

Galambok és skatulyák... (Matektábor 2014 – 7/8)

{-----}
...bevezető példák...
{-----}

1.)

Adott öt pont egy gömb felületén. Bizonyítsuk be, hogy van olyan zárt félgömbfelület, amely e pontok közül legalább négyet tartalmaz.

{-----}

2.)

Adott a koordináta-rendszerben 5 rácspont. Igazold, hogy van közöttük két olyan, hogy a felezőpontjuk is rácspont.

{-----}

...galambok és számelmélet...

3.)

Adott 51 egész szám 1 és 100 között. Igazold, hogy kiválasztható közülük kettő egymáshoz relatív prím.

{-----}

4.)

Adott 51 egész szám 1 és 100 között. Igazold, hogy kiválasztható közülük kettő, hogy az egyik osztja a másikat!

{-----}

5.)

Bizonyítsuk be, hogy ha 52 különböző pozitív egész szám egyike sem nagyobb 100-nál, akkor kiválasztható a számok közül három úgy, hogy közülük kettőnek az összege egyenlő a harmadikkal.

{-----}

6.)

100 kavicsot 50 kupacba raktunk, mindegyikbe legalább egyet. Bizonyítsuk be, hogy ha egyetlen kupacban sincs 50-nél több kavics, akkor a kupacok két csoportba rendezhetők úgy, hogy a két csoportban ugyanannyi kavics van.

{-----}

7.)

Adott száz pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy ki lehet választani közülük egyet vagy többet úgy, hogy a kiválasztott szám vagy a kiválasztott számok összege százzal osztható legyen.

{-----}

8.)

Bizonyítsuk be, hogy 502 természetes szám között mindig található kettőt, amelyek különbsége vagy összege osztható ezerrel.

{-----}

9.)

Igazold, hogy a 2014-nek van olyan többszöröse, ami csak a 0, és az 1 jegyekből áll!

{-----}

...galambok és geometria...

- 10.) Egy egységnyi oldalú négyzet belsejében elhelyeztünk 9 pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok által meghatározott háromszögek között van legalább kettő, amelynek területe $1/8$ -nál kisebb.
{-----}
- 11.) A Hupikék Törpikék 110×120 méteres gombaerdőjében 21 darab 1 méter átmérőjű gomba áll. A törpök szeretnék egy 19×29 méteres törplabdapályát kijelölni az erdőben. Lehetséges-e ez anélkül, hogy egyetlen gombát is ki kellene vágniuk?
{-----}
- 12.) Bizonyítsuk be, hogy konvex poliédernek van legalább két olyan lapja, amelynek oldalszáma egyenlő.
{-----}

...galambok és halmazok/kombinatorika/gráfok...

- 13.) (Városok Viadala 1985-86 ősze)
Két játékos egymással sakkozik sakkórát használva (ha az egyik játékos lépett, megállítja a saját óráját és elindítja ellenfeléét). Amikor a játékosok befejezték negyvenedik lépésüket, mindkét óra 2 óra 30 percet mutatott. Bizonyítsa, hogy a játék során volt olyan pillanat, amikor az egyik óra pontosan 1 perccel és 51 másodperccel mutatott kevesebbet a másikonál!
Igaz-e biztosan, hogy a két óraállás közötti különbség valamikor pontosan két perc volt?
{-----}
- 14.) (Amerikai versenyfeladat) *
Egy 4×7 -es táblázat minden mezőjét kiszínezzük fehérre, vagy feketére. Igazold, hogy van a táblázatban valahol egy olyan „altábla” (ez lehet maga az egész táblázat is!), melynek mind a négy sarka azonos színű!
{-----}
- 15.) (Orosz versenyfeladat – Városok Viadala alapján) *
Józsi bácsi áprilisban (30 nap) mindennap megevett legalább egy répát, de összesen nem evett meg 45 répánál többet. Igazold, hogy volt áprilisban néhány olyan egymást követő nap, hogy ezeken összesen pontosan 14 répát evett meg Józsi bácsi.
{-----}
- 16.) **
Tekintsünk egy legfeljebb kétjegyű pozitív egész számokból álló 10 elemű halmazt. Bizonyítsuk be, hogy ennek a halmaznak mindig van két olyan közös elem nélküli részhalmaza, amelyekben az elemek összege egyenlő!
{-----}

...galambok és (nekem) piszok nehéz feladatok...

- 17.) ***
Adott 101 különböző valós szám egy listára írva. Igazold, hogy lehúzható a listáról 90 szám úgy, hogy a maradék 11 szám vagy egy növekvő, vagy egy csökkenő sorozatot képezzen. Mi a helyzet, ha csak 100 számunk van?
{-----}
- 18.) (Putnam 1993/A4) ****
Adott 19 pozitív egész szám egy A csoportja, úgy, hogy az A-beli számok mindegyike kisebb, vagy egyenlő, mint 93. Valamint adott 93 pozitív egész szám egy B csoportja, úgy, hogy az itteni számok mindegyike kisebb, vagy egyenlő, mint 19. Igazold, hogy kiválasztható az A csoportból néhány (de legalább egy!) szám, és a B csoportból néhány szám, hogy az A-beli számok összege megegyezzen a B-beli számok összegével