

A skalárszorzat

1. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja, súlypontja és a háromszög köré írt kör középpontja egy egyenesen vannak, és a súlypont harmadolja a magasságpont és a köré írt kör középpontja közötti szakaszt! (*Euler-féle egyenes*)
2. Az ABC háromszög síkjában melyik P pontra lesz a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg minimális?
3. Az a, b, c oldalú háromszög köré írt körének sugara r , ennek középpontját a magasságponttal m hosszúságú szakasz köti össze. Bizonyítsuk be, hogy:

$$m^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

4. Az MAB egyenlő szárú háromszög M csúcsán két egyenes megy át, u és v . Az A pontból u -ra, B -ből v -re bocsátott merőlegesek metszéspontja W . Az A -ból MA -ra bocsátott merőleges messe u -t U -ban, a B -ből MB -re bocsátott merőleges messe v -t V -ben. Bizonyítsuk be, hogy UV merőleges MW -re.
5. Mutassuk meg, hogy egy háromszög szögeire fennáll:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

6. Bizonyítsd be, hogy a háromszög oldalaira fennáll:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

7. Az ABC háromszögben az A és B csúcsból induló súlyvonalak merőlegesek egymásra. Igazoljuk a C csúcsnál lévő γ szögére, hogy

$$\cos \gamma \geq \frac{4}{5}.$$

8. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos u + \sin u \cdot \cos x = \frac{3}{2}$$

9. Igazoljuk, hogy bármely x, y -ra igaz, hogy:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq x + y + xy!$$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ -re fennáll, hogy

$$a + 2b + 3c \geq 14,$$

akkor igaz, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 14.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2.$$

(*Bunyakovszkij-Cauchy-féle egyenlőtlenség*)

12. Egy $n \times n$ -es táblázat minden mezőjén $1, -1$ vagy 0 áll. Bármelyik két sort választjuk is ki, és a két sor azonos oszlopban lévő elemeit összeszorozzuk, akkor a kapott szorzatok összege zérus. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatban található számok összege nem nagyobb, mint $n\sqrt{n}$!