Inverzió

10.B és 10.C

BDG Matektábor

2015. október 8.

Tartalom

Tartalom

- Mi az az inverzió?

Tartalom

- Mi az az inverzió?
- Az inverzió tulajdonságai

Tartalom

- Mi az az inverzió?
- Az inverzió tulajdonságai
- Mohr-Mascheroni tétel

Tartalom

- Mi az az inverzió?
- Az inverzió tulajdonságai
- Mohr-Mascheroni tétel
- Steiner poriszmája

Tartalom

- Mi az az inverzió?
- Az inverzió tulajdonságai
- Mohr-Mascheroni tétel
- Steiner porizmája
- Az inverzor

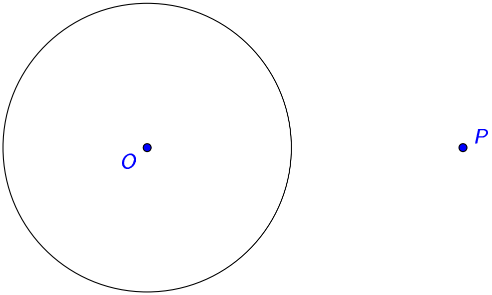
Mi az az inverzió?

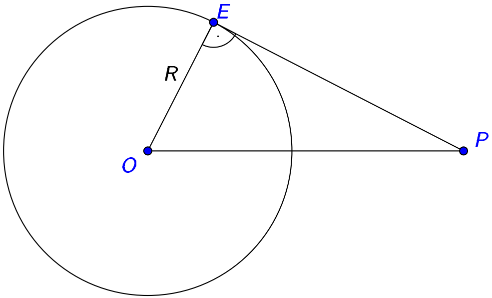
Mi az az inverzió?

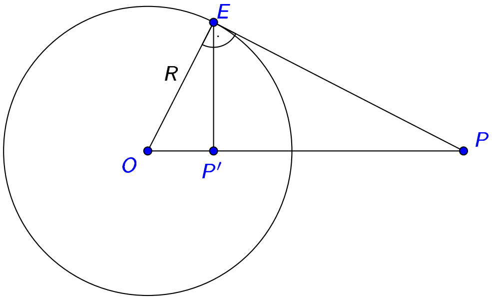
Definíció

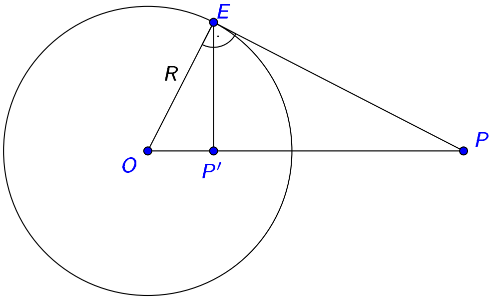
Adott a síkon egy O középpontú k kör R sugárral. Ekkor igaz, hogy tetszőleges P (ami nem O) inverze az OP félegyenesen az a P' pont amelyre igaz az az, hogy:

$$OP \cdot OP' = R^2$$

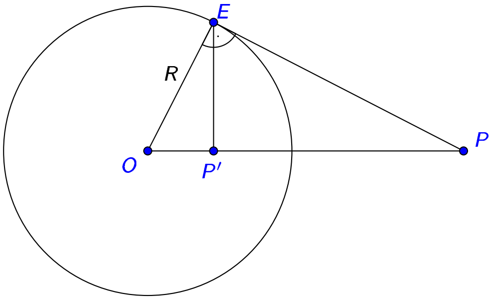

O
P


E
R
P
O


E
R
O
P'
P

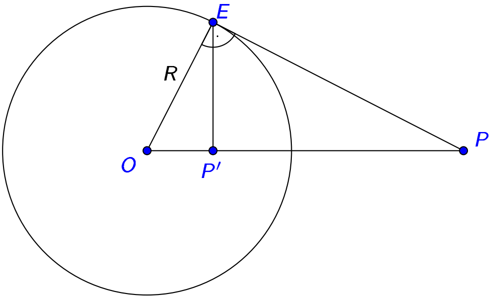


$$PEO_{\triangle} \sim EOP'_{\triangle}$$



$$PEO_\triangle \sim EOP'_\triangle$$

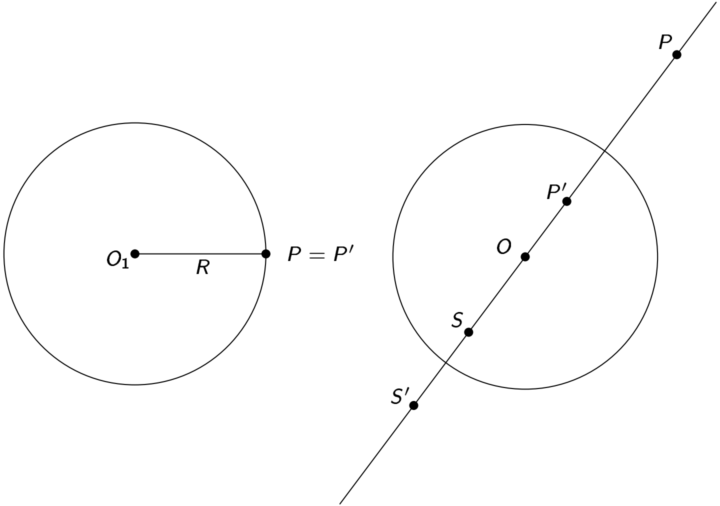
$$\frac{OP'}{R} = \frac{R}{OP}$$

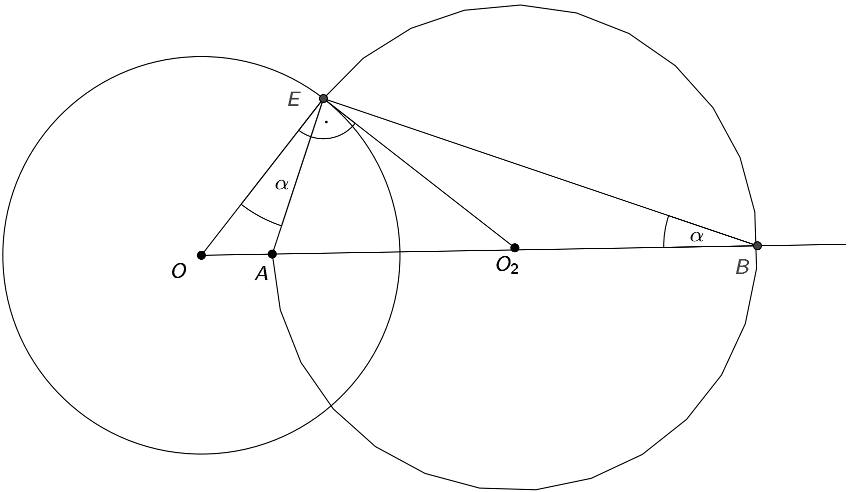


$$PEO_{\triangle} \sim EOP'_{\triangle}$$

$$\frac{OP'}{R} = \frac{R}{OP} \checkmark$$

Fix pontok és invariáns alakzatok





E
α
α
O
A
O2
B

Mi az az inverzió?

Tulajdonságok:

Mi az az inverzió?

Tulajdonságok:

- nem távolság tartó

Mi az az inverzió?

Tulajdonságok:

- nem távolság tartó
- irányításváltó

Mi az az inverzió?

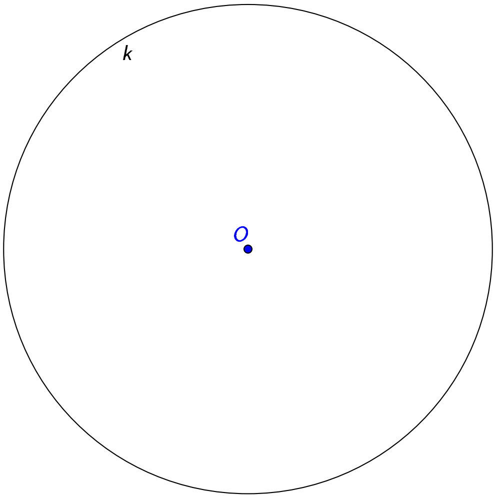
Tulajdonságok:

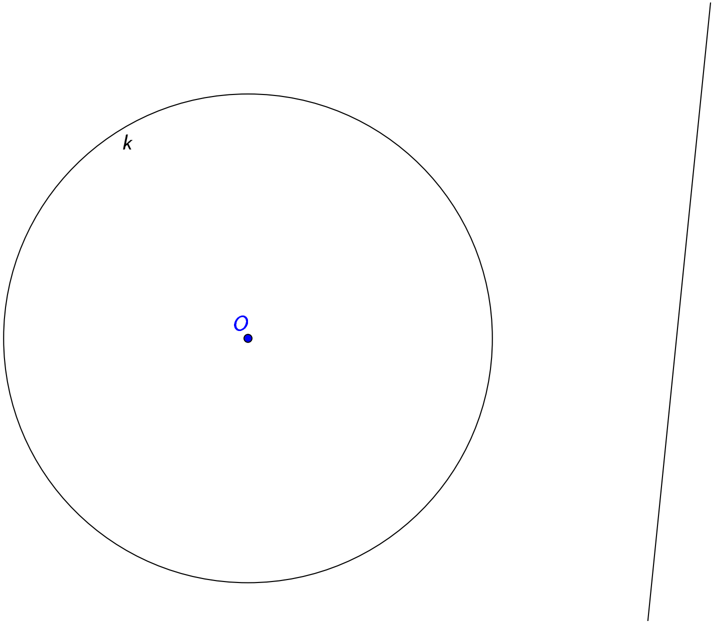
- nem távolság tartó
- irányításváltó
- szögtartó

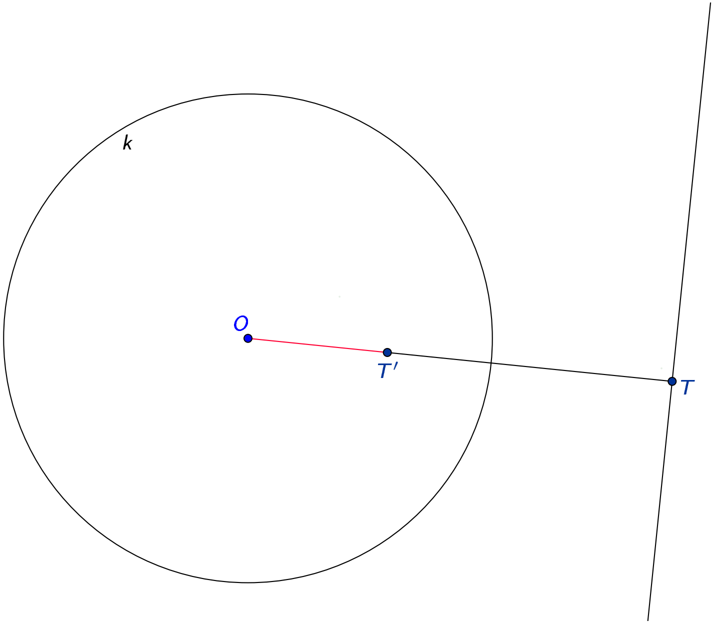
Mi az az inverzió?

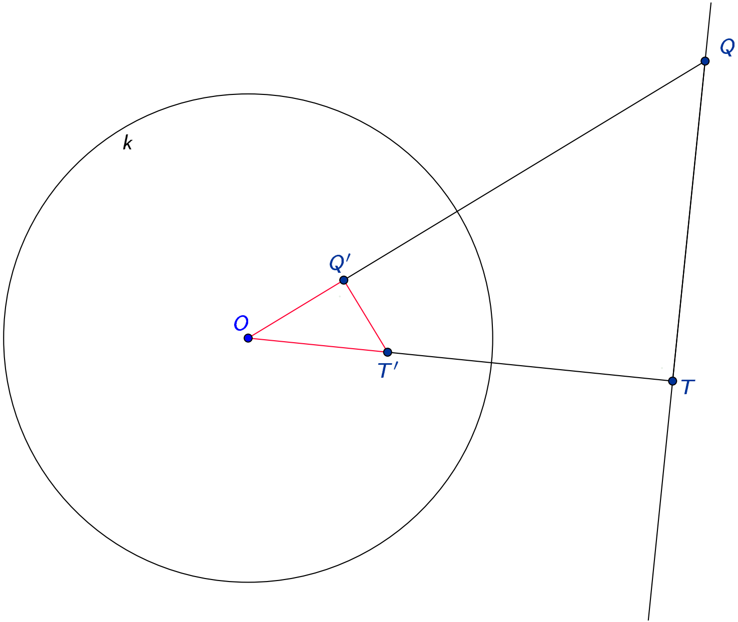
Tulajdonságok:

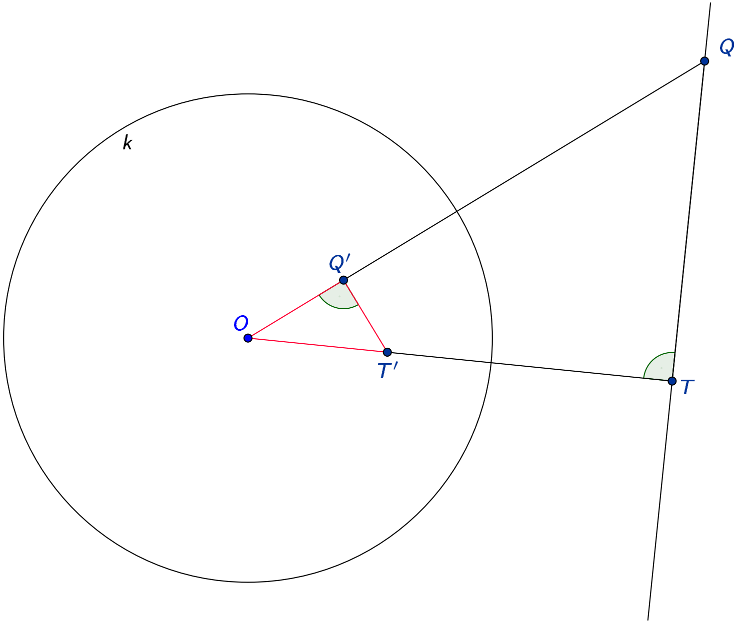
- nem távolság tartó
- irányításváltó
- szögtartó
- érintéstartó

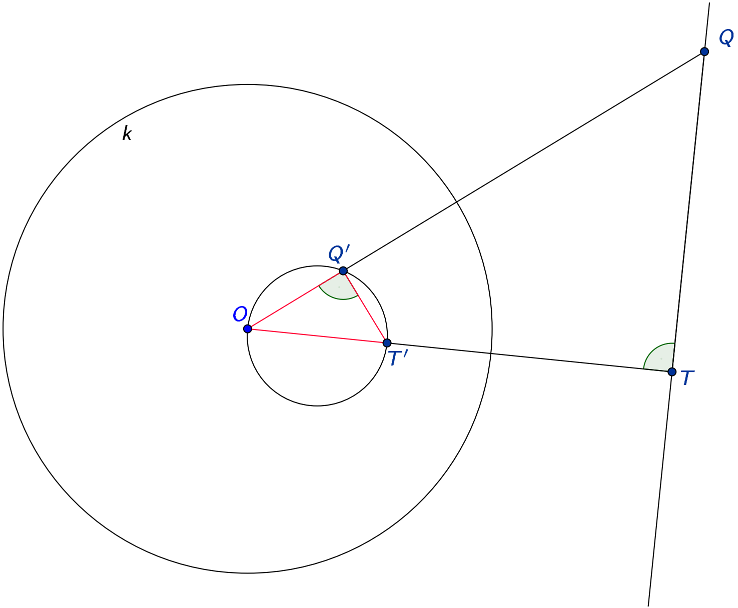

k
O

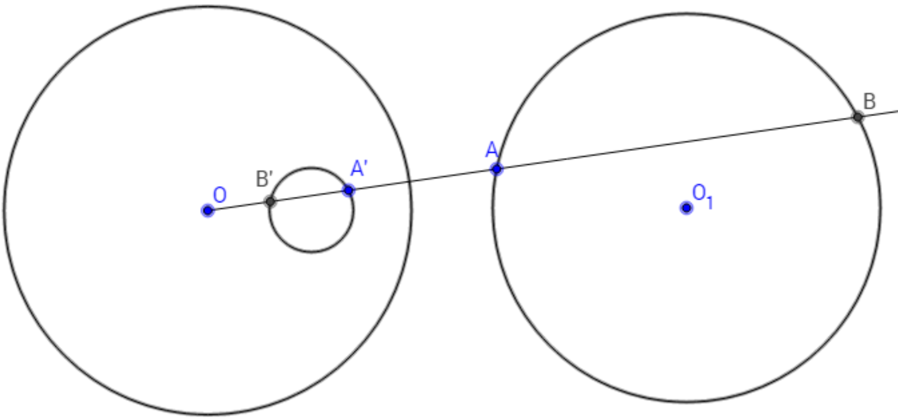

k
O

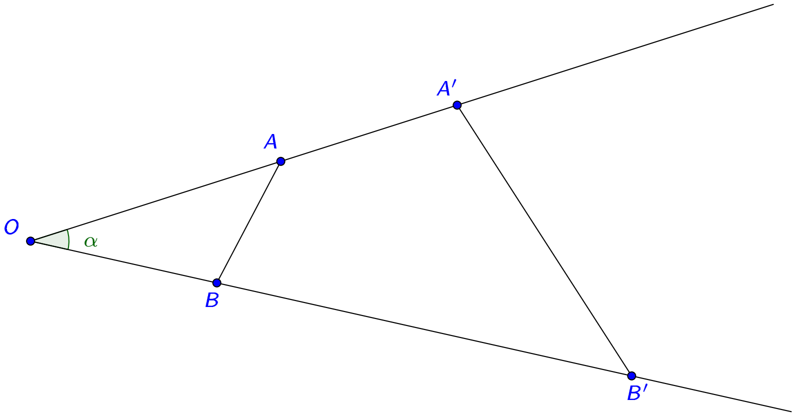

k
O
T′
T


Q
k
Q′
O
T′
T

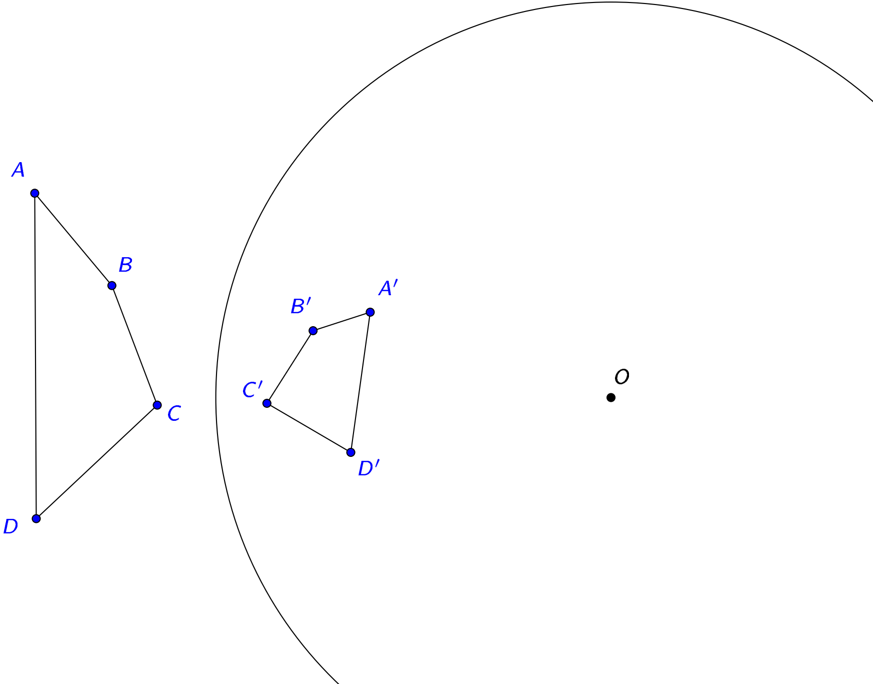

Q
k
Q′
O
T′
T


Q
k
Q′
O
T′
T


O
B′
A′
A
B
O1



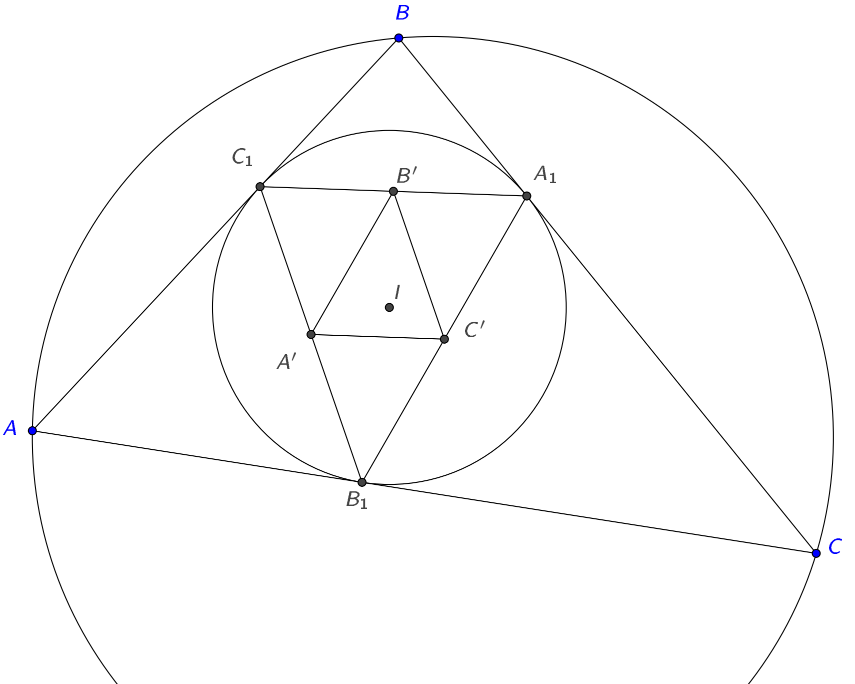
O
A
A′
B
B′
α

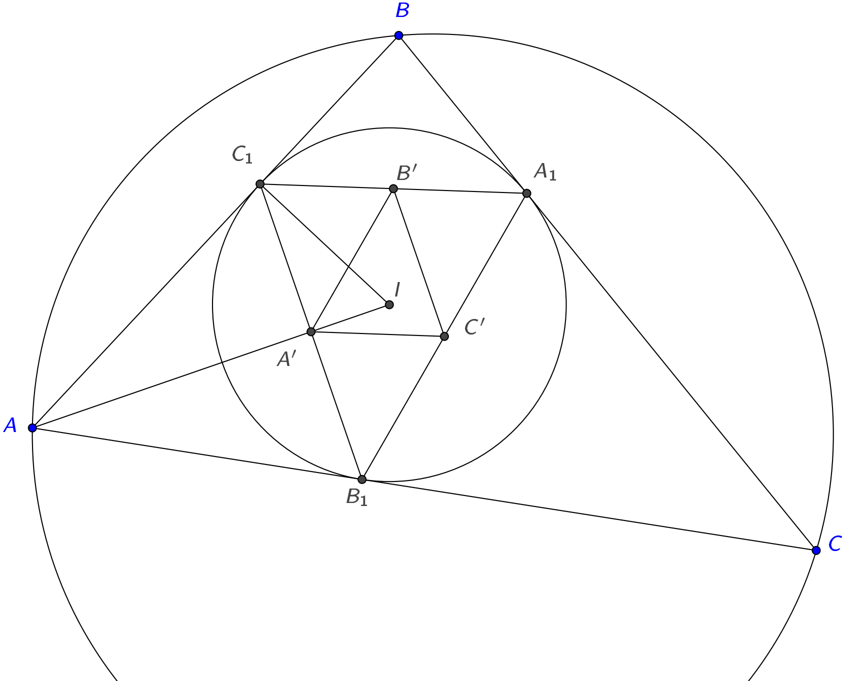

A
B
C
D
A′
B′
C′
D′
O

Az inverzió egy alkalmazása

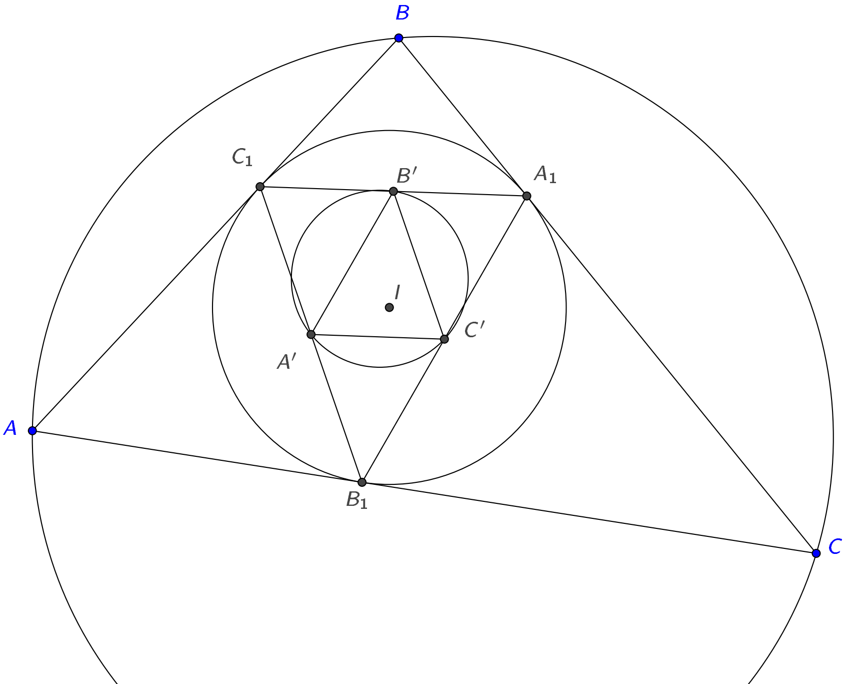
Feladat

Keressünk összefüggést egy $ABC_\triangle$ beírt kör középpontja és a köréírt kör középpontja közötti távolság és a körök sugarai között.


B
C1
B′
A1
I
C′
A′
A
B1
C



B
C1
B′
A1
I
C′
A′
A
B1
C


B
C1
B′
A1
I
C′
A′
A
B1
C

Mohr-Mascheroni féle szerkesztés

Tétel

Az euklideszi szerkesztéseket csak körzővel is meglehet szerkeszteni.

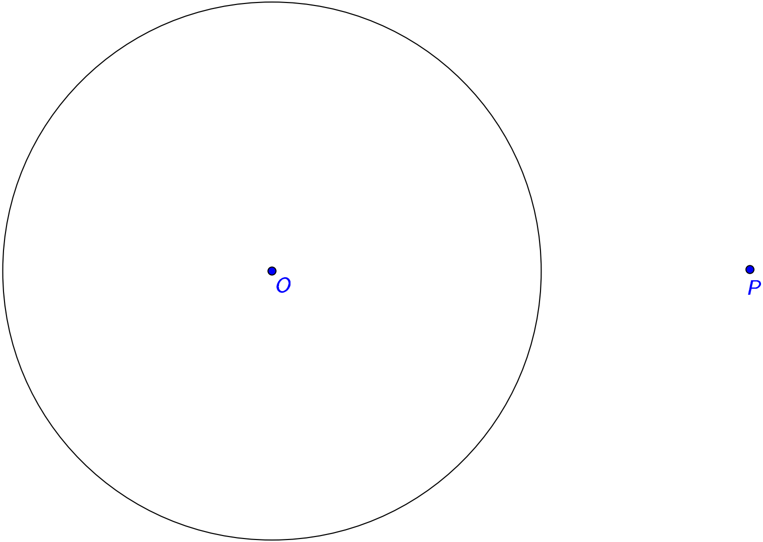
Az euklideszi szerkesztések

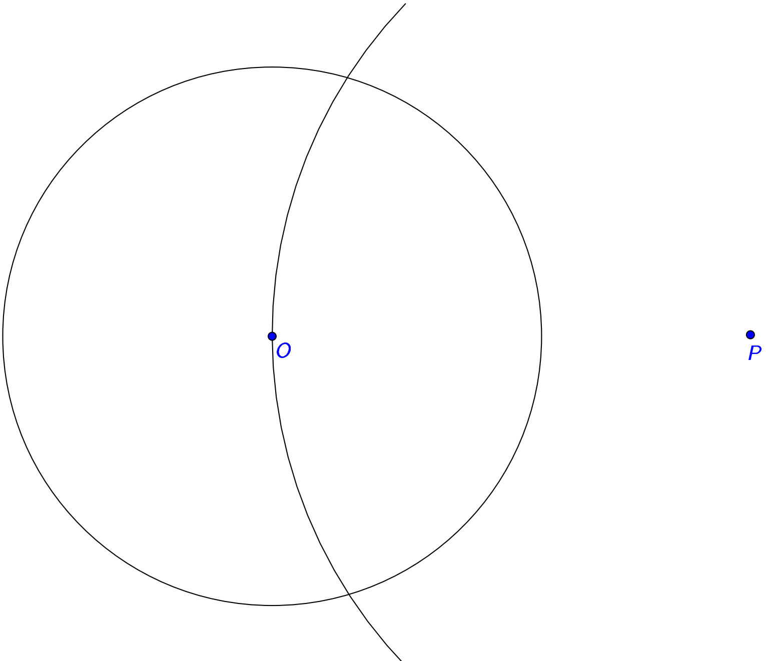
- Két egyenes metszéspontjának megszerkesztése
- Egy kör és egy egyenes metszéspontjának megszerkesztése
- Két kör metszéspontjának megszerkesztése

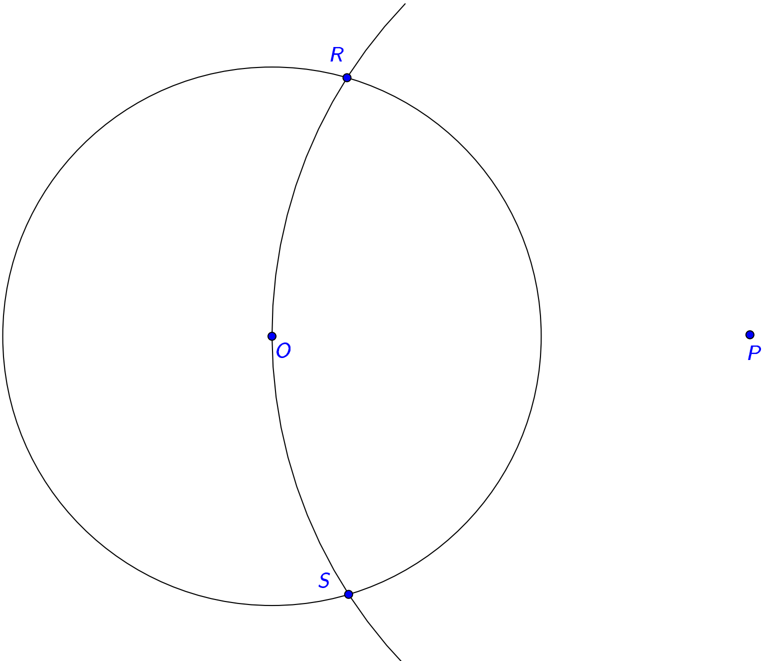
1. lemma

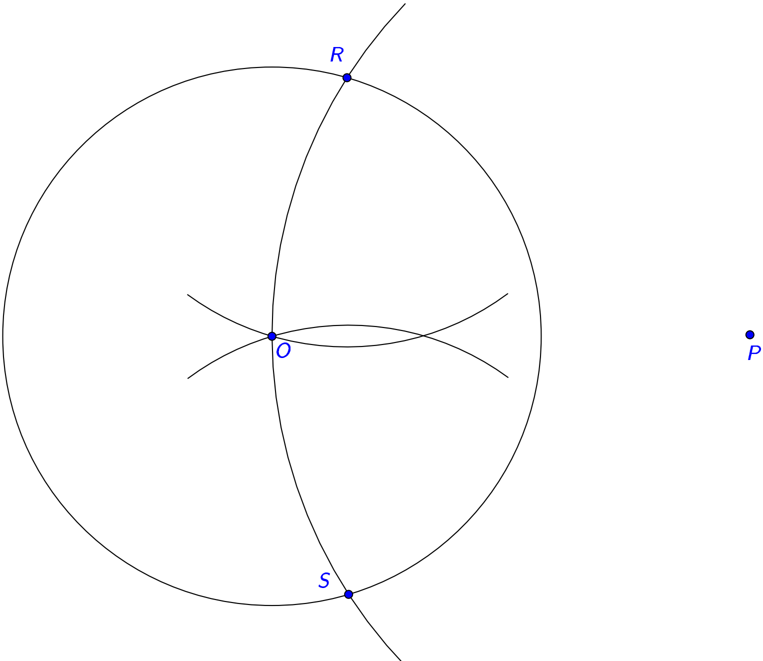
Ha adott az inverzió pólusa és az alapköre, akkor bármely pont inverze megszerkeszthető csak körzővel.

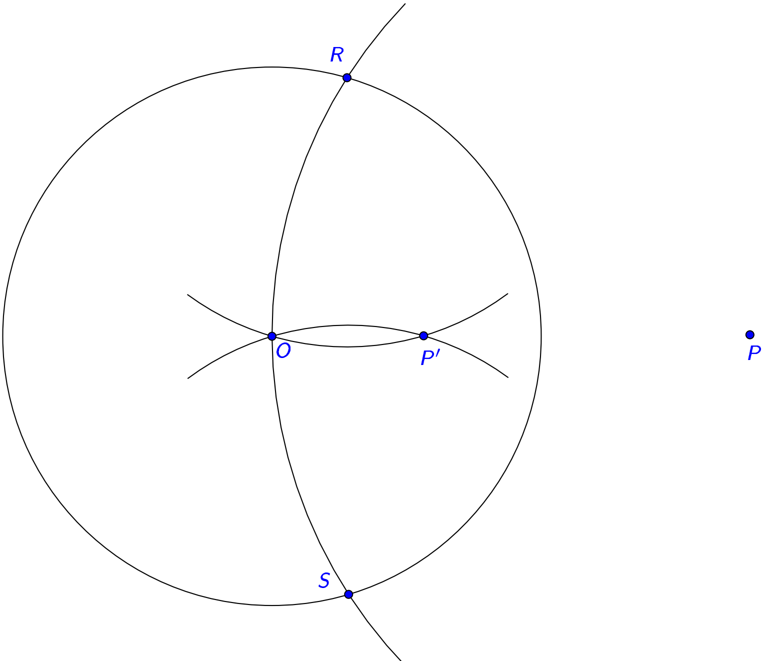
- $OP > \frac{r}{2}$
- $OP \leq \frac{r}{2}$


O
P

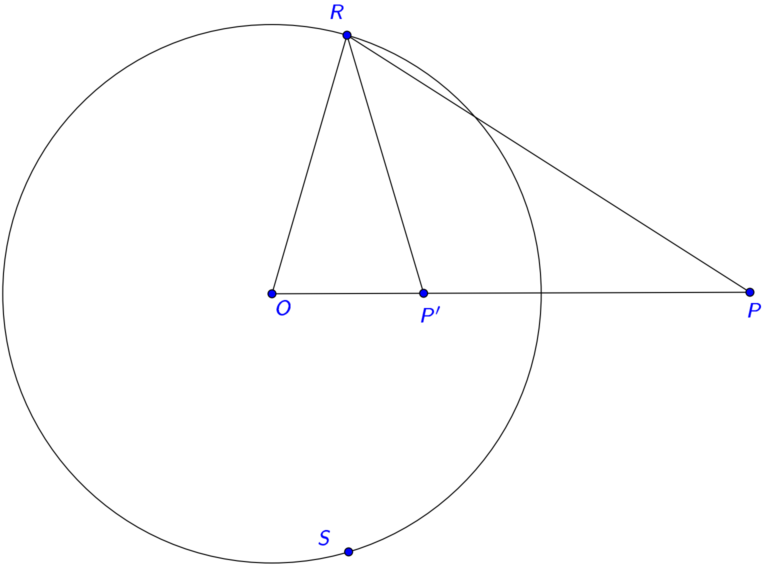

O
P


R
O
P
S


R
O
S
P

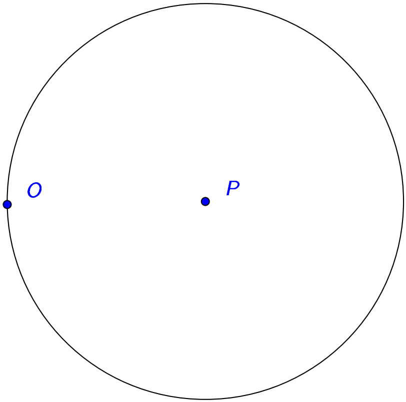


R
O
P′
P
S

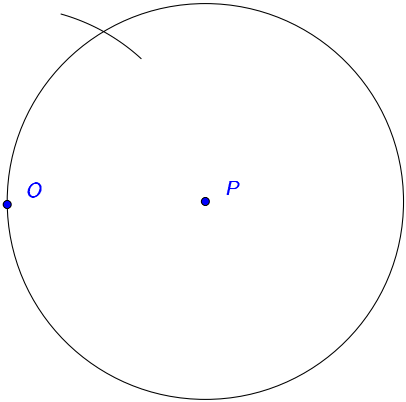

R
O
P′
P
S

Hogyan duplázunk szakaszt?

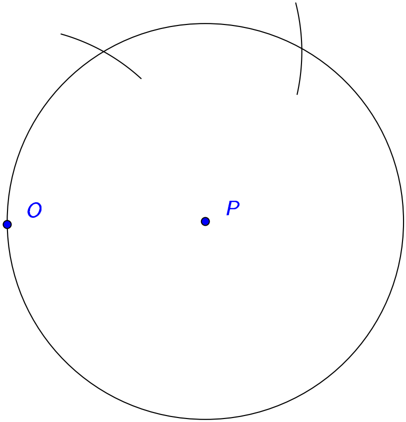
Hogyan duplázunk szakaszt?



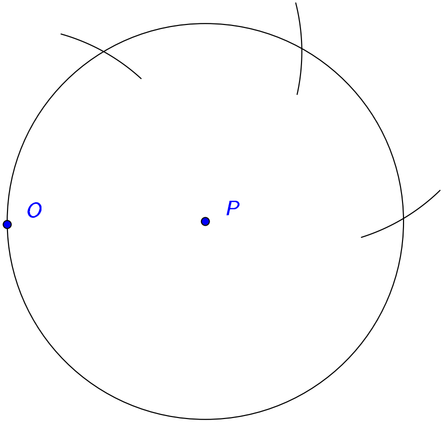
Hogyan duplázunk szakaszt?



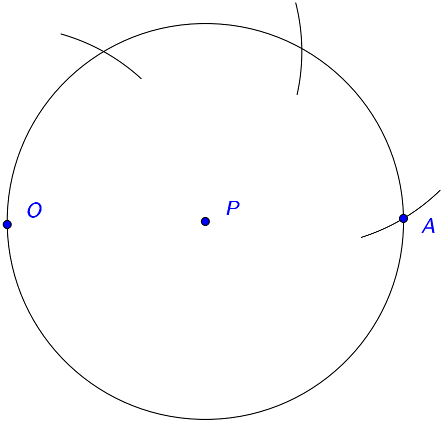
Hogyan duplázunk szakaszt?



Hogyan duplázunk szakaszt?



Hogyan duplázunk szakaszt?



$$ON = OP \cdot n > \frac{r}{2}$$

$$ON = OP \cdot n > \frac{r}{2}$$

$$ON \cdot ON' = r^2$$

$$ON = OP \cdot n > \frac{r}{2}$$

$$ON \cdot ON' = r^2$$

$r^2 = ON \cdot ON'$

$$ON = OP \cdot n > \frac{r}{2}$$

$$ON \cdot ON' = r^2$$

$$r^2 = ON \cdot ON' = OP \cdot OP'$$

$$ON = OP \cdot n > \frac{r}{2}$$

$$ON \cdot ON' = r^2$$

$$r^2 = ON \cdot ON' = OP \cdot OP' = n \cdot OP \cdot \frac{OP'}{n}$$

$$ON = OP \cdot n > \frac{r}{2}$$

$$ON \cdot ON' = r^2$$

$$r^2 = ON \cdot ON' = OP \cdot OP' = n \cdot OP \cdot \frac{OP'}{n}$$

$$OP' = ON' \cdot n$$

$$ON = OP \cdot n > \frac{r}{2}$$

$$ON \cdot ON' = r^2$$

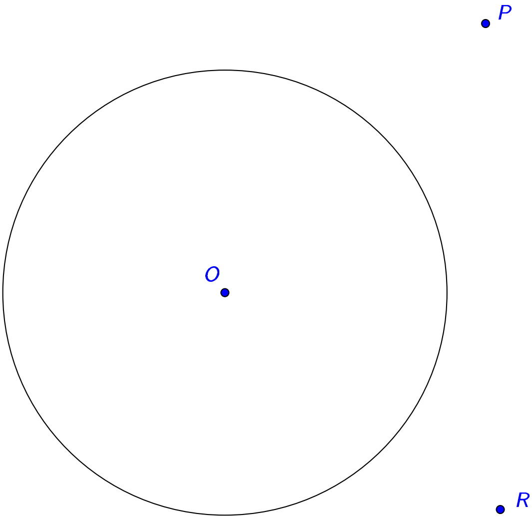
$$r^2 = ON \cdot ON' = OP \cdot OP' = n \cdot OP \cdot \frac{OP'}{n}$$

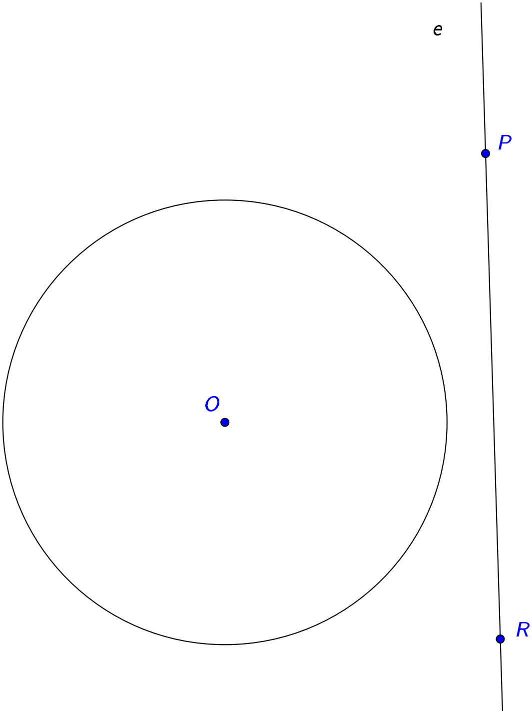
$$OP' = ON' \cdot n$$

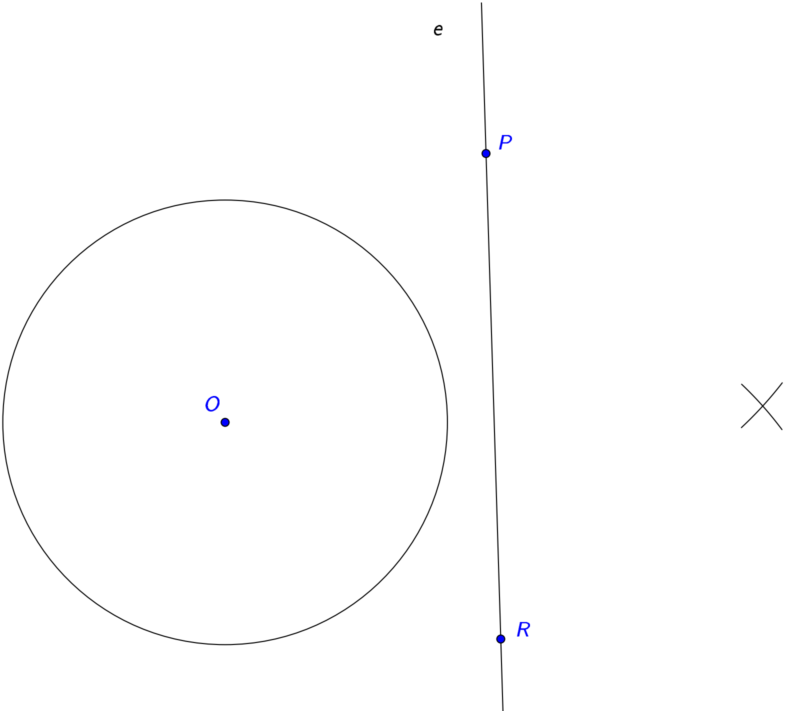
$\checkmark$

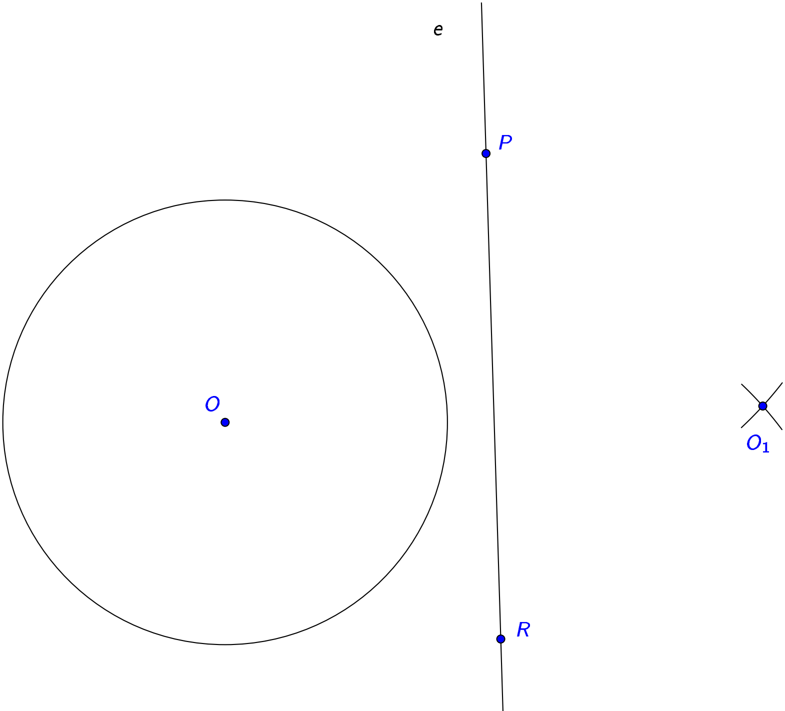
2. lemma

Ha adott az inverzió pólusa és köre, akkor bármely egyenes inverz képe megszerkeszthető csak körzővel, ami nem megy át a póluson

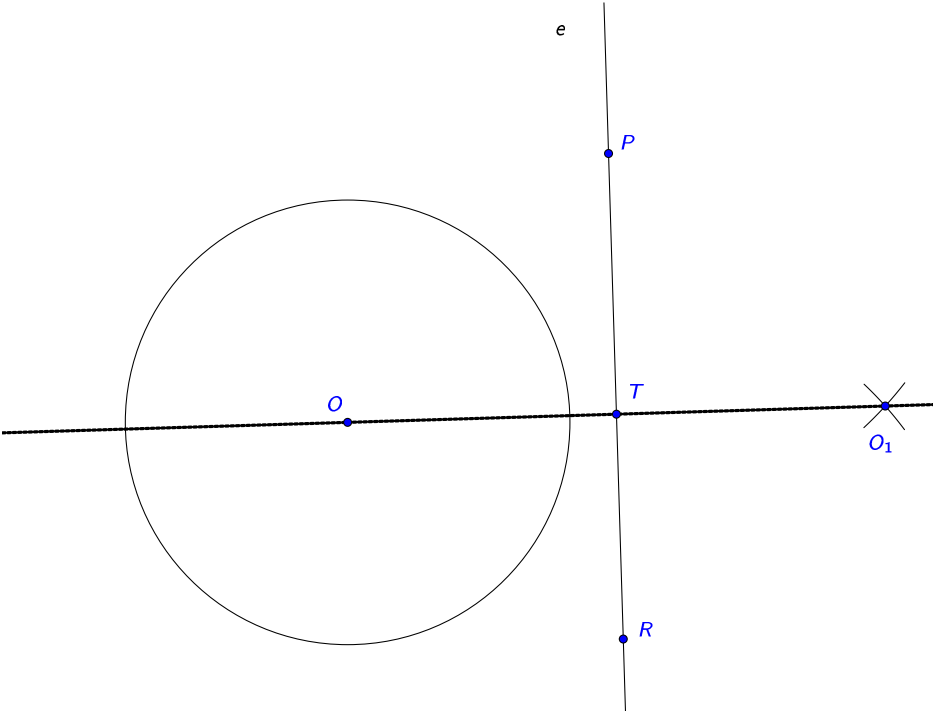

P
O
R


e
P
O
R

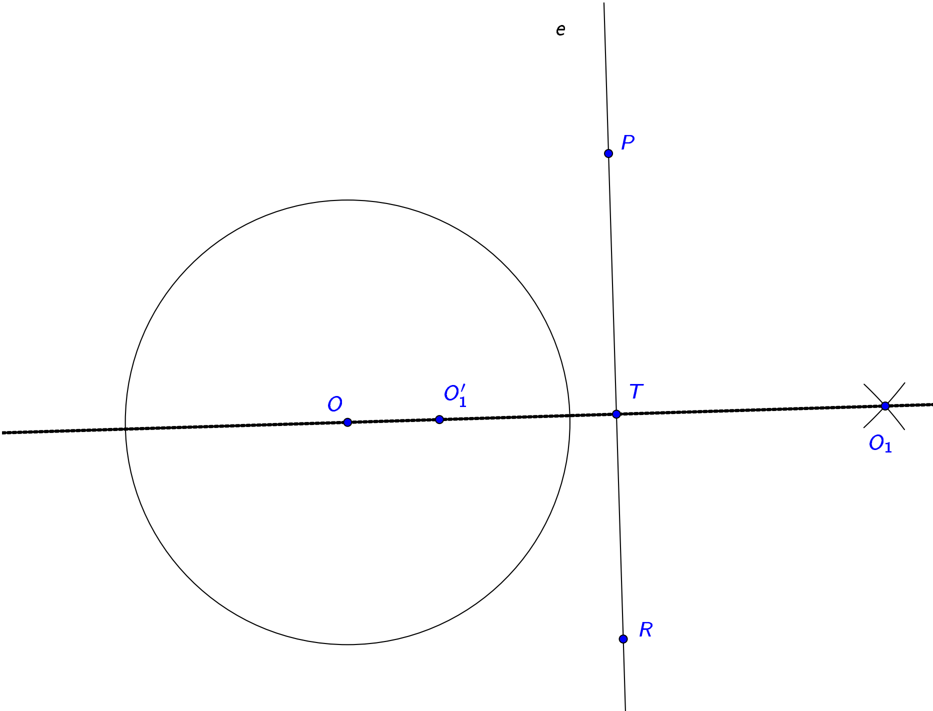

e
P
O
R



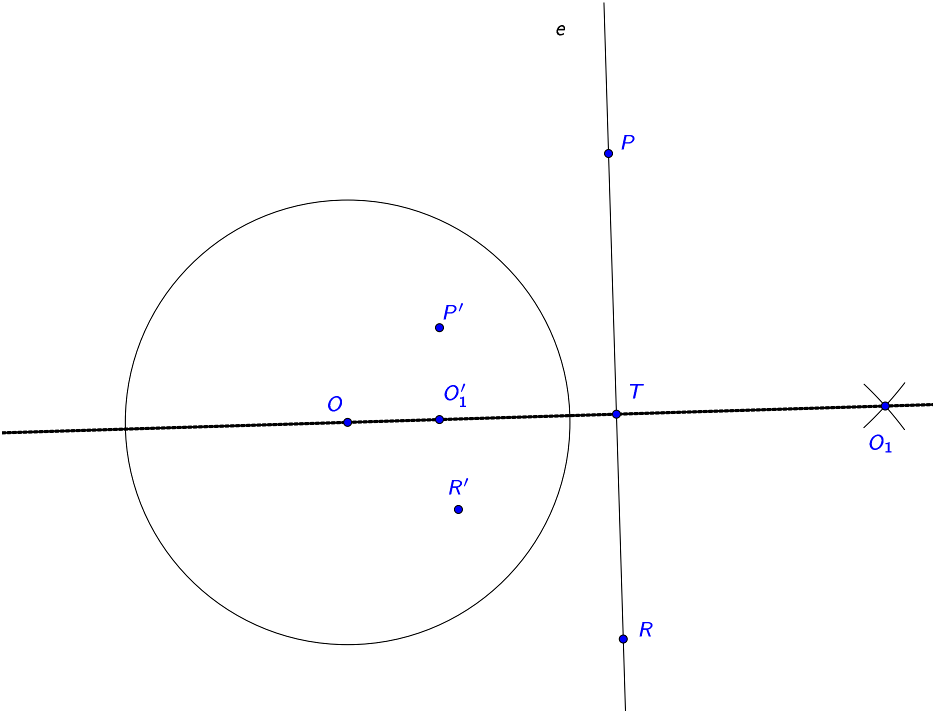
e
P
O
O_1
R



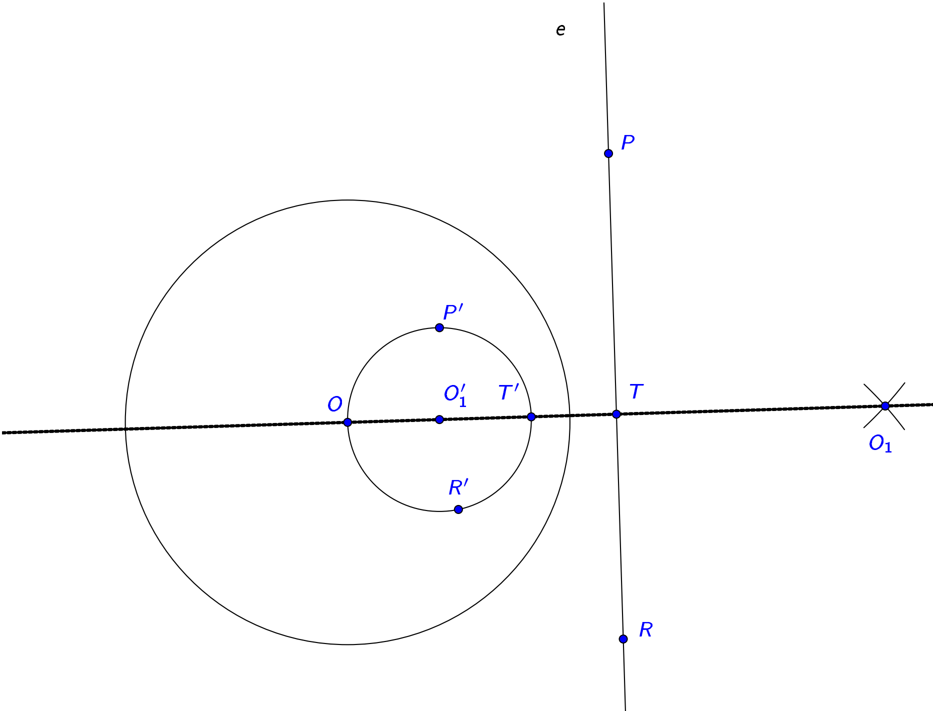
e
P
O
T
O_1
R

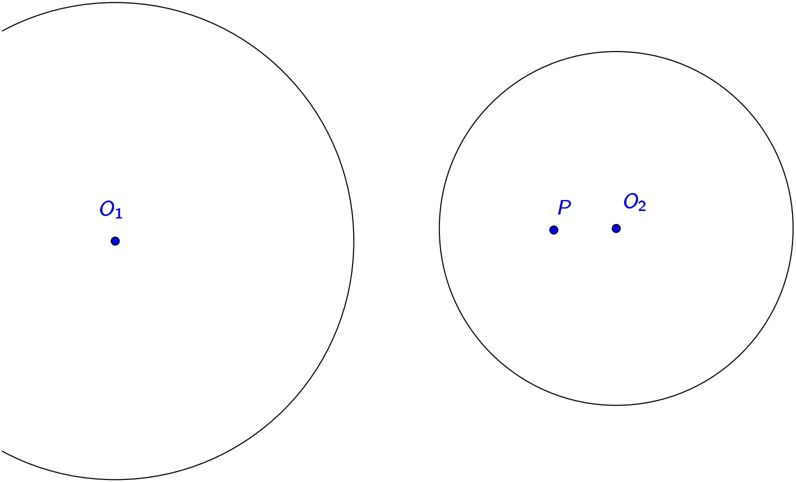


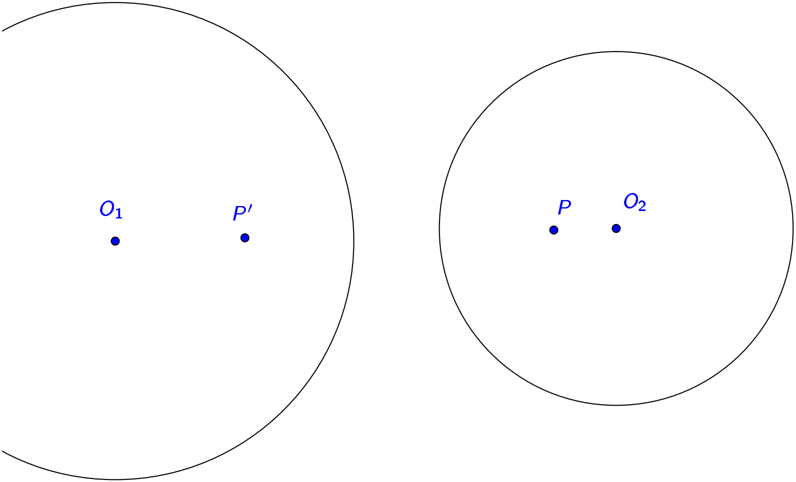
e
P
O
O_1'
T
O_1
R



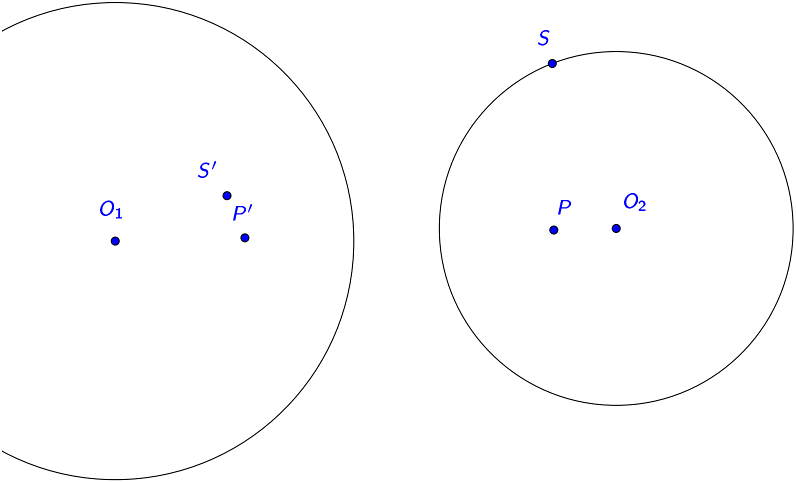
e
P
P'
O
O'_1
T
O_1
R'
R


e
P
P'
O
O'_1
T'
T
O_1
R'
R

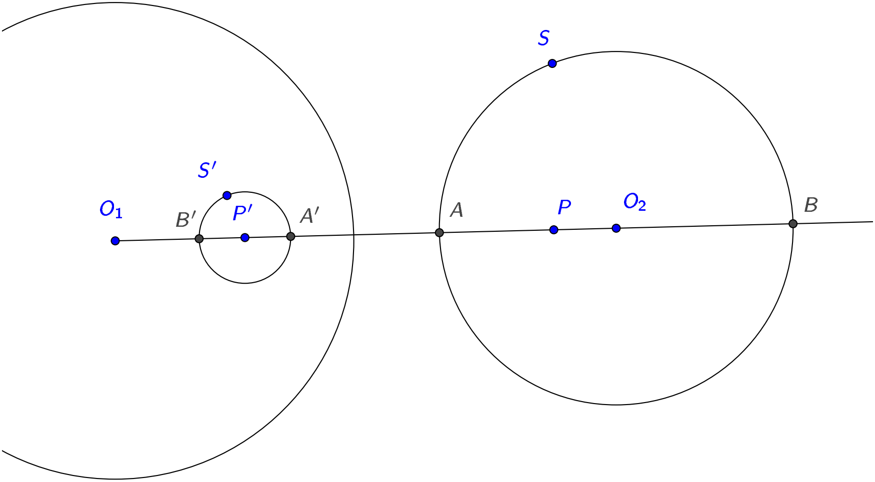

O_1
P
O_2



O_1
P'
P
O_2

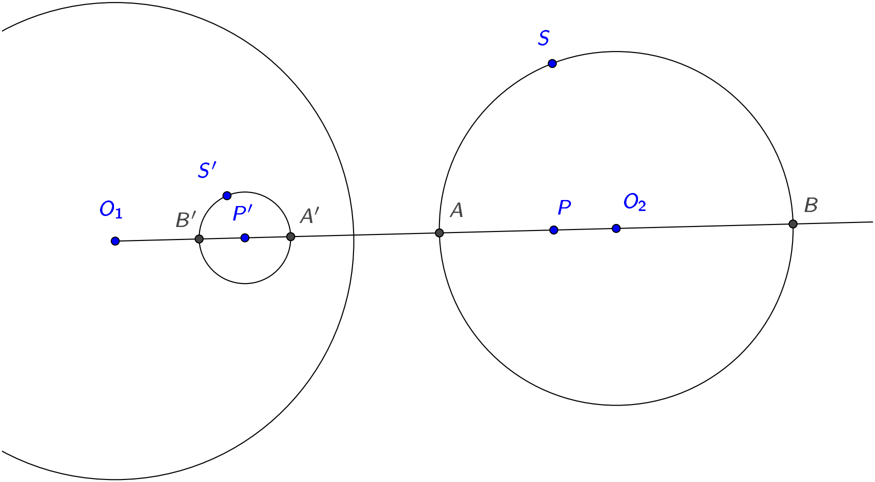


S
S'
O_1
P'
P
O_2



S
S′
O₁
B′
P′
A′
A
P
O₂
B

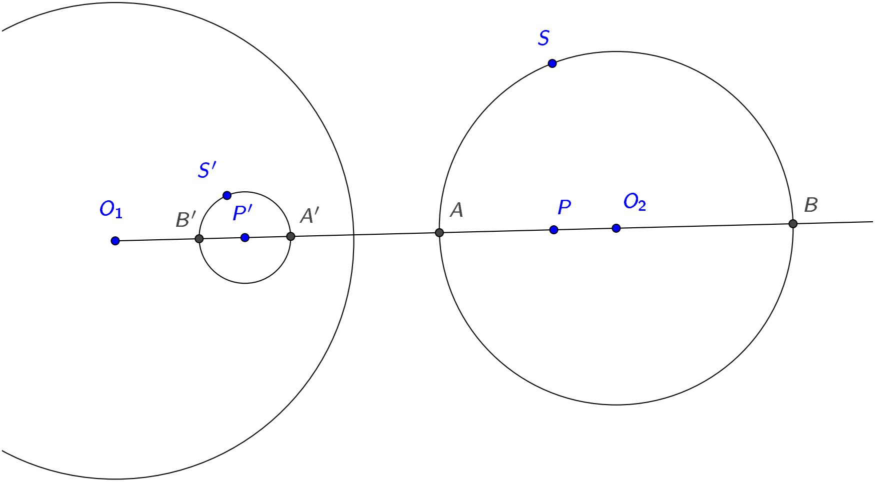
$$O_1O_2 \cdot PO_2 = r^2 \text{ és } O_1P' \cdot O_1P = R^2$$


S
S'
O1
B'
P'
A'
A
P
O2
B

$$O_1O_2 \cdot PO_2 = r^2 \text{ és } O_1P' \cdot O_1P = R^2$$

$$O_1P' \cdot O_1P = O_1A' \cdot (O_1O_2 - r)$$

$$O_1O_2 \cdot PO_2 = r^2 \text{ és } O_1P' \cdot O_1P = R^2$$
$$O_1P' \cdot O_1P = O_1A' \cdot (O_1O_2 - r) = O_1B' \cdot (O_1O_2 + r)$$


S
S′
O1
B′
P′
A′
A
P
O2
B

$$O_1O_2 \cdot PO_2 = r^2 \text{ és } O_1P' \cdot O_1P = R^2$$
$$O_1P' \cdot O_1P = O_1A' \cdot (O_1O_2 - r) = O_1B' \cdot (O_1O_2 + r)$$

$$O_1A' + O_1B' = \frac{R^2}{O_1O_2 - r} + \frac{R^2}{O_1O_2 + r} =$$

$$O_1O_2 \cdot PO_2 = r^2 \text{ és } O_1P' \cdot O_1P = R^2$$

$$O_1P' \cdot O_1P = O_1A' \cdot (O_1O_2 - r) = O_1B' \cdot (O_1O_2 + r)$$

$$O_1A' + O_1B' = \frac{R^2}{O_1O_2 - r} + \frac{R^2}{O_1O_2 + r} =$$

$$= \frac{2R^2}{O_1O_2 - PO_2}$$

$$O_1O_2 \cdot PO_2 = r^2 \text{ és } O_1P' \cdot O_1P = R^2$$
$$O_1P' \cdot O_1P = O_1A' \cdot (O_1O_2 - r) = O_1B' \cdot (O_1O_2 + r)$$

$$O_1A' + O_1B' = \frac{R^2}{O_1O_2 - r} + \frac{R^2}{O_1O_2 + r} =$$

$$= \frac{2R^2}{O_1O_2 - PO_2} = \frac{2R^2}{O_1P}$$

$$O_1O_2 \cdot PO_2 = r^2 \text{ és } O_1P' \cdot O_1P = R^2$$
$$O_1P' \cdot O_1P = O_1A' \cdot (O_1O_2 - r) = O_1B' \cdot (O_1O_2 + r)$$

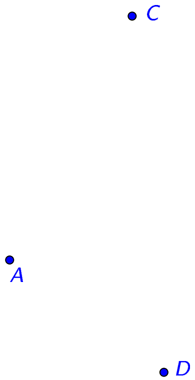
$$O_1A' + O_1B' = \frac{R^2}{O_1O_2 - r} + \frac{R^2}{O_1O_2 + r} =$$

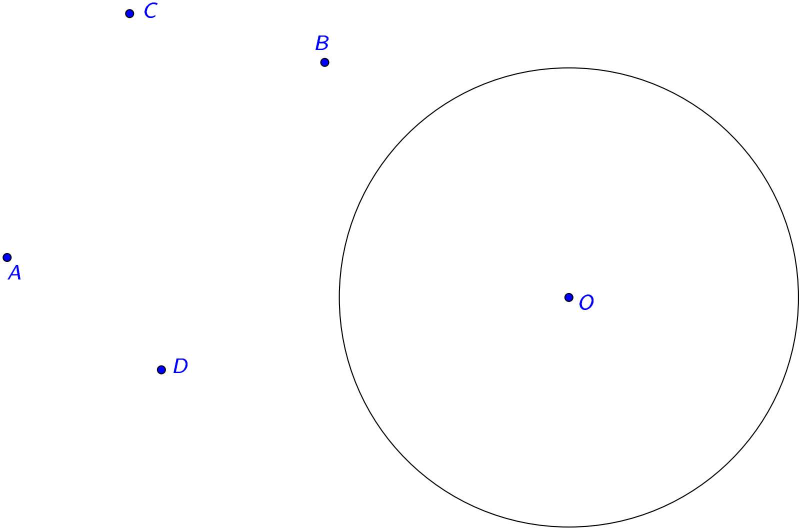
$$= \frac{2R^2}{O_1O_2 - PO_2} = \frac{2R^2}{O_1P} = \frac{2R^2}{\left(\frac{R^2}{O_1P'}\right)}$$

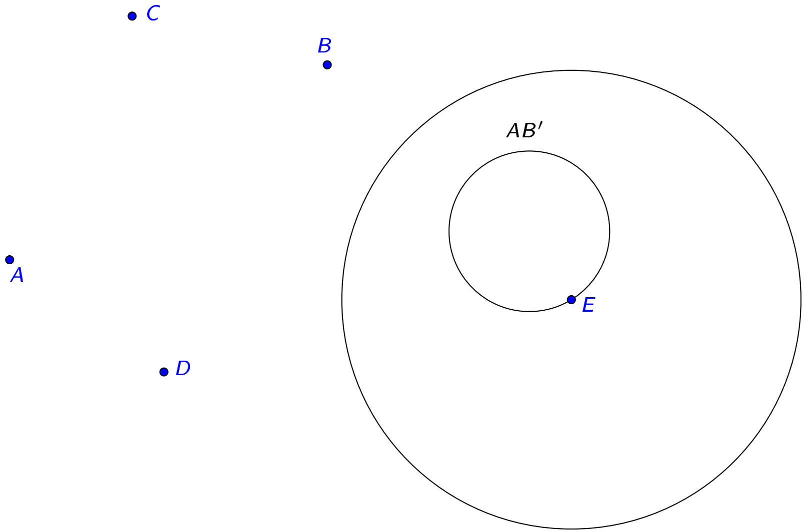
$$O_1O_2 \cdot PO_2 = r^2 \text{ és } O_1P' \cdot O_1P = R^2$$
$$O_1P' \cdot O_1P = O_1A' \cdot (O_1O_2 - r) = O_1B' \cdot (O_1O_2 + r)$$

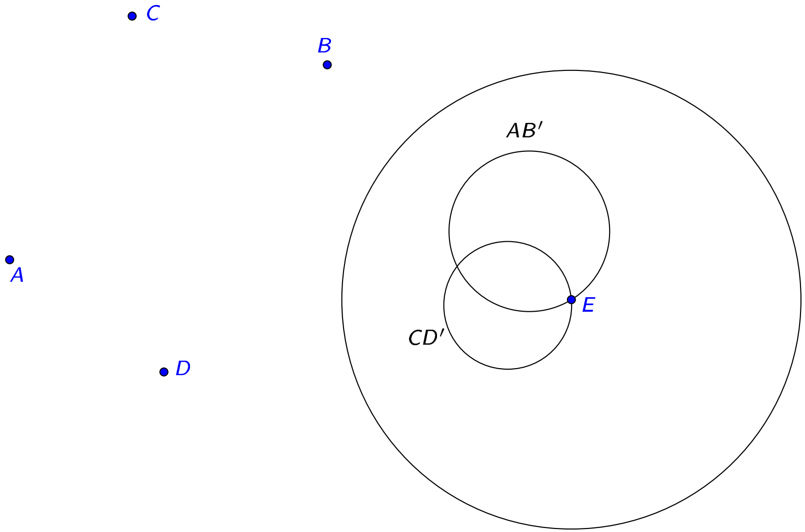
$$O_1A' + O_1B' = \frac{R^2}{O_1O_2 - r} + \frac{R^2}{O_1O_2 + r} =$$

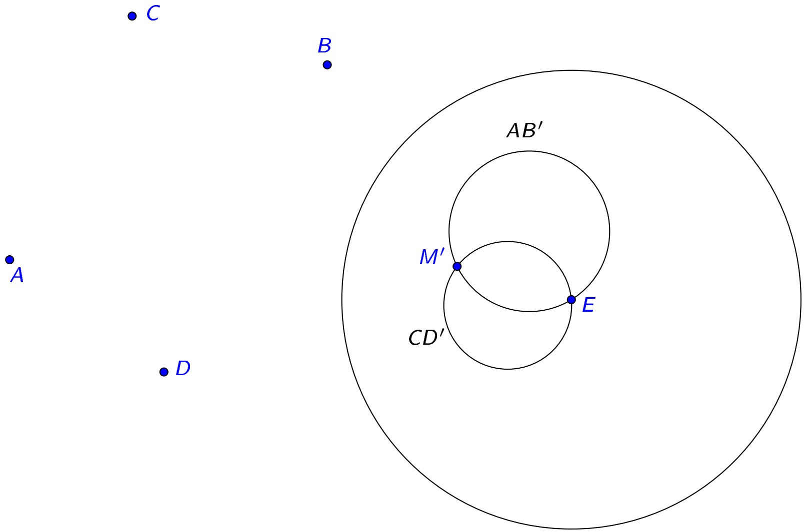
$$= \frac{2R^2}{O_1O_2 - PO_2} = \frac{2R^2}{O_1P} = \frac{2R^2}{\left(\frac{R^2}{O_1P'}\right)} = 2O_1P'$$

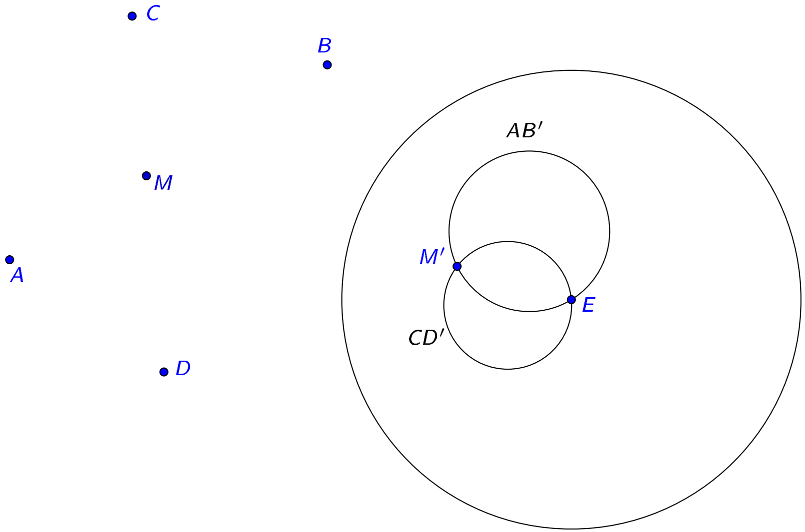

C
B
A
D

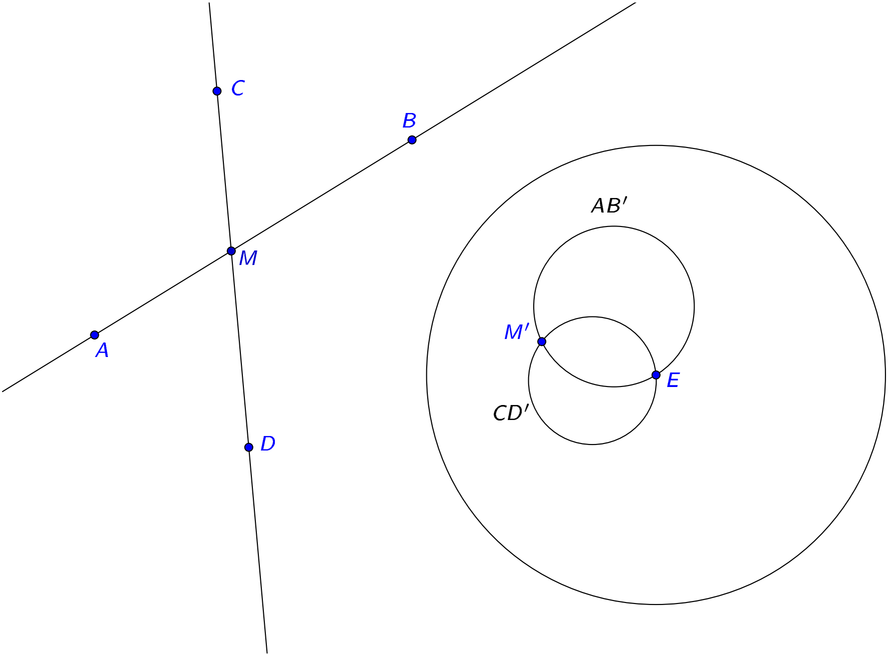

C
B
A
O
D


C
B
AB′
A
E
D


C
B
A
D
AB′
CD′
E


C
B
A
D
AB′
M′
E
CD′


C
B
AB′
M
M′
A
E
CD′
D

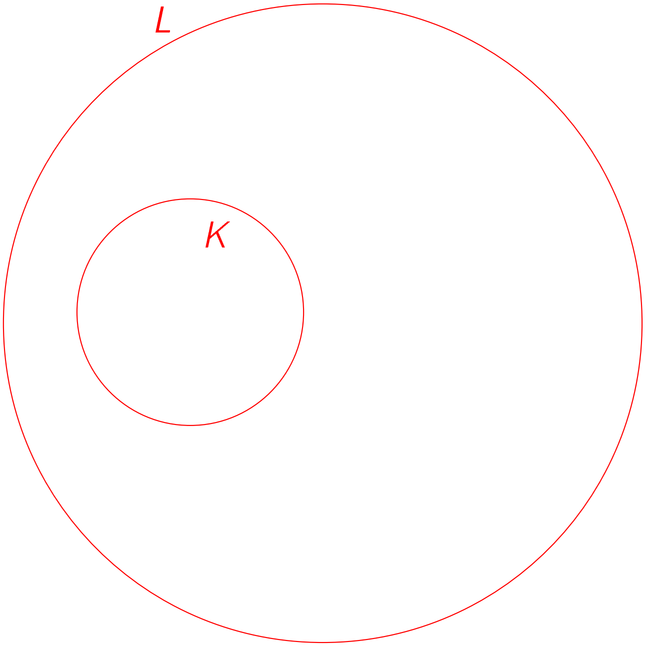


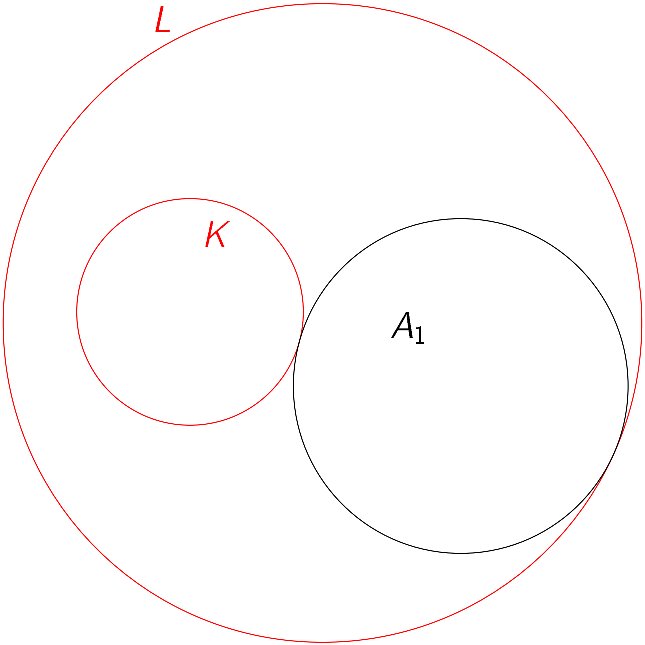
C
B
AB'
M
M'
A
E
CD'
D

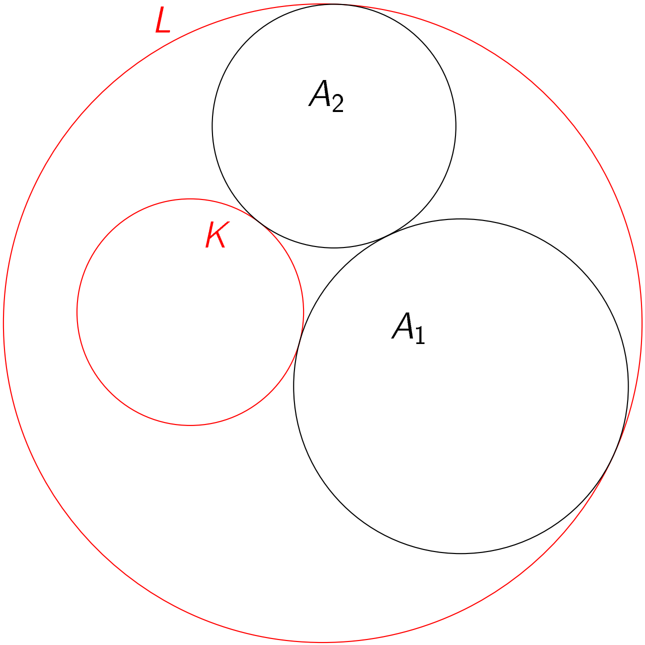
Steiner poriszmája

Állítás

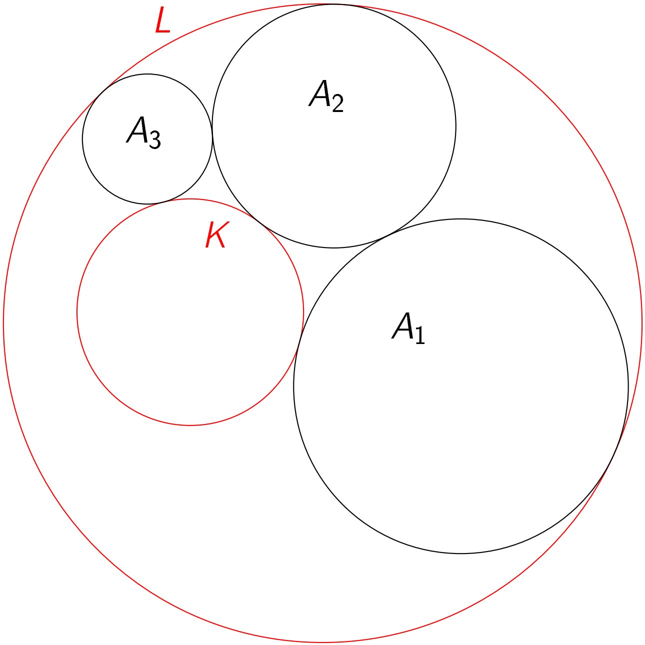
Van 2 körünk, k és l, amelyekből l tartalmazza k-t. Felveszünk egy A_1 kört ami érinti k-t és l-et. Ezután felveszünk egy A_2 kört ami érinti A_1-et, k-t és l-et...végül fölvesszük A_n-et úgy, hogy érintse A_{n-1}-et, k-t és l-et. Bizonyítandó, hogyha van olyan a feltételeknek megfelelő A_1;A_2...A_n körhalmaz, amire A_n érinti A_1-et, akkor ez tetszőleges A_1-re igaz.


L
K

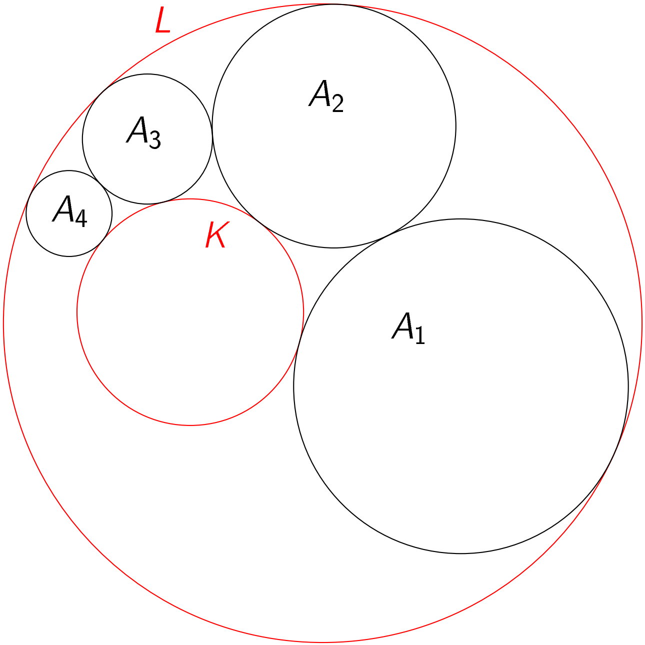

L
K
A_1

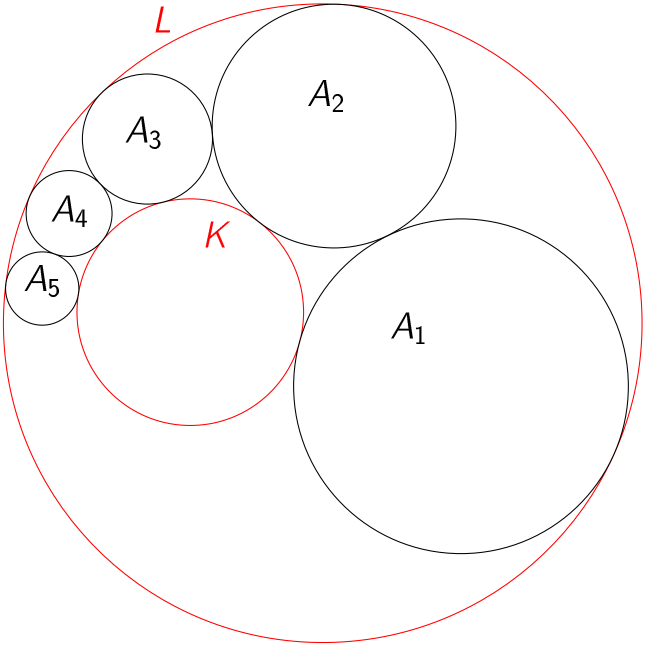


L
A_2
K
A_1

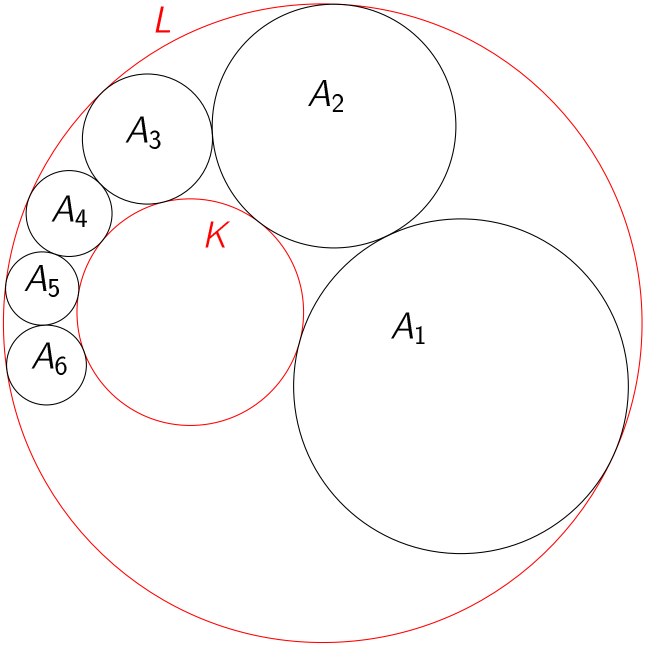


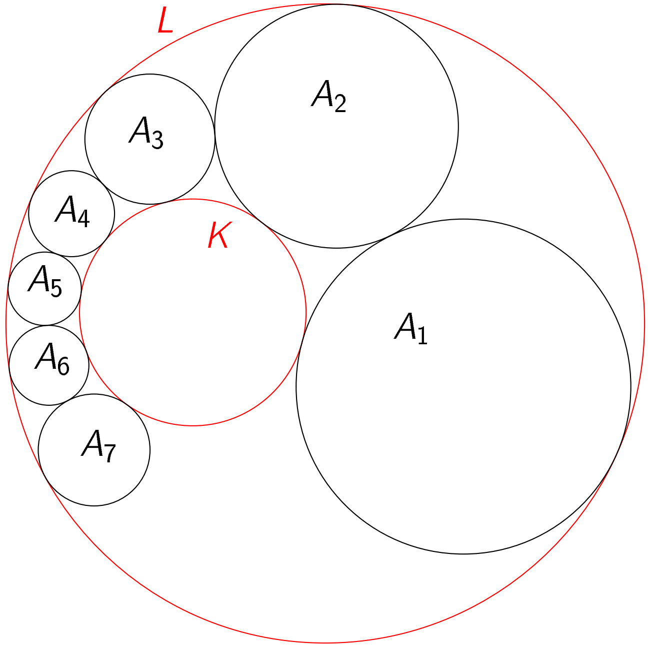
L
A2
A3
K
A1

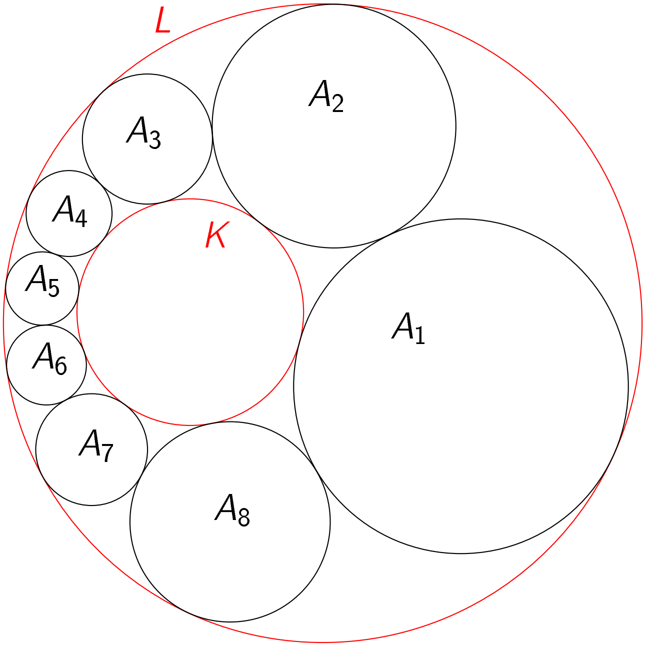

L
A2
A3
A4
K
A1



L
A2
A3
A4
K
A5
A1


L
A_2
A_3
A_4
K
A_5
A_1
A_6


L
A2
A3
A4
K
A5
A1
A6
A7


L
A2
A3
A4
K
A5
A1
A6
A7
A8

Egy lemma

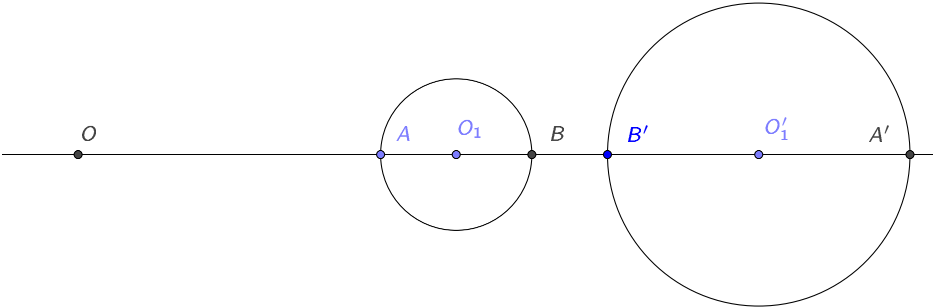
Lemma

Tetszőleges két egymást nem metsző körhöz létezik olyan inverzió, ami koncentrikus körökbe invertálja őket.

Bizonyítás

Meghatározzuk az(oka)t a kör(öke)t
(O középpont és R sugár), ami(k) a két kört koncentrikus körökbe invertálják.

Bizonyítás



Bizonyítás

Tehát $OO_1' = \frac{OO_1 R^2}{OO_1^2 - r_1^2}$

Bizonyítás

Tehát $OO_1' = \frac{OO_1 R^2}{OO_1^2 - r_1^2}$

Bizonyítás

Tehát $OO_1' = \frac{OO_1 R^2}{OO_1^2 - r_1^2}$

ugyanígy $OO_2' = \frac{OO_2 R^2}{OO_2^2 - r_2^2}$

Bizonyítás

Tehát $OO_1' = \frac{OO_1 R^2}{OO_1^2 - r_1^2}$

ugyanígy $OO_2' = \frac{OO_2 R^2}{OO_2^2 - r_2^2}$

tehát $\frac{OO_1 R^2}{OO_1^2 - r_1^2} - \frac{OO_2 R^2}{OO_2^2 - r_2^2} = 0$

$$OO_1(OO_2^2 - r_2^2) - OO_2(OO_1^2 - r_1^2) = 0$$

$$OO_1(OO_2^2 - r_2^2) - OO_2(OO_1^2 - r_1^2) = 0$$

$$OO_1 OO_2^2 - OO_1 r_2^2 - OO_2 OO_1^2 + OO_2 r_1^2 = 0$$

$$OO_1(OO_2^2 - r_2^2) - OO_2(OO_1^2 - r_1^2) = 0$$

$$OO_1 OO_2^2 - OO_1 r_2^2 - OO_2 OO_1^2 + OO_2 r_1^2 = 0$$

$$OO_1 OO_2(OO_2 - OO_1) + OO_2 r_1^2 - OO_1 r_2^2 = 0$$

$$OO_1(OO_2^2 - r_2^2) - OO_2(OO_1^2 - r_1^2) = 0$$

$$OO_1 OO_2^2 - OO_1 r_2^2 - OO_2 OO_1^2 + OO_2 r_1^2 = 0$$

$$OO_1 OO_2(OO_2 - OO_1) + OO_2 r_1^2 - OO_1 r_2^2 = 0$$

$$OO_1(OO_1 + O_1 O_2) O_1 O_2 + OO_1(r_1^2 - r_2^2) + O_1 O_2 r_1^2 = 0$$

$$OO_1(OO_2^2 - r_2^2) - OO_2(OO_1^2 - r_1^2) = 0$$

$$OO_1 OO_2^2 - OO_1 r_2^2 - OO_2 OO_1^2 + OO_2 r_1^2 = 0$$

$$OO_1 OO_2(OO_2 - OO_1) + OO_2 r_1^2 - OO_1 r_2^2 = 0$$

$$OO_1(OO_1 + O_1O_2)O_1O_2 + OO_1(r_1^2 - r_2^2) + O_1O_2 r_1^2 = 0$$

legyen $O_1O_2 = d$ és $OO_1 = a$.

$$OO_1(OO_2^2 - r_2^2) - OO_2(OO_1^2 - r_1^2) = 0$$

$$OO_1 OO_2^2 - OO_1 r_2^2 - OO_2 OO_1^2 + OO_2 r_1^2 = 0$$

$$OO_1 OO_2(OO_2 - OO_1) + OO_2 r_1^2 - OO_1 r_2^2 = 0$$

$$OO_1(OO_1 + O_1O_2)O_1O_2 + OO_1(r_1^2 - r_2^2) + O_1O_2 r_1^2 = 0$$

legyen $O_1O_2 = d$ és $OO_1 = a$.

$$a^2 d + a(d^2 + r_1^2 - r_2^2) + dr_1^2 = 0$$

$$OO_1(OO_2^2 - r_2^2) - OO_2(OO_1^2 - r_1^2) = 0$$

$$OO_1 OO_2^2 - OO_1 r_2^2 - OO_2 OO_1^2 + OO_2 r_1^2 = 0$$

$$OO_1 OO_2(OO_2 - OO_1) + OO_2 r_1^2 - OO_1 r_2^2 = 0$$

$$OO_1(OO_1 + O_1 O_2) O_1 O_2 + OO_1(r_1^2 - r_2^2) + O_1 O_2 r_1^2 = 0$$

legyen $O_1 O_2 = d$ és $OO_1 = a$.

$$a^2 d + a(d^2 + r_1^2 - r_2^2) + d r_1^2 = 0$$

$$a = \frac{(d^2 + r_1^2 - r_2^2) \pm \sqrt{(d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4 d^2 r_1^2}}{2d}$$

Mikor nincs megoldás?

$$\frac{(d^2 + r_1^2 - r_2^2) \pm \sqrt{(d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4d^2 r_1^2}}{2d}$$

Mikor nincs megoldás?

$$\frac{(d^2 + r_1^2 - r_2^2) \pm \sqrt{(d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4d^2 r_1^2}}{2d}$$

ha $d = 0 \implies O_1 = O_2 = O$ megoldás

Mikor nincs megoldás?

$$\frac{(d^2 + r_1^2 - r_2^2) \pm \sqrt{(d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4d^2 r_1^2}}{2d}$$

ha $d = 0 \implies O_1 = O_2 = O$ megoldás
ha $(d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4d^2 r_1^2 < 0$

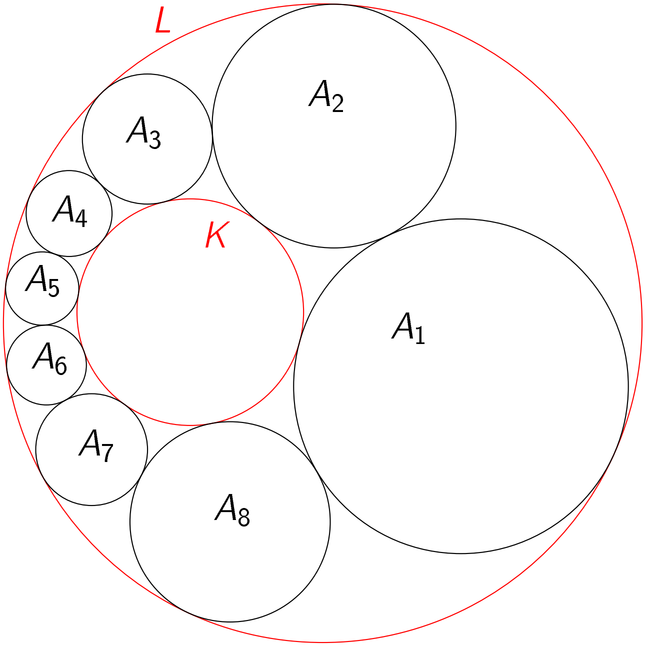
Mikor nincs megoldás?

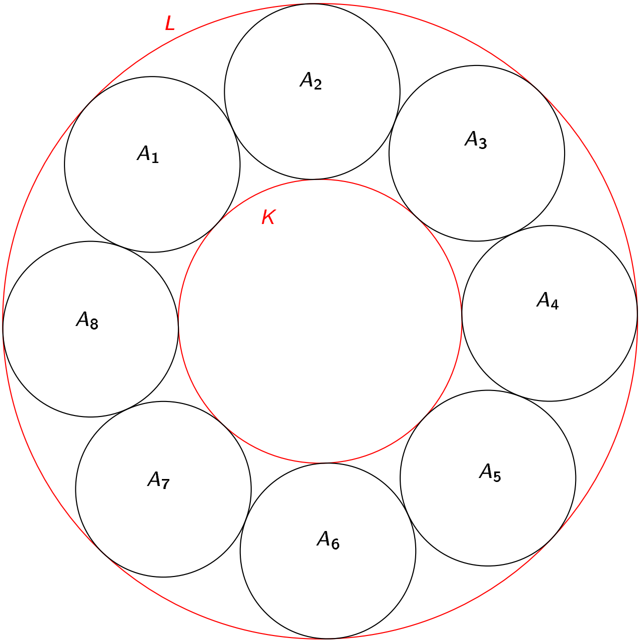
$$\frac{(d^2 + r_1^2 - r_2^2) \pm \sqrt{(d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4d^2 r_1^2}}{2d}$$

ha $d = 0 \implies O_1 = O_2 = O$ megoldás

ha $(d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4d^2 r_1^2 < 0$

$$|d^2 + r_1^2 - r_2^2| < |2dr_1|$$


L
A2
A3
A4
K
A5
A1
A6
A7
A8


L
K
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8

Az inverzor

- Charles-Nicolas Peaucellier katonatiszt 1864-ben felfedezte

Az inverzor

- Charles-Nicolas Peaucellier katonatiszt 1864-ben felfedezte
- Lipmann I. Lipkin litván matematikus és feltaláló 1873-ban tõle függetlenül felfedezte

Bizonyítás

Szép ábra :)

- 1874: Harry Hart
- a Woolwich Academy-n matematika professzor volt

Bizonyítás

Még egy szép ábra :)

A csoport

- Balla Péter
- Bencze Tamás
- Bertalan Dávid
- Galovics Gábor
- Hülvely Alina
- Józsa Richárd
- Kovács Áron
- Mályusz Attila
- Selmeci András

Forrás

Vladimir Dubrovsky: Inversion
Maczkó Renáta szakdolgozata ELTE TTK 2010
Köszönjük Simon Petyának a segítséget

Köszönjük a figyelmet!