801085329448009007502887227
4845323589789681172352520849777355092249406
6160764644328126211125812811583919001146037
2633840512070319100080246496854176062689911
5626894138935974277252795413009453530145057

3347632349198060796417819934544377937356651
7626964970490339857726223986352468411105349
0034720514606563306419090113007612574393529
5058408430812877585163605711304922761466795
7140219560382777157122631319945312009339756
5972543771385756494563062142606156578110946
6280901421868960001339842366823934092231785
8083500599335538492885372999066816329380781
6331720958977292325710259942627319272302542
7451621022793903421315139302455493963709910
3388460393751273252924110530562400869235873

95271848932058427491981018400853049073736
25643583748309626065561217305971557144199982
38699061237701588726038316005753697683752221
23635705944241552196691454457979875501730004
58614993471024135584146489539839377254230092
68219641012616553881779155771320778157448838
53129827998372479312762028050909373698495777
18961862265685060866176281491415438311005332
46071249245943872115887706923784811743820028
67095199864526229845308470670265519483680036
25028700748718850365892504832425660670626658

7631642001049290540833406593464458669383759
8701559826479436582022179147694098206400328
5779920089551242688116858976642140554287681
7854904643383721995993497973621176111014329
6378435874708581359442521195252921790589545
9203249101593318736828100828177749613339923
6067540229620975517541413564110406713341304
6961767806308450531691471022325293660730029
2001638144980913093730920621200114139984058
2801521044949624582810666574044850733815507
6470157005053842300038951710421859743505812

5520980303654371396795968382522153814773976
3138320121155196288781024920845340616187647
8801760221973595820375367202283311369485678
8428422952196362035853791272327619144834404
4409014394883920428382927809622377339791604
7310736723522558617486523771645624139882054
1080840879562867941912332966233009330532062
8184391709627773070600870875446692529209549
2184299849107046104277145310525422770149327
1286966009397019275020334312992732988619866
1147732200789392688510651556920936100862098

8357416314014437628219582599040169324562203
5033644285693121318387974119442863190414679
6886576162500191943176425191439983581791791
3904895403062251104365560737365996387540385
8872604460938195631760682251343325418448496
6235281196118840455632526016786794122034743
6969818058010337373277272824417241799639197
1074419175669374337540207732013942655526429
9132899090746036402716464070008038416785800
5673823818149987555045285748341821756809085
0164696371869544863276652594991393510821499

0845615374136238876610776512214451001497957
3529735746179304117752310137822291989911287
4647028163195199951061920840689355721581648
7942629479164426118926897234714261582024052
8179558312817422904808617743858971822470691
4444928680719472308401597431496809236895346
4252023552270434994690763801768929179286081
2450875615081096578011993457650888834490012
8057825086470081677987830194074845586158519
6774349021381659677931007883874559228219317
5923645896306209998202937810284650925440427

3989696556025287308112194227459926846758892
6871343292862288624757517797187679147777267
9270313773722742724142146540606199436712503
9267471472593651679994687252061350831077925
2054246104529432273617267385553968922065495
1873168198138256253181727360853330893142224
4694560190199526598348212630735696852919644
9133499732735906551509575250868338986309683
0926018240927654181280295454044893354234808
2287773804348972452077938181640577921913710
7966518767113398882587490958141900913891928

1119088675199334320226637554368228299760589
4728505061511649192032943089854136894179005
1851464683924683722729171032238965286036499
1900497565475482480065648998845612254011401
9156099788417707476800477677495015454903847
6489261624387936553745872977463124702491027
2280424718049004298880312293142712715624510
2334019050984158477180484435504185697689993
6202673822415381823986791033842841415016762
7590523871170125519563917538281065891569918
8514148389748072756906810142726034048665235

7853954670224967879750713804466243718524626
0178385913113881791292418348331595232614022
2626455875590683196242147790388515752271182
2801051421504572122889971192071229066182061
8073987480557280136691569137560115918410926
7250764440034096779244681086042122859994704
1514456023295251424276270249598171249736788
8418038730621873089087532456884401757185722
3425877622285633434465399099109103930379945

14964 számjegy után meguntam…

8.De Polignacnak a nevezetes sejtése

- Azt állította, hogy minden 1-nél nagyobb páratlan szám felírható egy prím és egy kettőhatvány összegeként.
- Azt vallotta, hogy leellenőrizte három millióig az összes páratlan számra.

Bizonyítás

$2^0 + 126$, 126 2-vel osztható.

Bizonyítás

$2^0 + 126$, 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$, 125 5-tel osztható.

Bizonyítás

$2^0 + 126$, 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$, 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$, 123 3-mal osztható.

Bizonyítás

$2^0 + 126$, 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$, 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$, 123 3-mal osztható.

$2^3 + 119$, 119 7-tel osztható

Bizonyítás

$2^0 + 126$, 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$, 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$, 123 3-mal osztható.

$2^3 + 119$, 119 7-tel osztható

$2^4 + 111$, 111 3-mal osztható

Bizonyítás

$2^0 + 126$, 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$, 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$, 123 3-mal osztható.

$2^3 + 119$, 119 7-tel osztható

$2^4 + 111$, 111 3-mal osztható

$2^5 + 95$, 95 5-tel osztható

Bizonyítás

$2^0 + 126$, 126 2-vel osztható.

$2^1 + 125$, 125 5-tel osztható.

$2^2 + 123$, 123 3-mal osztható.

$2^3 + 119$, 119 7-tel osztható

$2^4 + 111$, 111 3-mal osztható

$2^5 + 95$, 95 5-tel osztható

$2^6 + 63$, 63 3-mal osztható

12. feladat

Egy kettőhatvány első számjegye lehet-e a hetes?

Ha van ilyen, akkor felírható ez az egyenlőtlenség:

$$7 \cdot 10^k \leq 2^n < 8 \cdot 10^k$$

$$7 \cdot 10^k = 7\underbrace{000\ldots0}_{k\ \ db}$$

$$8 \cdot 10^k = 8\underbrace{000\ldots0}_{k\ \ db}$$

Ha van ilyen, akkor felírható ez az egyenlőtlenség:

$$7 \cdot 10^k \leq 2^n < 8 \cdot 10^k$$

$$7 \cdot 10^k = 7\underbrace{000\ldots0}_{k\ \ db}$$

$$8 \cdot 10^k = 8\underbrace{000\ldots0}_{k\ \ db}$$

Az egésznek véve a logaritmisát, alkalmazva az azonosságokat:

$$lg7 + k \leq n \cdot lg2 < lg8 + k$$

Logaritmus

lga az a szám, ahányadik hatványra kell emelni a tizet, hogy a-t kapj. lga$=$ b azt lenti, hogy $10^b = a$. Pl.: $lg100 = 2$ $lg100000 = 5$

$$lg7 + k \leq n \cdot lg2 < lg8 + k$$

$$lg7 + k \leq n \cdot lg2 < lg8 + k$$

Mivel $k + lg7$-ben k az egész- és a $lg7$ törtrész ($lg8 + k$-ban ugyanígy), és a három tagnak ugyanakkora az egészrésze, k miatt, kivonhatjuk az egyenlőtlenségből k-t.

$$lg7 \leq \{n \cdot lg2\} < lg8$$

$lg2$ irracionális szám

$$lg2 = \frac{a}{b}$$

$lg2$ irracionális szám

$$lg2 = \frac{a}{b}$$

$$lg2 \cdot b = a$$

$lg2$ irracionális szám

$$lg2 = \frac{a}{b}$$

$$lg2 \cdot b = a$$

$$10^{lg2 \cdot b} = 10^a$$

$$(10^{lg2})^b = 10^a$$

$lg2$ irracionális szám

$$lg2 = \frac{a}{b}$$

$$lg2 \cdot b = a$$

$$10^{lg2 \cdot b} = 10^a$$

$$(10^{lg2})^b = 10^a$$

$$2^b = 10^a$$

Bármelyik irracionális szám két különböző többszörösének törtrésze különböző szám

Legyen d egy irracionális szám. Tegyük fel, hogy van két, egész számú többszöröse, amiknek a törtrésze megegyezik.

Bármelyik irracionális szám két különböző többszörösének törtrésze különböző szám

Legyen d egy irracionális szám. Tegyük fel, hogy van két, egész számú többszöröse, amiknek a törtrésze megegyezik.

$ad - bd = k$

Bármelyik irracionális szám két különböző többszörösének törtrésze különböző szám

Legyen d egy irracionális szám. Tegyük fel, hogy van két, egész számú többszöröse, amiknek a törtrésze megegyezik.

$ad - bd = k$

$ad - bd = (a - b) \cdot d$

Bármelyik irracionális szám két különböző többszörösének törtrésze különböző szám

Legyen d egy irracionális szám. Tegyük fel, hogy van két, egész számú többszöröse, amiknek a törtrésze megegyezik.

$ad - bd = k$

$ad - bd = (a - b) \cdot d$

$\frac{k}{(a-b)} = d$

Átugorhatatlanság törvénye

Legyen a két szorzó tényező m; $m+q$. A következő kettő $m+q$; $m+2q$. Utána $m+2q$; $m+3q$. Az a $lg2$ többszörös, ami éppen beleugrik a keresett intervallumba az felírható$(m+qp)\cdot lg2$ alakban. $\Rightarrow$ Van olyan kettőhatvány, aminek az első számjegye hetes. Legkisebb ilyen szám: 2^{46}

Van olyan kettőhatvány, aminek az első két számjagyéből alkotott szám a 77?

Van olyan kettőhatvány, aminek az első számjegye hetes.

- Végtelen sok ilyen kettőhatvány van.

Van olyan kettőhatvány, aminek az első számjegye hetes.

- Végtelen sok ilyen kettőhatvány van.
- Az esetek $5,8\%$-ában.

Van olyan kettőhatvány, aminek az első számjegye hetes.

- Végtelen sok ilyen kettőhatvány van.
- Az esetek $5,8\%$-ában.
- Van olyan kettőhatvány, aminek az első két számjegyéből alkotott szám a 77. Az esetek $0,56\%$-ában. ($lg78 - lg77 = 0,0056$)

Forrás: James Tanton A Dozen Questions about the Powers of Two Math Horizons, vol. 8, Sept. 2001, pp. 5-10

Köszönjük a figyelmet.

Barta Gergely, Formanek Balázs, Gáll Péter, Horváth Andor, Kovács Máté, Kun András, Szendi Ágoston
Témavezető tanár: Mahler Attila
2015.10.07.