Gál Györgyné: Irracionális számok

Források

Kosztolányi József - Makay Géza - Pintér Klára - Pintér Lajos: Matematikai problémakalauz I.

Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből

KöMaL, ADMV és OKTV feladatok

Feladatok

1. Mit nevezünk irracionális számnak?

   Megoldás: Két egész szám hányadosaként nem felírható számokat. Az ókori görögök már találkoztak vele. Ilyen az egységnyi oldalú négyzet átlója. A legenda szerint „logikai botrány"-nak tartották, hogy ilyen létezik. Nem is akarták ezt a tudásukat közkinccsé tenni. Ezeket a számokat *arrhéton*-nak, kimondhatatlannak nevezték – csak úgy, mint bizonyos vallási titkokat.

   Az egységnégyzet átlójának mérőszáma $\sqrt{2}$, valóban irracionális. Ismert indirekt bizonyítás.

2. Adjuk meg olyan egyenes egyenletét, amely csak egyetlen rácsponton halad át a koordináta-rendszerben!

   Megoldás: Tetszőleges olyan egyenes, melynek a meredeksége irracionális, és átmegy valamely rácsponton.

3. Keressünk irracionális számot $\frac{1}{17}$ és $\frac{1}{16}$ között!

   Megoldás: $17 = \sqrt{279}$, $16 = \sqrt{256}$, így pl. $\frac{1}{\sqrt{260}}$ egy lehetséges megoldás.

   Másképp: $\frac{1}{16} = 0,0625$ és $\frac{1}{17} < 0,06$, így pl. $0,0610110111011110\ldots$ jó lesz.

   Közben megbeszéljük , hogy

   a) Irracionális reciproka is irracionális

   Bizonyítás indirekt: racionális reciproka racionális

   b) Irracionálisok tizedestört alakja

4. Irracionálisok elhelyezkedése a számegyenesen

   Megoldás: Bármely két racionális és bármely két irracionális között van irracionális szám. Pl. a fenti módszerrel képezhető. Hasonlóan bármely két irracionális között van racionális. Vegyük az első olyan tizedesjegyet, ahol a két szám eltér egymástól. A nagyobb számból vágjuk le az ezután lévő jegyeket. Így egy véges tizedes törtet kaptunk, ami a két eredeti szám között van.

5. Mikor lesz $\sqrt{n}$ irracionális?

   Megoldás: Indirekt: Tegyük fel, hogy $n = \frac{p}{q}$, ahol p és q egészek. Ekkor $nq^2 = p^2$. q^2 -ben és p^2 -ben minden prímtényező kitevője páros, tehát n -ben is minden kitevőnek párosnak kell lennie. Tehát n pontosan akkor racionális, ha n négyzetszám.

6. Adottak az A, B és C számok: $A = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}}\right)$, $C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén irracionális az alábbi szám: $\sqrt{(A + B - C)n + 2}$.

   Megoldás: Elvégezve az átalakításokat: $A = 2 + \sqrt{3}$, $B = 5 - 2\sqrt{3}$, $C = 2 - \sqrt{3}$. Így a kérdéses szám $\sqrt{5n + 2}$. A gyök alatti szám maradéka 5-tel osztva 2, ez pedig egy négyzetszámnál lehetetlen, így a szám minden n-re irracionális.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet valamennyi együtthatója páratlan szám, akkor az egyenlet gyökei nem racionálisak.

   Megoldás: A diszkrimináns, $(b^2 - 4ac) = (2k + 1)^2 - 4ac = 4k^2 + 4k + 1 - 4ac = 4(k^2 + k) - 4ac + 1$. Az első tag osztható 8-cal, a második 4 maradékot ad, a harmadik 1-et. Így az egész diszkrimináns 8-cal osztva 5 maradékot az, ez négyzetszámoknál lehetetlen.

8. Összeadás, kivonás, szorzás, osztás

   — egy racionális és egy irracionális között

   Megoldás: Mindig irracionális, különben valamelyik alapművelet két racionális között irracionális lenne. (Végignéztük mindegyiket részletezve)

   — két irracionális között

   Megoldás: Minden lehet: pl. $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ irracionális, de $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})=2$ racionális. (Végignéztük az összes műveletet)

9. Négy számról, a-ról, b-ről, c-ről és d-ről tudjuk, hogy a belőlük képezhető hat darab kéttagú összeg közül három racionális, három pedig irracionális értékű.

   a) Racionális szám-e az $a+b+c+d$ összeg?

   b) Hány racionális szám lehet a négy szám között?

   Megoldás: a) Nem, mert ez háromféleképp bontható a kéttagúak összegére. Ebből kell legyen racionális-irracionális pár, aminek az összege nem lehet racionális.

   b) 4 racionális nyilván nem lehet,

   3 racionális lehet, pl. 1, 2, 3, $\sqrt{2}$

   2 racionális nem lehet, mert pl., ha a, b racionális, c, d irracionális, akkor a közöttük képzett négy összeg biztosan irracionális.

   1 racionális nem lehet, mert ha pl. a racionális, akkor ennek összege a többiekkel biztosan irracionális.

   Kellene tehát, hogy b, c, d közötti összegek mind racionálisak, ekkor (összeadva őket) $b+c+d$ összeg racionális, ebből valamelyik irracionálist kivonva nem kaphatunk racionális összeget.

   4 irracionális lehetséges, pl. $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$.

10. Bizonyítsuk be, hogy hat irracionális szám között mindig van három, melyek közül bármely kettő összege irracionális!

    Megoldás: Legyen a hat irracionális szám $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Tekintsük azt a hat pontú teljes gráfot, amelynek hat csúcsa ez a hat szám. Színezzük az (a_i, a_j) élt pirosra, ha a_i+a_j irracionális, kékre, ha a_i+a_j racionális.

    Ismeretes, hogy egy két színnel színezett hat pontú teljes gráfban van egyszínű háromszög. Azt állítjuk, hogy a mi gráfunkban nem lehet kék (racionális) háromszög. Valóban, ha az a_i, a_j, a_k pontok között minden él kék, akkor a_i+a_j, a_i+a_k, a_j+a_k egyaránt racionális, így racionális az $(a_i+a_j)+(a_i+a_k)-(a_j+a_k)=2a_i$ szám is, ami pedig nem igaz. Van tehát a gráfban három olyan csúcs, amelyek között mindhárom él piros, vagyis a három szám közül bármely kettő összege irracionális.

11. Miért lesz irracionális $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, ill. $\sqrt{12}+\sqrt{3}$?

    Megoldás: Az első: Tegyük fel, hogy racionális. Emeljük négyzetre. Az előbbiek alapján az kellene, hogy $\sqrt{6}$ racionális, ami nem igaz.

    A második: Ugyanez a módszer nem jó, hisz négyzetre emelés után $\sqrt{36}$ -ot kapunk, ami nem vezet ellentmondásra. De némi átalakítással ez a kifejezés $3\sqrt{3}$, ami a fentiek alapján irracionális.

12. Racionális vagy irracionális $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$?

    Megoldás: Legyen a fenti kifejezés "a". Köbre emelve és kiemelve kapjuk, hogy $a^3+3a-4=0$. Láthatóan az $a=1$ megoldás lesz. Kiemelve $(a-1)$-et, a másik tényező (a^2+a+4) nem lehet nulla, ami nem meglepő, hisz csak egyetlen a érték lehetséges.

    Tehát $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.

13. Bizonyítsuk be, hogy az $a+b\sqrt{2}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, zártak a négy alapműveletre nézve!

    Megoldás: Végignézzük a műveleteket, osztásnál keresünk egy ilyen alakú számot, amit a nevezővel megszorozva a számlálót kapjuk. Az egyenletrendszer megoldásával belátjuk, hogy ez egyértelműen létezik.

14. Lehet-e irracionális szám irracionális kitevőn racionális?

Megoldás: Közben megbeszéljük a hatványozás kiterjesztését racionális ill. irracionális kitevőkre. (Megtartjuk az azonosságokat, ill. az a^x monotonitását.)

Csak a létezés bizonyítására példa lehet a $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ha ez racionális, akkor készen vagyunk. Ha irracionális, akkor emeljük ezt $\sqrt{2}$ - dik hatványra. $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$, tehát racionális. A két eset közül tehát az egyikben irracionális szám irracionális hatványa racionális lett.

15. Egy háromszög oldalai legyenek $2, n$ és $n+1$, ahol n 1-nél nagyobb egész. Egy belsõ pont az oldalaktól x, y, z távolságra van. Bizonyítsuk be, hogy x, y, z nem lehet mind racionális.

Megoldás: A háromszög területe $\frac{2x}{2} + \frac{ny}{2} + \frac{(n+1)z}{2}$. Ez racionális, ha x, y, z mindegyike racionális. Másképpen a terület Heron-képlettel: $\frac{1}{4}\sqrt{12n^2 + 12n - 9}$, ami irracionális. Ugyanis a gyök alatti kifejezés 4-gyel osztva 3 maradékot ad, ami egy négyzetszámnál lehetetlen. (Egy szám 4-gyel osztva 0, ± 1 vagy 2 maradékot ad, ezek négyzete rendre 0, 1 ill. 0 maradékot ad.)

16. Adottak az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ tetszőleges valós számok. Igazoljuk, hogy van olyan a valós szám, amire $a + x_1, a + x_2, a + x_3, \ldots, a + x_{10}$ mindegyike irracionális.

Megoldás: Ha minden x_i racionális, akkor tetszőleges a irracionális szám megfelel. Ha van egy x_i irracionális szám, akkor vizsgáljuk az $x_i, 2x_i, 3x_i, \ldots, 11x_i$ számokat, mint lehetséges a-kat. Tételezzük fel, hogy egyik sem jó, azaz mindegyiknél találunk legalább egy x_j-t, amire $a + x_j$ racionális. Mivel azonban ez 11 lehetőség, x_j pedig csak 10 van, biztosan van olyan x_j, amihez kétféle a-t hozzáadva racionális számot kapunk. Azaz $kx_i + x_m =$ racionális és $lx_i + x_n =$ racionális. Ez azt jelentené, hogy a különbségük, azaz $(k - l)x_i$ racionális, ez pedig lehetetlen.

Könnyedén tudunk általánosítani 10 számról n számra, lényegében semmi nem változik.

17. Legyen az $x^2 - 6x + 1 = 0$ egyenlet két megoldása x_1 és x_2. (Ezek a megoldóképletből: $\frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2}$ irracionális számok.) Állítás: Az $a_n = (x_1)^n + (x_2)^n$ sorozat minden eleme 5-tel nem osztható egész szám.

Megoldás: A bizonyítás során felhasználjuk a gyökök és együtthatók közötti összefüggést, miszerint $x_1 + x_2 = 6$ és $x_1 x_2 = 1$.

$a_1 = x_1 + x_2 = 6$

$a_2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 36 - 2 = 34$

$a_3 = (x_1)^3 + (x_2)^3 = (x_1 + x_2)[(x_1)^2 - x_1x_2 + (x_2)^2] = 6 \cdot (34 - 1) = 198 = 6 \cdot 34 - 6 = 6a_2 - a_3$

$a_4 = (x_1)^4 + (x_2)^4 = [(x_1)^2 + (x_2)^2]^2 - 2(x_1x_2)^2 = 34^2 - 2 = 1154 = 6 \cdot 198 - 34 = 6a_3 - a_2$

A fentiek alapján a sejtésünk:

$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$

Valóban:

$$\begin{aligned} a_n = (x_1)^n + (x_2)^n &= (x_1 + x_2)\left((x_1)^{n-1} + (x_2)^{n-1}\right) - \left((x_1(x_2)^{n-1} + x_2(x_1)^{n-1}\right) = \\ &= (x_1 + x_2)\left((x_1)^{n-1} + (x_2)^{n-1}\right) - x_1x_2\left((x_1)^{n-2} + (x_2)^{n-2}\right) = 6a_{n-1} - a_{n-2} \end{aligned}$$

Az eredeti állítást teljes indukcióval bizonyítjuk:

a_1, a_2, a_3 láthatóan egészek, és nem oszthatóak 5-tel.

Tegyük fel, hogy a_{n-1}-ig minden sorozatelemre igaz az állítás.

$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} = 5a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} = 5a_{n-1} + 5a_{n-2} - a_{n-3}$, tehát a_n-re is igaz.

18. Létezik-e olyan u, v valós számpár, amelyre

a) $u + v$ racionális, de minden $n \geq 2$ egész szám esetén $u^n + v^n$ irracionális;

b) $u + v$ irracionális, de minden $n \geq 2$ egész szám esetén $u^n + v^n$ racionális?

Megoldás: a) Az $u = 1 + \sqrt{2}$, $v = -\sqrt{2}$ választással $u + v = 1$ racionális.

Páros n esetén u^n irracionális, v^n racionális, tehát az összegük irracionális.

Páratlan n esetén

$$\begin{aligned} u^n + v^n &= (1+\sqrt{2})^n - (\sqrt{2})^n = \\ &= (1+\sqrt{2}-\sqrt{2}) \cdot \left((1+\sqrt{2})^{n-1} + (1+\sqrt{2})^{n-2}\sqrt{2} + \ldots (1+\sqrt{2})(\sqrt{2})^{n-2} + (\sqrt{2})^{n-1}\right) \end{aligned}$$

A második zárójeles kifejezésben egész számok összege és $\sqrt{2}$ hatványainak többszöröse szerepel, $a + b\sqrt{2}$ alakú. Minden együttható pozitív, ezért elég belátni, hogy van olyan tag, amelyben $\sqrt{2}$ együtthatója nem 0. Az $(1+\sqrt{2})(\sqrt{2})^{n-2}$ tagban beszorozva például ezt kapjuk: $(\sqrt{2})^{n-2} + (\sqrt{2})^{n-1}$. Itt $(\sqrt{2})^{n-2}$-ben a $\sqrt{2}$ páratlan hatványon szerepel, tehát biztosan nem 0 az együtthatója.

b) Tegyük fel, hogy léteznek ilyen u és v számok.

Nem lehet u és v egyszerre 0, mert akkor $u + v$ nem irracionális.

Nem lehet, hogy u vagy v egyike 0, mert például ha $u = 0$, akkor v irracionális, és így $v^3 = v \cdot v^2$ miatt vagy v^2, vagy v^3 szintén irracionális lenne, ami ellentmond a feltevésünknek.

$(u^2 + v^2)^2 - (u^4 + v^4) = 2u^2v^2$, tehát $2u^2v^2$, vagyis u^2v^2 is racionális, mert $u^2 + v^2$ és $u^4 + v^4$ is az.

Ha minden $n \geq 2$ esetén $u^n + v^n$ racionális, akkor speciálisan $n = 2$-re, 3-ra és 5-re is az. Írjuk most fel a következő szorzatot:

$$(u^2 + v^2)(u^3 + v^3) = u^5 + v^5 + u^2v^2(u + v)$$

Azonos átalakítással $(u \neq 0, v \neq 0)$:

$$\frac{(u^2 + v^2)(u^3 + v^3) - (u^5 + v^5)}{u^2v^2} = (u + v)$$

Az egyenlőség bal oldalán racionális szám áll, a jobb oldal tehát nem lehet irracionális.