A skalárszorzat

1. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja, súlypontja és a háromszög köré írt kör középpontja egy egyenesen vannak, és a súlypont harmadolja a magasságpont és a köré írt kör középpontja közötti szakaszt! (*Euler-féle egyenes*)

2. Az ABC háromszög síkjában melyik P pontra lesz a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg minimális?

3. Az a, b, c oldalú háromszög köré írt körének sugara r, ennek középpontját a magasságponttal m hosszúságú szakasz köti össze. Bizonyítsuk be, hogy:
$$m^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

4. Az MAB egyenlő szárú háromszög M csúcsán két egyenes megy át, u és v. Az A pontból u-ra, B-ből v-re bocsátott merőlegesek metszéspontja W. Az A-ból MA-ra bocsátott merőleges messe u-t U-ban, a B-ből MB-re bocsátott merőleges messe v-t V-ben. Bizonyítsuk be, hogy UV merőleges MW-re.

5. Mutassuk meg, hogy egy háromszög szögeire fennáll:
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$
.

6. Bizonyítsd be, hogy a háromszög oldalaira fennáll:
$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \le 3abc.$$

7. Az ABC háromszögben az A és B csúcsból induló súlyvonalak merőlegesek egymásra. Igazoljuk a C csúcsnál lévő γ szögre, hogy
$$\cos\gamma \ge \frac{4}{5}.$$
.

8. Oldjuk meg a következő egyenletet!
$$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos u + \sin u \cdot \cos x = \frac{3}{2}$$

9. Igazoljuk, hogy bármely x, y-ra igaz, hogy:
$$x^2 + y^2 + 1 \ge x + y + xy!$$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$-re fennáll, hogy
$$a + 2b + 3c \ge 14,$$
akkor igaz, hogy
$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 14.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy:
$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \ge (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2.$$
(*Bunyakovszkij-Cauchy-féle egyenlőtlenség*)

12. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjén 1, -1 vagy 0 áll. Bármelyik két sort választjuk is ki, és a két sor azonos oszlopban lévő elemeit összeszorozzuk, akkor a kapott szorzatok összege zérus. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatban található számok összege nem nagyobb, mint $n\sqrt{n}$!