

## (Matektábor 2014 – 9/10)

- {-----}
- 1.) Ki lehet-e tölteni úgy egy  $3 \times 4$ -es táblázatot 1-12-ig egészekkel (minden szám 1X írandó!), hogy bármely két élben szomszédos mező összege prím legyen?
- {-----}
- 2.) Egy  $8 \times 8$ -as sakktábla 64 mezője közül néhánynak valamelyik átlóját behúztuk. Legfeljebb hány átlót húztunk be, ha semelyik átlónak nincs közös pontja semelyik másik átlóval?
- {-----}
- 3.) a.) Hányféleképpen lehet egy  $2 \times 2$ -es táblázat négy mezőjét két színnel úgy kiszínezni, hogy minden mezőben pontosan az egyik színt használjuk fel?  
b.) Egy  $n \times m$ -es táblázatot készítettünk, a mezőit két színnel (a fenti módon) kiszíneztük. Azt figyeltük meg, hogy az a.) pontnál kapott összes lehetőség előfordul az  $n \times m$ -es táblám valamely összefüggő  $2 \times 2$ -es részében.  
Mekkora az  $n \times m$  lehetséges legkisebb értéke?  
c.) Ha az  $n \times m$ -es táblázatom(=*négyzetrácsom*) nem a síkon veszem fel, hanem egy olyan felületen, ahol az egyes rácsnégyzeteknél a szomszédságot hasonlóan értelmezhetjük, mint a síkon akkor tudunk-e csökkenteni a b.) nél kapott  $n \times m$  értéken?
- {-----}
- 4.) Egy  $n \times n$ -es táblázat  $n^2$  mezőjét kiszíneztem két színnel úgy, hogy a táblázatban sehol sincs egy olyan  $k \times 1$ -es „altéglalap”, melynek mind a négy sarokmezője egyforma színű. Mekkora lehet  $n$  lehetséges legnagyobb értéke?
- {-----}
- 5.) Egy  $n \times n$ -es táblázat  $n^2$  mezőjét kiszíneztem két színnel (pirossal, és késsel) úgy, hogy a táblázatban sehol sincs három közvetlenül egymás melletti azonos színű mező sem vízszintesen / sem függőlegesen / sem átlósan.  
a.) Igazold, hogy ekkor  $n > 4$  esetén a táblázat valamennyi  $3 \times 3$ -as összefüggő „altáblájának” pontosan 2 piros, és 2 kék sarokmezője van!  
b.) Igazold, hogy  $n = 4$  esetén ki lehet úgy színezni a táblázat 16 mezőjét, hogy a táblázat mind a 4 lehetséges  $3 \times 3$ -as összefüggő „altáblájának” páratlan számú kék sarokmezője van!
- {-----}
- 6.) Egy  $n \times n$ -es táblázat  $n^2$  mezőjét kitöltöm  $-1$ -gyesekkel, és  $+1$ -gyesekkel. Hányféle olyan kitöltés van, ahol valamennyi sorban, és valamennyi oszlopban a számok szorzata  $+1$ ? (Mint kiderült, lásd 12-es előadás!)
- {-----}
- 7.) Egy  $n \times n$ -es táblázat  $n^2$  mezőjében valós számok állnak. Egy lépésben bármely két mezőt kiválasztva az ottani számokat letörlöm, és helyette az átlagukat írom be. Mely  $n$ -ekre érhető el tetszőleges kezdőállapotból olyan táblázat, melynek minden mezőjén azonos szám áll?
- {-----}
- 8.) Egy  $9 \times 9$ -es táblázatot szeretnék kitölteni úgy az 1-81 közötti egészekkel, hogy  
a.) Minden szám pontosan egyszer forduljon elő,  
b.) Valamennyi  $3 \times 3$ -as összefüggő „altáblázatban” a számok összege ugyanannyi legyen!  
Elvégezhető-e a kitöltés?