Számoljunk kétszer!

Kombinatorikai feladatok egyik gyakran használt megoldási módszere, hogy választunk egy mennyiséget, amit aztán két különböző módon megszámolunk, vagy legalábbis megbecsüljük a nagyságát. A két számolási módszer egybevetéséből formulákat és egyéb hasznos állításokat nyerhetünk.

A módszer szépsége abban rejlik, hogy nekünk kell megtalálnunk azt a mennyiséget, amelynek kétféle megszámlálása közelebb visz a probléma megoldásához. Egy nagyon általános objektum az *illeszkedési mátrix*, amely sok-sok feladatban jelent hasznos kiindulópontot. Például ha egy feladatban egy alaphalmaz részhalmazaival foglalkozunk, akkor felírhatjuk (vagy elképzelhetjük) azt a táblázatot, amelynek sorai a részhalmazok, oszlopai az eredeti halmaz elemei, és a táblázat minden eleme 0 vagy 1. Pontosan akkor 1 az i. sor j. eleme, ha az i. részhalmaz tartalmazza az eredeti halmaz j. elemét.

Egyszerű esetben a táblázatba írt 1-eseket számoljuk össze sorok és oszlopok szerint, de az is lehet, hogy csak becsüljük az 1-esek számát. Gyakran párok vagy hármasok megszámlálása is segít. Végül jegyezzük meg, hogy az $\binom{x}{2}$ függvény konvex, ami párok megszámlálásakor alsó becslés megadásában segít.

Feladatok

1. nap

1. Bizonyítsuk be a binomiális együtthatók alábbi tulajdonságait:
   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
   (b) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
   (c) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$
   (d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$
   (e) $\binom{n}{1} + 2\cdot\binom{n}{2} + 3\cdot\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$
   (f) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
   (g) $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$
   (h) $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$

2. Egy bizottságban minden tag pontosan három albizottság tagja, és minden albizottság pontosan három tagból áll. Bizonyítsuk be, hogy a bizottságnak annyi tagja van, ahány albizottsága.

3. Tizenöt diák egy nyári matematika táborban vett részt. Minden nap három diák volt az ügyeletes, nekik kellett a termeket rendbe tenni. A tábor végére bármely két diák pontosan egyszer volt együtt ügyeletes. Hány napig tartott a tábor?

4. Jelölje $p_n(k)$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ azon permutációinak számát, amelyekben pontosan k fixpont van. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot p_n(k) = n!.$$

5. Az egész számokat kiszínezzük néhány színnel úgy, hogy a színezés periodikus legyen p periódussal (p pozitív egész és minden egész s-re s és $s+p$ azonos színű). Adottak az $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ pozitív egészek azzal a tulajdonsággal, hogy ha k tetszőleges egész, akkor az $a_1+k, a_2+k, \ldots, a_n+k$ számok között pontosan egy zöld van. Bizonyítsuk be, hogy p osztható n-nel.

6. Egy egyszerű gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese.

7. Egy hat csúcsú teljes gráf éleit két színnel színeztük. Bizonyítsuk be, hogy mindig keletkezik legalább két egyszínű háromszög.

2. nap

1. A Duma (az orosz parlament neve) tagjainak száma 1600. A Dumában 16000 darab, 80 fős bizottság működik. Mutassuk meg, hogy kiválasztható két bizottság úgy, hogy legalább 4 közös tagjuk legyen.

2. Egy énekversenyen 8 énekes vett részt. Összesen d dalt énekeltek, mindegyiket négyen adták elő és bármely két énekes ugyanannyi dalt adott elő közösen. Mi a legkisebb d, amire ez lehetséges?

3. Egy matematika versenyen pontosan kétszáz versenyző vett részt. Hat feladatot tűztek ki. Tudjuk, hogy minden feladatot legalább százhúsz résztvevő megoldott. Bizonyítsuk be, hogy létezik két versenyző, akikre igaz, hogy minden feladatot megoldott legalább egyikük.

4. Egy versenyen a versenyző indult, akiket egy b tagú zsűri értékelt ($b \geq 3$ és páratlan). Minden zsűri tag minden versenyzőt értékel, az értékelés vagy az, hogy „megfelelt” vagy az, hogy „kiesett”. Tegyük fel, k olyan pozitív egész, amelyre igaz, hogy bármely két zsűri tag legfeljebb k versenyző estén adta ugyanazt az értékelést. Mutassuk meg, hogy $k/a \geq (b-1)/(2b)$.

5. Egy körmérkőzéses bajnokságon $2n+1$ csapat vett részt, mindenki mindenkivel egyszer játszott, döntetlen nem volt. (a) Legalább; (b) legfeljebb mennyi lehetett a hármas körbeverések száma? (Egy hármas körbeverésben az X legyőzte Y-t, Y legyőzte Z-t, Z pedig legyőzte X-et.)

6. A szenátusban 30 szenátor van, bármely kettő vagy barát vagy ellenség (ezek kölcsönös érzelmek). Minden szenátornak hat ellensége van. Bármely három szenátor egy háromfős bizottságot alkot. Hány olyan bizottság van, ahol mindenki barát, vagy mindenki ellenség?

7. Tíz diák könyveket rendelt, mindegyikük három különbözőt. Bármely két diák által rendelt könyvek között van azonos. Legtöbben a *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák*at rendelték meg („holtverseny” lehetséges). Legalább hányan rendelték meg a *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák*at?

8. Legyen X véges halmaz, $|X| = n$ és legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_m$ olyan háromelemű részhalmazai X-nek, amelyekre $i \neq j$ esetén $|A_i \cap A_j| = 1$. Mutassuk meg, hogy létezik X-nek olyan A részhalmaza, amelynek legalább $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ eleme van, és semelyik A_i-t nem tartalmazza.

9. A sík pontjainak egy véges S halmazát *kiegyensúlyozott*nak nevezzük, ha S bármely két különböző A és B pontjához van S-nek olyan C pontja, amire $AC = BC$. S-et *centrum-nélküli*nek nevezzük, ha S bármely három páronként különböző pontjára teljesül az, hogy nincs S-nek olyan P pontja, amire $PA = PB = PC$.

   (a) Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 3$ egész számhoz létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.

   (b) Határozzuk meg azokat az $n \geq 3$ egészeket, amelyekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

10. Adottak a síkon a $k_1, k_2, \ldots, k_n (n \geq 2)$ egységkörök úgy, hogy semelyik kettő nem érinti egymást, és a körök uniója összefüggő síktartomány. Legyen S a *körvonalak* metszéspontjainak halmaza. Bizonyítsuk be, hogy $|S| \geq n$.

11. Adott a síkon az n-elemű S ponthalmaz és a k pozitív egész úgy, hogy

    (i) semelyik három S-beli pont nem esik egy egyenesre;

    (ii) minden S-beli P ponthoz létezik legalább k olyan S-beli pont, amelyek P-től egyenlő távol vannak.

    Bizonyítsuk be, hogy $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

12. Legyen $n \geq 4$ rögzített egész. Az $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ olyan pontok halmaza a síkon, hogy semelyik három nem kollineáris és semelyik négy nem esik egy körvonalra. Legyen a_t azon $P_iP_jP_k$ körök száma, amelyek belsejükben tartalmazzák a P_t pontot, és legyen $m(S) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan csak n-től függő $f(n)$ egész, hogy S pontjai akkor és csak akkor csúcsai egy konvex sokszögnek, ha $m(S) = f(n)$.

13. Ha a csúcsokat megkülönböztetjük, akkor n^{n-2} különböző n-csúcsú fagráf létezik.

További feladatok

1. Egy iskolába 2007 lány és 2007 fiú jár. Bármely tanuló legfeljebb 100 iskolai klub tagja. Ha veszünk egy tetszőleges fiút és egy tetszőleges lányt, akkor mindig teljesül, hogy létezik legalább egy klub, amelynek ők mindketten tagjai. Mutassuk meg, hogy van olyan klub, amelynek legalább 11 lány és legalább 11 fiú tagja van.

2. Egy egyetemre 10001 hallgató jár. A hallgatók különböző klubokat hozhatnak létre, a klubok társaságokat alakíthatnak. Egy hallgató több klub tagjai is lehet, egy klub több társasághoz is tartozhat. Összesen k társaság van. Tudjuk a következőket:

   (i) bármely két hallgatóhoz pontosan egy klub van, amelynek mindketten tagjai;

   (ii) egy adott hallgatóhoz és egy társasághoz pontosan egy klub létezik, amely a társasághoz tartozik, és amelynek a hallgató tagja;

   (iii) minden klubnak páratlan sok tagja van és ha egy klub taglétszáma $2m + 1$ ($m > 0$), akkor a klub pontosan m társasághoz tartozik.

   Mennyi lehet k értéke?

3. Jelölje P az $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ összesen 49 elemű részhalmazának halmazát. Minden $T \in P$ halmazhoz hozzárendeltünk egy $n(T) \in S$ számot. Mutassuk meg, hogy megadható egy 50 elemű $M \subset S$ részhalmaz úgy, hogy bármely $x \in M$ esetén $n(M \setminus \{x\}) \neq x$.

4. Tizenhat diák vett részt egy tesztversenyen, ahol minden kérdésre négy megadott válasz közül kellett az egyetlen helyeset kiválasztani. A verseny után kiderült, hogy bármely két versenyző legfeljebb egy kérdésre adta ugyanazt a választ. Legfeljebb hány kérdés lehetett a versenyen?

Megoldások

1. nap

1. Bizonyítsuk be a binomiális együtthatók alábbi tulajdonságait:

   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

   (b) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

   (c) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

   (d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

   (e) $\binom{n}{1} + 2\cdot\binom{n}{2} + 3\cdot\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$

   (f) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

   (g) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$

   (h) $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$

   [3]

   Mit számolunk kétszer: feladatonként más
   Nehézség: közepes
   Téma: azonosságok bizonyítása kombinatorikai gondolatmenettel

   Megoldás: (a) Ki kell választanunk n elemből k-t. Legyen az n elem között egy *megjelölt*. A kiválasztott k között vagy ott van a megjelölt, vagy nincs. Ha ott van, az $\binom{n-1}{k-1}$ lehetőség, ha nincs, az pedig $\binom{n-1}{k}$.

   (b) Válasszunk ki n emberből egy k-tagú bizottságot elnökkel. Ha először választjuk ki a k tagot, és utána az elnököt, az az azonosság bal oldala, ha pedig előbb az elnököt, és utána a maradék $k-1$ tagot, az a jobb oldal.

   (c) Az m-elemű részhalmazok száma, amelyekben van k „megjelölt" elem. Bal oldal: előbb az m elemet választjuk ki. Jobb oldal: előbb a megjelölt elemeket választjuk ki.

   (d) A részhalmazok száma, a részhalmaz elemszáma szerint csoportosítva.

   (e) A nemüres részhalmazok száma, amelyekben van egyetlen „megjelölt" elem.

   (f) Az $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$ polinomban x^n együtthatója.

   (g) $2n$ ember közül kell egy n-tagú bizottságot választanunk elnökkel úgy, hogy az elnök az első n ember közül kerül ki.

   (h) Az $n+m$ elemű halmazból kell kiválasztanunk k elemet. Az eredeti halmazt egy n és egy m elemű rész uniójaként képzeljük el.

2. Egy bizottságban minden tag pontosan három albizottság tagja, és minden albizottság pontosan három tagból áll. Bizonyítsuk be, hogy a bizottságnak annyi tagja van, ahány albizottsága. [2]

   Mit számolunk kétszer: amikor egy tag benne van egy albizottságban
   Nehézség: könnyű
   Téma: bizottsági tagságok

   Megoldás: Legyen B albizottság és legyen a bizottság n-tagú. Az albizottsági tagságok száma így egyrészt $3B$ (minden albizottság három tagból áll), másrészt $3n$ (minden tag három albizottságban van benne). $3B = 3n \Rightarrow B = n$.

3. Tizenöt diák egy nyári matematika táborban vett részt. Minden nap három diák volt az ügyeletes, nekik kellett a termeket rendbe tenni. A tábor végére bármely két diák pontosan egyszer volt együtt ügyeletes. Hány napig tartott a tábor? [3]

   Mit számolunk kétszer: együtt szolgálatban lévő párok
   Nehézség: könnyű
   Téma: diákok, párok

   Megoldás: Tegyük fel, hogy n napig tartott a tábor. Ekkor egyrészt $n\cdot\binom{3}{2}$, másrészt $\binom{15}{2}$ az együtt szolgáló párok száma. $n\cdot\binom{3}{2} = \binom{15}{2} \Rightarrow n = 35$.

4. Jelölje $p_n(k)$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ azon permutációinak számát, amelyekben pontosan k fixpont van. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$
[3]

Mit számolunk kétszer: az összes lehetséges permutáció összes fixpontja **Nehézség:** könnyű **Téma:** permutációk

Megoldás: Számoljuk meg az összes permutációban szereplő összes fixpontot kétféle módon.

Először számoljunk a lehetséges fixpontok szerint. Ha az x szám fixpont, akkor a maradék $n-1$ elem $(n-1)!$ sorrendbe rendezhető. Mivel $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, így összesen $n \cdot (n-1)! = n!$ a fixpontok száma.

Másodszor csoportosítsuk a permutációkat aszerint, hány fixpontjuk van. Így éppen $\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k)$ adódik.

5. Az egész számokat kiszínezzük néhány színnel úgy, hogy a színezés periodikus legyen p periódussal (p pozitív egész és minden egész s-re s és $s+p$ azonos színű). Adottak az $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ pozitív egészek azzal a tulajdonsággal, hogy ha k tetszőleges egész, akkor az $a_1 + k, a_2 + k, \ldots, a_n + k$ számok között pontosan egy zöld van. Bizonyítsuk be, hogy p osztható n-nel. [1]

Mit számolunk kétszer: táblázat elemei, sor és oszlop szerint **Nehézség:** közepes **Téma:** egész számok, oszthatóság

Megoldás: Legyen egy periódusban z zöld. Vizsgáljuk a következő táblázatot:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1+1 & a_2+1 & \ldots & a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1+(p-1) & a_2+(p-1) & \ldots & a_n+(p-1) \end{array}$$

Minden sorban 1 zöld van, ez összesen p zöld. Minden oszlop egy teljes periódus, ezért minden oszlopban z zöld van, ez összesen $n \cdot z$ zöld. Tehát $n \cdot z = p \Rightarrow n \mid p$.

6. Egy egyszerű gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese.

Mit számolunk kétszer: csúcsokba befutó élvégződések **Nehézség:** könnyű **Téma:** gráfok

Megoldás: Minden élnek két vége van, mindegyik egy-egy csúcs fokszámát növeli eggyel.

7. Egy hat csúcsú teljes gráf éleit két színnel színeztük. Bizonyítsuk be, hogy mindig keletkezik legalább két egyszínű háromszög. [4]

Mit számolunk kétszer: egy csúcsba futó egyszínű élpárokat **Nehézség:** közepes **Téma:** gráfok, színezés

Megoldás: Tegyük fel, hogy legfeljebb egy egyszínű háromszög van. Számoljuk meg az egy csúcsba futó egyszínű élpárokat.

Egy csúcsból 5 él indul. Akkor kapjuk a minimális azonos színű élpárt, ha a színek megoszlása 2–3, ekkor $1 + 3 = 4$ egyszínű pár van a csúcsnál. Tehát az egyszínű párok száma legalább $6 \cdot 4 = 24$.

Ha egy háromszög egyszínű, akkor mindhárom csúcsánál van egy egyszínű pár. Ha nem, akkor pontosan egy egyszínű pár keletkezik oldalaiból. Mivel feltettük, hogy legfeljebb egy egyszínű háromszög van, ezért az egyszínű párok száma legfeljebb $3 + 19 \cdot 1 = 22$.

A kapott ellentmondás igazolja, hogy kell lennie legalább két egyszínű háromszögnek.

2. nap

1. A Duma (az orosz parlament neve) tagjainak száma 1600. A Dumában 16000 darab, 80 fős bizottság működik. Mutassuk meg, hogy kiválasztható két bizottság úgy, hogy legalább 4 közös tagjuk legyen. [1]

Mit számolunk kétszer: kijelölt elem („elnök"), párok az illeszkedési mátrixban **Nehézség:** közepes **Téma:** bizottságok

1. megoldás: Tegyük fel, hogy bármely két bizottságnak legfeljebb három közös tagja van. Számoljuk meg, hogy hányféle módon lehet elnököt választani a következő három ülésre!

Ez egyrészt nyilván 1600^3.

Most ugyanezt számoljuk meg azzal a feltétellel, hogy mindig valamelyik bizottság adja az elnököt (így nyilván kevesebb esetet kell kapnunk). Ez $16000 \cdot 80^3$ lenne, de így többször eseteket többször számoltunk, minden bizottság párnál legfeljebb 3^3 darabot. A következő becsléseket kaptuk:

$$1600^3 > 16000 \cdot 80^3 - \binom{16000}{2} \cdot 3^3 > 16000 \cdot 80^3 - \frac{16000^2}{2} \cdot 32 = 1600^3$$

Ellentmondást kaptunk, tehát az indirekt feltevés nem lehet igaz.

2. megoldás: Képzeljük el azt a táblázatot, amelynek sorai a bizottságok, oszlopai a tagok, és egy elem pontosan akkor egy, ha az adott tag benne van az adott bizottságban, különben nulla. Számoljuk meg az azonos oszlopba eső 1-es párok számát!

Sorpárok szerint haladva, és indirekt feltéve, hogy legfeljebb három közös tag van bizottság páronként, azt kapjuk, hogy a vizsgált párok száma

$$P \leq 3 \cdot \binom{16000}{2}.$$

Oszloponként haladva, és feltéve, hogy az i. oszlopban a_i egyes van (így $\sum a_i = 16000 \cdot 80 = 1600 \cdot 800$), azt kapjuk, hogy

$$P = \sum_{i=1}^{1600} \binom{a_i}{2}.$$

A $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$ függvény konvexitása miatt

$$P = \sum_{i=1}^{1600} \binom{a_i}{2} \geq 1600 \binom{800}{2}.$$

Azt kaptuk, hogy

$$3 \cdot \binom{16000}{2} \geq P \geq 1600 \binom{800}{2},$$

amiről egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy nem igaz.

2. Egy énekversenyen 8 énekes vett részt. Összesen d dalt énekeltek, mindegyiket négyen adták elő és bármely két énekes ugyanannyi dalt adott elő közösen. Mi a legkisebb d, amire ez lehetséges? [1]

Mit számolunk kétszer: párok, együtt daloló párok száma énekes párok, és dalok szerint **Nehézség:** könnyű **Téma:** emberek, részhalmazok

Megoldás: Legyen a párok előadott dalok száma p. Ekkor az összes daloló pár száma egyrészt $d\binom{4}{2}$ (dalok szerint), másrészt $p\binom{8}{2}$ (énekes párok szerint).

$$d\binom{4}{2} = p\binom{8}{2} \Rightarrow 6d = 28p \Rightarrow 14 \mid d \Rightarrow 14 \leq d.$$

Ez meg is valósítható, például így:

1234, 5678, 1256, 3478, 3456, 1357, 2468, 1368, 2457, 1458, 2367, 1467, 1278, 2358

3. Egy matematika versenyen pontosan kétszáz versenyző vett részt. Hat feladatot tűztek ki. Tudjuk, hogy minden feladatot legalább százhúsz résztvevő megoldott. Bizonyítsuk be, hogy létezik két versenyző, akikre igaz, hogy minden feladatot megoldott legalább egyikük. [2]

Mit számolunk kétszer: illeszkedési mátrixban az egy oszlopba eső párokat, ahol egy feladatot két versenyző is megoldott **Nehézség:** könnyű **Téma:** feladatok, megoldások, verseny

Megoldás: Definiáljunk egy *illeszkedési mátrixot*. A mátrix sorai a versenyzők, az oszlopai a feladatok, a mátrix egy eleme attól függően egy vagy nulla, hogy az adott versenyző az adott feladatot megoldotta-e, vagy nem.

$$\begin{array}{r} \text{versenyző}_1 \\ \text{versenyző}_2 \\ \vdots \\ \text{versenyző}_{200} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Az illeszkedési mátrixnak kétszáz sora van, és hat oszlopa. Az egy oszlopba eső nulla párokat számoljuk meg kétféle módon (számuk N).

Oszlopok szerint haladva $N \le \binom{80}{2} \cdot 6$.

Ha indirekt feltesszük, hogy nincs két olyan versenyző, akik kielégítik a feladat feltételét, akkor bármely sorpár legalább egy nulla párt tartalmaz, ezért $N \ge \binom{200}{2}$.

A kapott becslésekből $6 \cdot \binom{120}{2} \ge N \ge \binom{200}{2} \Rightarrow 6 \cdot 120 \cdot 119 \ge 200 \cdot 199 \Rightarrow 37920 \ge 39800$.

Ellentmondást kaptunk, ezért kell lennie két versenyzőnek, akik együtt minden feladatot megoldottak.

4. Egy versenyen a versenyző indult, akiket egy b tagú zsűri értékelt ($b \ge 3$ és páratlan). Minden zsűri tag minden versenyzőt értékel, az értékelés vagy az, hogy „megfelelt” vagy az, hogy „kiesett”. Tegyük fel, k olyan pozitív egész, amelyre igaz, hogy bármely két zsűri tag legfeljebb k versenyző estén adta ugyanazt az értékelést. Mutassuk meg, hogy $k/a \ge (b-1)/(2b)$. [2]

Mit számolunk kétszer: zsűri-tag párok által adott azonos értékelések **Nehézség:** nehéz **Téma:** verseny, értékelések, zsűri

Megoldás: Tekintsük azt a b sorú és a oszlopú illeszkedési mátrixot, amelynek egy eleme akkor 1, ha az adott versenyzőt az adott zsűri-tag „átengedte”, 0 egyébként. (A sorok a zsűri-tagok, az oszlopok a versenyzők.) Számoljuk meg az egy oszlopba eső azonos értékelés párokat (tehát az 1-1 **és** a 0-0 párokat) kétféle módon.

Sorpárok szerint haladva az egyező értékelés párok száma legfeljebb $\binom{b}{2} \cdot k$.

Egy oszlopban legyen x „megfelelt” és $b-x$ „kiesett” értékelés. Ekkor az azonos párok száma az oszlopban $\binom{x}{2}+\binom{b-x}{2}$. Felhasználva $\binom{x}{2}$ konvexitását, és azt, hogy $b = 2c+1$ 1-nél nagyobb páratlan egész, azt kapjuk, hogy $\binom{x}{2}+\binom{b-x}{2} \ge \binom{c}{2}+\binom{c+1}{2}$ („középen van a minimum”). Tehát összesen legalább $a \cdot \left(\binom{c}{2}+\binom{c+1}{2}\right)$ egyező pár van.

Becsléseinket egybevetve:

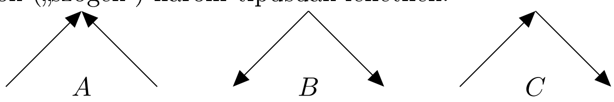
$$\begin{aligned} a \cdot \left(\binom{c}{2}+\binom{c+1}{2}\right) &\le \binom{b}{2} \cdot k \\ \frac{ac}{2} \cdot (c-1+c+1) &\le \frac{kb(b-1)}{2} \\ ac^2 &\le kb \cdot \frac{b-1}{2} \\ a \cdot \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 &\le kb \cdot \frac{b-1}{2} \\ a \cdot \frac{b-1}{2} &\le kb \\ \frac{b-1}{2b} &\le \frac{k}{a} \end{aligned}$$

5. Egy körmérkőzéses bajnokságon $2n+1$ csapat vett részt, mindenki mindenkivel egyszer játszott, döntetlen nem volt. (a) Legalább; (b) legfeljebb mennyi lehetett a hármas körbeverések száma? (Egy hármas körbeverésben az X legyőzte Y-t, Y legyőzte Z-t, Z pedig legyőzte X-et.) [6]

Mit számolunk kétszer: nem ciklikus háromszögek; különböző típusú „szögekkel"
Nehézség: nehéz
Téma: körmérkőzés, irányított gráf

Megoldás: (a) Nyilván nulla, mert lehetséges, hogy i legyőzte j-t, ha $i > j$.

(b) A körmérkőzés irányított gráffal ábrázolható, az $i \to j$ irányított él jelölje azt, hogy i legyőzte j-t. Az egy csúcsnál lévő élpárok („szögek") három típusúak lehetnek.



A körbeverést ábrázoló háromszögben minden szög C típusú, a többi háromszögben minden típus egyszer fordul elő. Jelölje az A típusú szögek számát a, a B típusúakét b és a C típusúakét c.

A nem körbeverést ábrázoló háromszögek számára adunk alsó becslést. Az a szám egyrészt $\frac{a+b}{2}$, mert minden „nem ciklikus" háromszögben mindhárom típusú szög szerepel.

Másrészt, ha a csúcsoknál számolunk, akkor

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1}\binom{a_i}{2} + \binom{2n-a_i}{2},$$

ahol a_i az i. csúcsba mutató élek számát jelöli.

Az $\binom{x}{2}$ konvexitása miatt $\binom{a_i}{2} + \binom{2n-a_i}{2} \geq 2 \cdot \binom{n}{2}$, tehát a nem ciklikus háromszögek száma **legalább**

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} 2\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{2n+1}\frac{n^2-n}{2} = \frac{(2n+1)n(n-1)}{2}.$$

Innen a körbeverések száma **legfeljebb**

$$\binom{2n+1}{3} - \frac{(2n+1)n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ez maximum elérhető: pontosan akkor mutasson él i-ből j-be, amikor $j - i \pmod{2n+1} \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

6. A szenátusban 30 szenátor van, bármely kettő vagy barát vagy ellenség (ezek kölcsönös érzelmek). Minden szenátornak hat ellensége van. Bármely három szenátor egy háromfős bizottságot alkot. Hány olyan bizottság van, ahol mindenki barát, vagy mindenki ellenség? [4]

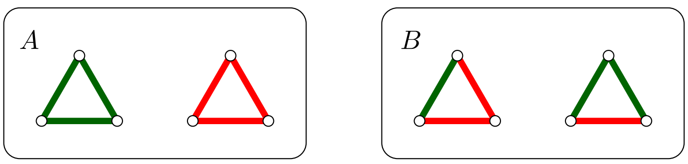
Mit számolunk kétszer: egy szenátorral azonos viszonyban lévő szenátor párok
Nehézség: közepes
Téma: emberek, barát/ellenség

Megoldás: Legyenek a szenátorok egy teljes gráf csúcsai, az éleket pedig színezzük zöldre illetve pirosra aszerint, hogy az összekötött szenátorok barátok vagy ellenségek. Azokat a „háromszögeket" kell megszámolnunk, amelyeknek minden oldala azonos színű. Ehhez kétféle módon megszámoljuk az egy csúcsba futó azonos színű élpárokat.

Mivel minden csúcsból 6 piros és 23 zöld él indul ki, ezért az azonos színű egy csúcsba futó élpárok száma

$$30 \cdot \left(\binom{6}{2} + \binom{23}{2}\right) = 8040.$$

Most számoljunk háromszögek szerint. Az azonos színű oldalakkal rendelkező háromszögek száma legyen A, a többié B. Tudjuk, hogy $A + B = \binom{30}{3} = 4060$.



Az A típusú háromszögekben 3, a B típusú háromszögekben pedig 1 azonos színű élpár van, ezért

$$3A + B = 8040.$$

Felhasználva, hogy $B = 4060 - A$ kapjuk, hogy $3A + 4060 - A = 8040 \Rightarrow 2A = 8040 - 4060 = 3980 \Rightarrow A = 1990$.

7. Tíz diák könyveket rendelt, mindegyikük három különbözőt. Bármely két diák által rendelt könyvek között van azonos. Legtöbben a *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák*at rendelték meg („holtverseny” lehetséges). Legalább hányan rendelték meg a *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák*at? [4]

Mit számolunk kétszer: az (x, y, k) hármasokat, ahol x és y is megrendelte a k könyvet **Nehézség:** közepes **Téma:** diákok, könyvek, rendelések

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy a maximum lehet 5. Ehhez tegyük fel, hogy a rendelt könyvek között hat különböző volt: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és a tíz diák rendelései legyenek ezek: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 5, 6)$, $(1, 6, 2)$, $(2, 3, 5)$, $(3, 4, 6)$, $(4, 5, 2)$, $(5, 6, 3)$ és $(6, 2, 4)$. Ellenőrizhető, hogy ezek a rendelések teljesítik a feladat feltételeit, és minden könyvet pontosan öt diák rendelt meg.

Most megmutatjuk, hogy a maximális rendelés szám nem lehet 4 vagy kevesebb. Ehhez tegyük fel, hogy minden könyvet legfeljebb 4-en rendeltek meg, és számoljuk össze az (x, y, k) hármasokat, ahol x és y is megrendelte a k könyvet. Tegyük fel, hogy az i. könyvet m_i diák rendelte meg, ahol $1 \le i \le n$. Bármely két diáknak van közös rendelése, és az i. könyv $\binom{m_i}{2}$ párhoz tartozik, ezért

$$\binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2} + \ldots + \binom{m_n}{2} \ge \binom{10}{2} = 45.$$

Mivel $m_i \le 4$, ezért

$$\binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2} + \ldots + \binom{m_n}{2} \le 7\binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 43,$$

ellentmondás. (Itt felhasználtuk, hogy $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 30$, és azt, hogy $\binom{4}{2} = 6 > \binom{3}{2} = 3 > \binom{2}{2} = 1$.)

8. Legyen X véges halmaz, $|X| = n$ és legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_m$ olyan háromelemű részhalmazai X-nek, amelyekre $i \ne j$ esetén $|A_i \cap A_j| = 1$. Mutassuk meg, hogy létezik X-nek olyan A részhalmaza, amelynek legalább $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ eleme van, és semelyik A_i-t nem tartalmazza. [4]

Mit számolunk kétszer: egy maximális „jó” halmaz komplementerének elemszáma **Nehézség:** nehéz **Téma:** halmazok

Megoldás: Legyen A egy olyan maximális számosságú részhalmaza X-nek, amely nem tartalmaz egyetlen A_i-t sem. Ekkor minden $x \in X \setminus A$ elemhez létezik olyan $P_x = \{y, z\} \subset A$ pár, hogy $\{x, y, z\}$ valamelyik A_i, ugyanis ellenkező esetben x-szel bővíthetnénk A-t.

Az is igaz, hogy bármely különböző $x, x' \in X \setminus A$ esetén a hozzájuk rendelt $P_x, P_{x'}$ párok különböznek, hiszen ellenkező esetben az $\{x, y, z\} = A_i$ és $\{x', y, z\} = A_j$ halmazoknak egynél több közös eleme lenne.

A fentiek miatt

$$n - |A| = |X \setminus A| \le \binom{|A|}{2} = \frac{|A|(|A| - 1)}{2}.$$

Rendezve és megoldva az $|A|$-ban másodfokú egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
n &\le \frac{|A|(|A|-1)}{2} + |A| = \frac{|A|(|A|+1)}{2} \\
0 &\le |A|^2 + |A| - 2n \\
\frac{-1 + \sqrt{1 + 8n}}{2} &\le |A| \\
-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2n} &\le |A| \\
\left\lfloor\sqrt{2n}\right\rfloor \le \left\lceil -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2n} \right\rceil &\le |A|
\end{aligned}$$

Az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy $|A|$ egész szám.

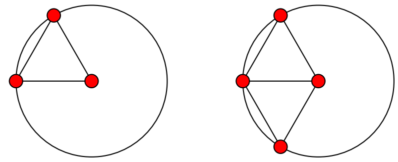
9. A sík pontjainak egy véges S halmazát *kiegyensúlyozott*nak nevezzük, ha S bármely két különböző A és B pontjához van S-nek olyan C pontja, amire $AC = BC$. S-et *centrum-nélküli*nek nevezzük, ha S bármely három páronként különböző pontjára teljesül az, hogy nincs S-nek olyan P pontja, amire $PA = PB = PC$.

(a) Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 3$ egész számhoz létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.

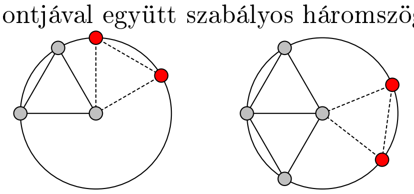
(b) Határozzuk meg azokat az $n \geq 3$ egészeket, amelyekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz. [5]

Mit számolunk kétszer: $(\{A, B\}, C)$ hármasok, ahol az AB szakasz felezőmerőlegesén van C
Nehézség: közepes
Téma: pontok, tengelyek

Megoldás: (a) $n = 3$ és $n = 4$ esetén kiegyensúlyozottak az alábbi halmazok (a berajzolt szakaszok hossza egyenlő):



A fenti esetekből kiindulva mindig tudjuk kettővel növelni a pontok számát úgy, hogy a halmaz továbbra is kiegyensúlyozott legyen. Ehhez csak arra kell figyelni, hogy a két új pontot úgy vegyük fel a berajzolt kör kerületén, hogy a kör középpontjával együtt szabályos háromszöget alkossanak.



Így az páratlan számokat $n = 3$-ból indulva, a párosakat $n = 4$-ből indulva kaphatjuk meg, kettesével bővítve az eredeti ponthalmazt.

(b) Páratlan n-re jó példa egy szabályos n-szög. Megmutatjuk, hogy páros n-re nem adható meg jó konstrukció.

Legyen H azon $(\{A, B\}, C)$ hármasok száma, ahol az AB szakasz felezőmerőlegesén rajta van C. Legyen $n = 2k$. Ha az $\{A, B\}$ párok szerint számolunk, akkor $H \geq \binom{n}{2}$, hiszen minden pontpárhoz tartozik legalább egy pont a felezőmerőlegesen.

Most számoljuk meg, hogy egy C pont legfeljebb hány $\{A, B\}$ párhoz tartozhat. A centrumnélküliség miatt C-hez tartozó pároknak nem lehet közös eleme, mert ha $\{X, Y\}$ és $\{X, Z\}$ is C-hez tartozna, akkor C az XYZ köréírt körének középpontja lenne. Így C-hez legfeljebb $k - 1$ pár tartozhat, hiszen C-t leszámítva $2k - 1$ pont közül választhatunk diszjunkt párokat. Tehát $H \leq 2k \cdot (k - 1)$, mert az összes lehetséges C-hez legfeljebb $k - 1$ pár tartozhat.

Az eddigi becslések alapján

$$2k \cdot (k-1) \geq H \geq \binom{n}{2} = \frac{2k \cdot (2k-1)}{2} \Rightarrow 2k - 2 \geq 2k - 1.$$

A kapott ellentmondás igazolja, hogy páratlan n esetén nincs jó elrendezés.

10. Adottak a síkon a $k_1, k_2, \ldots, k_n (n \geq 2)$ egységkörök úgy, hogy semelyik kettő nem érinti egymást, és a körök uniója összefüggő síktartomány. Legyen S a *körvonalak* metszéspontjainak halmaza. Bizonyítsuk be, hogy $|S| \geq n$. [2]

Mit számolunk kétszer: súlyozott illeszkedési mátrixban a súlyok összege
Nehézség: nehéz
Téma: geometria

Megoldás: Tekintsük azt az illeszkedési mátrixot, amelynek oszlopai a köröknek felelnek meg, sorai a körök metszéspontjainak, és egy adott sor adott oszlopában 1 van, ha a pont illeszkedik a körre, egyébként 0. Mivel a körök összefüggő ponthalmazt alkotnak, minden oszlopban legalább két 1-es van. Az is teljesül, hogy minden sorban is legalább két 1-es van, hiszen egy metszéspontot két kör határoz meg.

Vizsgáljunk most egy konkrét 1-est az illeszkedési mátrixban, legyen ez $a_{i,j} = 1$. Az i sorban minden 1-es egy olyan körnek felel meg, amely átmegy a sorhoz tartozó ponton. Ezek a körök két pontban metszik a j. kört, mert az érintés nem megengedett. Tehát az i- sor minden $a_{i,j}$-től különböző egyeséhez hozzárendelhetünk egy $a_{i,j}$-től különböző 1-est a j. oszlopban. Vegyük észre, hogy a j. oszlopban lévő 1-esek nem tartozhatnak egynél több i. sorbeli 1-eshez, mert ez azt jelentené, hogy három egységkör átmegy ugyanazon a két ponton, amin lehetetlen. Tehát a j. oszlopban legalább annyi 1-es van, mint az i. sorban.

$$\begin{pmatrix} & & & & \vdots & & & \\ & 1 & \rightarrow & & 1 & & & \\ & \uparrow & & & \vdots & & & \\ \dots & 1 & \dots & & a_{i,j}=1 & \dots & 1 & \dots \\ & & & & \vdots & & \downarrow & \\ & & & & 1 & \leftarrow & 1 & \\ & & & & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Most – kétféle módon – súlyokat rendelünk a mátrix 1-eseihez. Ha az i. sorban R_i egyes van, akkor az $\frac{a_{i,j}}{R_i}$ súlyok összege r, a mátrix sorainak száma. Hasonló módon ha a j. oszlopban C_j egyes van, akkor az $\frac{a_{i,j}}{C_j}$ súlyok összege c, az oszlopok száma. (A mátrix 0 elemeinél mindegy, hogy elvégezzük-e az osztást.)

Fent láttuk, hogy minden 1-es oszlopában több 1-es van, mint a sorában. Innen

$$r = \sum_{i,j} \frac{a_{i,j}}{R_i} \geq \sum_{i,j} \frac{a_{i,j}}{C_j} = c,$$

vagyis a sorok (és így a metszéspontok) száma legalább annyi, mint az oszlopok (tehát a körök) száma.

11. Adott a síkon az n-elemű S ponthalmaz és a k pozitív egész úgy, hogy

(i) semelyik három S-beli pont nem esik egy egyenesre;

(ii) minden S-beli P ponthoz létezik legalább k olyan S-beli pont, amelyek P-től egyenlő távol vannak.

Bizonyítsuk be, hogy $k < \dfrac{1}{2} + \sqrt{2n}$. [3]

Mit számolunk kétszer: S-beli pontokat összekötő szakaszok **Nehézség:** nehéz **Téma:** pontok, kolinearitás, távolságok

Megoldás: Rendezzük át a bizonyítandó egyenlőtlenséget: $k < \dfrac{1}{2} + \sqrt{2n} \Leftrightarrow n > \frac{k(k-1)}{2} + \frac{1}{8}$. Mivel n és k egész, elég megmutatni, hogy $n > \binom{k}{2}$.

Számoljuk meg az S-beli pontpárokat kétféle módon. Egyrészt nyilván $\binom{n}{2}$ pont van.

Másrészt minden pontnak van legalább k olyan szomszédja, akik tőle egyenlő távol vannak. Válasszunk minden ponthoz egy olyan sugarú kört, aminek a pont a középpontja, és a körön legalább k pont van S-ből. Egy ilyen körön a pontok legalább $\binom{k}{2}$ párt határoznak meg, és mivel két ilyen körnek legfeljebb két közös (S-beli) pontja lehet, ezért legfeljebb $\binom{n}{2}$ párt számoltunk kétszer. Tehát

$$n\binom{k}{2} - \binom{n}{2} \leq \binom{n}{2} \Leftrightarrow n - 1 \geq \binom{k}{2}.$$

12. Legyen $n \geq 4$ rögzített egész. Az $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ olyan pontok halmaza a síkon, hogy semelyik három nem kollineáris és semelyik négy nem esik egy körvonalra. Legyen a_t azon $P_iP_jP_k$ körök száma, amelyek belsejükben tartalmazzák a P_t pontot, és legyen $m(S) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan csak n-től függő $f(n)$ egész, hogy S pontjai akkor és csak akkor csúcsai egy konvex sokszögnek, ha $m(S) = f(n)$. [4]

Mit számolunk kétszer: $(\{A, B, C\}, D)$ négyesek, ahol ABC körülírt körének belsejébe esik D **Nehézség:** nehéz **Téma:** pontok, körülírt kör, konvexitás

Megoldás: Vizsgáljuk először az $n = 4$ esetet. Ha a pontok konvex burka háromszög, akkor $m(S) = 1$ és a ponthalmaz nem egy konvex sokszög csúcsainak halmaza. Ha pedig P_1, P_2, P_3, P_4 egy konvex négyszög csúcsai, akkor mondjuk a P_1P_2 oldalt vizsgálva feltehetjük, hogy $P_1P_3P_2\sphericalangle > P_1P_4P_2\sphericalangle$, amiből az következik, hogy P_4 a $P_1P_3P_2$ körülírt körének belső pontja, P_3 pedig a $P_1P_4P_2$ körülírt körének külső pontja. A P_3P_4 oldalra hasonló elemzés végezhető el, így ebben az esetben $m(S) = 2$.

Tehát $f(4) = 2$.

Most tegyük fel, hogy $n > 4$ és jelölje $k(S)$ az S négyelemű konvex részhalmazainak számát. Az S akkor és csak akkor lesz egy konvex sokszög csúcsainak halmaza, ha minden négyelemű részhalmaza konvex, ezért $k(S)$ és $m(S)$ kapcsolatát keressük.

Az olyan $(\{A, B, C\}, D)$ négyesek száma, ahol ABC körülírt körének belsejébe esik D éppen $m(S)$. Az $n = 4$ esetben láttuk, hogy minden konvex négyes 2-őt ad $m(S)$-hez, és minden „konkáv” négyes 1-et. Emiatt

$$m(S) = k(S) + \binom{n}{4}.$$

Mivel arra van szükségünk, hogy minden négyes konvex legyen, így $f(n) = 2\binom{n}{4}$, ekkor ugyanis $m(S) = f(n)$-ből $k(S) = \binom{n}{4}$ következik.

13. Ha a csúcsokat megkülönböztetjük, akkor n^{n-2} különböző n-csúcsú fagráf létezik.

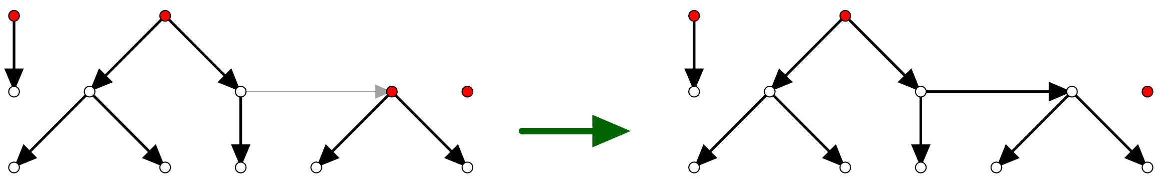
Mit számolunk kétszer: gyökeres fák irányított éleinek sorozata **Nehézség:** nehéz **Téma:** gráfok

Megoldás: Jelölje T_n a keresett számot. Két trükköt is bevetünk. Először is nem a fákat, hanem a „gyökeres” fákat fogjuk számolni. Ez annyit jelent csupán, hogy van egy kijelölt csúcsa a a fának. A „gyökeret” lehet arra használni, hogy egy onnan induló bejárás „megirányítja” a fa éleit. A másik trükk, hogy az irányított élek sorozatával fogjuk jellemezni a fát. Tehát amit kétféle módon számolunk: az $\{1, 2, \ldots, n\}$ csúcsokon készíthető gyökeres fák irányított éleinek sorozatai.

Egy fa gyökere n-féle lehet, és mivel az n-csúcsú fának $n - 1$ éle van, ezért az irányított élek sorozatainak száma $(n - 1)!$. Azt kaptuk, hogy a vizsgált mennyiségünk

$$T_n \cdot n \cdot (n - 1)! = n! \cdot T_n.$$

Most építsük fel úgy az irányított gyökeres fát, hogy egyesével hozzáadjuk az irányított éleket. Kezdetben van n darab izolált csúcsunk, a felépítés során valamikor k darab gyökeres irányított fánk. Új él csak olyan vehető fel, ami valamelyik csúcsot egy másik fa gyökerével köt össze.



Az új irányított él kezdőpontja tehát n-féle lehet, végpontja viszont csak $(k-1)$-féle. Amikor berajzoltuk, eggyel csökkent a komponensek száma. Ezért összesen

$$\prod_{k=2}^{n} n(k - 1) = n^{n-1} \cdot (n - 1)!$$

a lehetőség száma.

A kapott eredmények egybevetésével:

$$n! \cdot T_n = n^{n-1} \cdot (n - 1)! \Rightarrow T_n = n^{n-2}.$$

További feladatok

1. Egy iskolába 2007 lány és 2007 fiú jár. Bármely tanuló legfeljebb 100 iskolai klub tagja. Ha veszünk egy tetszőleges fiút és egy tetszőleges lányt, akkor mindig teljesül, hogy létezik legalább egy klub, amelynek ők mindketten tagjai. Mutassuk meg, hogy van olyan klub, amelynek legalább 11 lány és legalább 11 fiú tagja van. [3]

Mit számolunk kétszer: fiú–lány–klub hármasok **Nehézség:** nehéz **Téma:** klubok

Megoldás: Jelölje n az (f, l, k) hármasok számát, ahol f egy fiút, l egy lányt jelöl, c pedig egy olyan klubot, amelynek mindketten tagjai.

Mivel minden ellenkező nemű párhoz van legalább egy klub, ezért

$$n \geq 2007^2 = 4028049.$$

Most indirekt tegyük fel, hogy nincs a feltételeknek megfelelő klub. Jelölje X azon klubok halmazát, amelyeknek legfeljebb 10 fiú tagja, Y pedig azokat, ahol legalább 11 fiú van (és így az indirekt feltevés miatt legfeljebb 10 lány).

Az olyan (f, l, k) hármasok száma, ahol $k \in X$, legfeljebb $10 \cdot 2007 \cdot 100 = 2007000$, mert l 2007-féle lehet, adott l-hez k legfeljebb 100-féle, végül adott k-hoz f legfeljebb 10-féle. Hasonlóan $k \in Y$ esetén is legfeljebb 2007000 hármas létezik. Így

$$n \leq 2 \cdot 2007000 = 4014000,$$

ellentmondás.

2. Egy egyetemre 10001 hallgató jár. A hallgatók különböző klubokat hozhatnak létre, a klubok társaságokat alakíthatnak. Egy hallgató több klub tagjai is lehet, egy klub több társasághoz is tartozhat. Összesen k társaság van. Tudjuk a következőket:

   (i) bármely két hallgatóhoz pontosan egy klub van, amelynek mindketten tagjai;

   (ii) egy adott hallgatóhoz és egy társasághoz pontosan egy klub létezik, amely a társasághoz tartozik, és amelynek a hallgató tagja;

   (iii) minden klubnak páratlan sok tagja van és ha egy klub taglétszáma $2m + 1$ ($m > 0$), akkor a klub pontosan m társasághoz tartozik.

   Mennyi lehet k értéke? [3]

Mit számolunk kétszer: hallgató–klub–társaság hármasok **Nehézség:** nehéz **Téma:** klubok

Megoldás: Számoljuk meg kétféle módon a (H, K, T) hármasokat, ahol a H hallgató a K klub tagja és a K klub a T társasághoz tartozik.

Egyrészt ez a szám $10001k$, mert minden hallgatóhoz és minden társasághoz pontosan egy klub tartozik (ii).

Másrészt minden K_i klub pontosan $\frac{|K_i|-1}{2}$ társasághoz tartozik (iii) miatt, tehát a megfelelő hármasokat klubok szerint számolva

$$\sum_i \frac{|K_i|(|K_i| - 1)}{2},$$

adódik.

A kapott összeg (i) alapján éppen a hallgatókból álló párok száma (bármely két hallgatóhoz egy klub létezik), ami $\binom{10001}{2}$.

Az eddigiekből

$$10001k = \binom{10001}{2} \Rightarrow k = 5000.$$

3. Jelölje P az $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ összesen 49 elemű részhalmazának halmazát. Minden $T \in P$ halmazhoz hozzárendeltünk egy $n(T) \in S$ számot. Mutassuk meg, hogy megadható egy 50 elemű $M \subset S$ részhalmaz úgy, hogy bármely $x \in M$ esetén $n(M \setminus \{x\}) \neq x$. [7]

Mit számolunk kétszer: tiltott 50-elemű részhalmazok **Nehézség:** közepes **Téma:** részhalmazok

Megoldás: Összesen $\binom{100}{50}$ 50-elemű részhalmaza van S-nek. Nevezzük „tiltottnak” azokat az 50-elemű részhalmazokat, amelyekhez létezik $x \in M$, amire $n(M \setminus \{x\}) = x$. Elég megmutatnunk, hogy a tiltott halmazok száma kevesebb, mint $\binom{100}{50}$.

Vegyük észre, hogy minden $T \in P$ halmazhoz létezik legfeljebb egy tiltott halmaz, konkrétan $T \cup \{n(T)\}$. (Ez akkor lesz tiltott halmaz, ha $n(T) \notin T$.) Tehát legfeljebb annyi tiltott halmaz van, ahány 49-elemű részhalmaz.

Ezzel készen vagyunk, mert $\binom{100}{49} < \binom{100}{50}$.

4. Tizenhat diák vett részt egy tesztversenyen, ahol minden kérdésre négy megadott válasz közül kellett az egyetlen helyeset kiválasztani. A verseny után kiderült, hogy bármely két versenyző legfeljebb egy kérdésre adta ugyanazt a választ. Legfeljebb hány kérdés lehetett a versenyen? [4]

Mit számolunk kétszer: adott feladatra azonos választ adó diák párok
Nehézség: közepes, a konstrukció nehéz
Téma: diákok, feladatok, verseny

Megoldás: Legyen a kérdések száma K, az adott feladatra azonos választ adó diák párok száma pedig P. Diák páronként legfeljebb egy egybeesés lehet, így $P \leq \binom{16}{2}$.

Kérdésenként számolva akkor legkevesebb a párok száma, ha minden választípusból négy született az adott kérdésre. Ezért $P \geq K \cdot 4 \cdot \binom{4}{2} = 24K$.

Azt kaptuk, hogy $\binom{16}{2} \geq P \geq 24K$, ahonnan $K \leq 5$.

Most megadunk egy konstrukciót $K = 5$-re.

versenyző	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
1	A	A	A	A	A
2	A	B	B	B	B
3	A	C	C	C	C
4	A	D	D	D	D
5	B	A	C	D	B
6	B	C	A	B	D
7	B	D	B	A	C
8	B	B	D	C	A
9	C	A	D	B	C
10	C	D	A	C	B
11	C	B	C	A	D
12	C	C	B	D	A
13	D	A	B	C	D
14	D	B	A	D	C
15	D	C	D	A	B
16	D	D	C	B	A

Magyarázat: az $\mathbb{F}_4$ testből képezzük az $\mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_4$ véges affin síkot. A sík pontjai a tanulók. A sík egyenesei 5 osztályba sorolhatók meredekség szerint. Egy osztály feleljen meg egy kérdésnek. A párhuzamos egyenesek 4 négyes csoportra osztják a pontokat. Színezzük négy színnel a párhuzamosokat, egy szín egy lehetséges válasznak felel meg.

Hivatkozások

[1] Dobos S., Hraskó A., Laczkó L., Surányi L. *Feladatok a nagyvilágból*

[2] Yufei Zhao *Counting in Two Ways*

[3] Law Ka Ho, Leung Tat Wing, Li Kin Yin *Double Counting*

[4] Yufei Zhao *Combinatorics*

[5] 56. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia

[6] Peng Shi *The Art of Counting*

[7] Stephan Wagner *Combinatorics*