A korona ékkövei

matematikai indukció példákon keresztül

9.C

BDG Matektábor

2014. október 1.

Tartalom

- Mi az a *matematikai indukció*?

Tartalom

- Mi az a *matematikai indukció*?
- Algebrai példák

Tartalom

- Mi az a *matematikai indukció*?
- Algebrai példák
- Geometriai példák

Tartalom

- Mi az a *matematikai indukció*?
- Algebrai példák
- Geometriai példák
- Gráfok

A matematikai indukció

sejtés/állítás: Bizonyítandó az $A(n)$ állítás, minden n pozitív egészre.

A matematikai indukció

sejtés/állítás: Bizonyítandó az $A(n)$ állítás, minden n pozitív egészre.

bázis: Megmutatjuk, hogy „kis" n-ekre igaz.

A matematikai indukció

sejtés/állítás: Bizonyítandó az $A(n)$ állítás, minden n pozitív egészre.

bázis: Megmutatjuk, hogy „kis” n-ekre igaz.

indukciós feltevés: Feltételezzük, hogy az állítás igaz k-ig.

A matematikai indukció

sejtés/állítás: Bizonyítandó az $A(n)$ állítás, minden n pozitív egészre.

bázis: Megmutatjuk, hogy „kis" n-ekre igaz.

indukciós feltevés: Feltételezzük, hogy az állítás igaz k-ig.

indukciós lépés: Bizonyítjuk, hogy ha igaz k-ig, akkor igaz $(k+1)$-ig is.

A matematikai indukció

A matematikai indukció

- sejtés / állítás

A matematikai indukció

- sejtés / állítás
- bázis

A matematikai indukció

- sejtés / állítás
- bázis
- indukciós feltevés

A matematikai indukció

- sejtés / állítás
- bázis
- indukciós feltevés
- indukciós lépés

Tartalom

- Mi az a *matematikai indukció*? ✓
- **Algebrai példák**
- Geometriai példák
- Gráfok

1. példa

Számok összege

Minden $n \in \mathbb{N}, n > 0$ esetén

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. példa

Számok összege

Minden $n \in \mathbb{N}, n > 0$ esetén

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bázis: $n = 1:$ $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ $= 1$

1. példa

Számok összege

Minden $n \in \mathbb{N}, n > 0$ esetén

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bázis:

$$\begin{aligned} n = 1: &\qquad 1 = \tfrac{1 \cdot 2}{2} &&= 1 \\ n = 2: &\qquad 1 + 2 = \tfrac{2 \cdot 3}{2} &&= 3 \end{aligned}$$

1. példa

Számok összege

Minden $n \in \mathbb{N}, n > 0$ esetén

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bázis:

$$\begin{aligned}
n = 1: &\quad 1 = \tfrac{1 \cdot 2}{2} &= 1 \\
n = 2: &\quad 1 + 2 = \tfrac{2 \cdot 3}{2} &= 3 \\
n = 3: &\quad 1 + 2 + 3 = \tfrac{3 \cdot 4}{2} &= 6
\end{aligned}$$

1. példa

Számok összege

Minden $n \in \mathbb{N}, n > 0$ esetén

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bázis:

$$\begin{aligned}
n = 1: \quad & 1 = \tfrac{1 \cdot 2}{2} && = 1\\
n = 2: \quad & 1 + 2 = \tfrac{2 \cdot 3}{2} && = 3\\
n = 3: \quad & 1 + 2 + 3 = \tfrac{3 \cdot 4}{2} && = 6\\
n = 4: \quad & 1 + 2 + 3 + 4 = \tfrac{4 \cdot 5}{2} && = 10
\end{aligned}$$

Állítás: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Állítás: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Állítás: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Állítás: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Állítás: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n=1,2,3,4$

Feltevés: $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás:

Állítás: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ ?$$

Állítás: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ ?$$

$$(k+1)(\frac{k}{2}+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ ?$$

Állítás: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n=1,2,3,4$

Feltevés: $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás:

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\ ?$$

$$(k+1)(\tfrac{k}{2}+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\ ?$$

$$\frac{k}{2}+1=\frac{k+2}{2}\ ?$$

Állítás: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ ?$$

$$(k + 1)(\tfrac{k}{2} + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ ?$$

$$\frac{k}{2} + 1 = \frac{k+2}{2} \ ?$$

$$\frac{k+2}{2} = \frac{k+2}{2}$$

Állítás: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ ?$$

$$(k+1)(\frac{k}{2} + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ ?$$

$$\frac{k}{2} + 1 = \frac{k+2}{2} \ ?$$

$$\frac{k+2}{2} = \frac{k+2}{2} \qquad \checkmark$$

2.példa

Négyzetszámok összege

Minden $n \in \mathbb{N}, n > 0$ esetén

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.példa

Négyzetszámok összege

Minden $n \in \mathbb{N}, n > 0$ esetén

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bázis: $n = 1:$ $\qquad 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \qquad = 1$

2.példa

Négyzetszámok összege

Minden $n \in \mathbb{N}, n > 0$ esetén

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bázis:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad & 1^2 = \tfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} && = 1 \\ n = 2: \quad & 1^2 + 2^2 = \tfrac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} && = 5 \end{aligned}$$

2.példa

Négyzetszámok összege

Minden $n \in \mathbb{N}, n > 0$ esetén

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bázis:

$$\begin{aligned}
n = 1: &\quad 1^2 = \tfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6} &&= 1\\
n = 2: &\quad 1^2 + 2^2 = \tfrac{2\cdot 3\cdot 5}{6} &&= 5\\
n = 3: &\quad 1^2 + 2^2 + 3^2 = \tfrac{3\cdot 4\cdot 7}{6} &&= 14
\end{aligned}$$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n = 1, 2, 3$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n = 1, 2, 3$

Feltevés: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n = 1, 2, 3$

Feltevés: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Cél: $1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n = 1, 2, 3$

Feltevés: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Cél: $1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Bizonyítás: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n = 1, 2, 3$

Feltevés: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Cél: $1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Bizonyítás: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$$= \frac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+1) + 6k + 6\big) =$$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n = 1, 2, 3$

Feltevés: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Cél: $1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Bizonyítás: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$$= \frac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+1) + 6k + 6\big) =$$

$$= \frac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+3) - 2k + 6k + 6\big) =$$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n = 1, 2, 3$

Feltevés: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Cél: $1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Bizonyítás: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$$= \frac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+1) + 6k + 6\big) =$$
$$= \frac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+3) - 2k + 6k + 6\big) =$$
$$= \frac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+3) + 4k + 6\big) =$$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n = 1, 2, 3$

Feltevés: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Cél: $1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Bizonyítás: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$$= \frac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+1) + 6k + 6\big) =$$

$$= \frac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+3) - 2k + 6k + 6\big) =$$

$$= \frac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+3) + 4k + 6\big) =$$

$$= \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3) =$$

Állítás: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n=1,2,3$

Feltevés: $1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Cél: $1^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Bizonyítás: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{k+1}{6}(k\cdot(2k+1)+6k+6)=\\
&=\frac{k+1}{6}(k\cdot(2k+3)-2k+6k+6)=\\
&=\frac{k+1}{6}(k\cdot(2k+3)+4k+6)=\\
&=\frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)=\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}
$$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bázis: $n = 1, 2, 3$

Feltevés: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Cél: $1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Bizonyítás: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+1) + 6k + 6\big) = \\
&= \tfrac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+3) - 2k + 6k + 6\big) = \\
&= \tfrac{k+1}{6}\big(k \cdot (2k+3) + 4k + 6\big) = \\
&= \tfrac{k+1}{6}(k+2)(2k+3) = \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

„Jó ez így?”

Állítás $\rightarrow$ Bázis $\rightarrow$ Bizonyítás

„Jó ez így?”

Állítás $\to$ Bázis $\to$ Bizonyítás

Bázis $\to$ Sejtés $\to$ Bizonyítás

„Jó ez így?”

Állítás $\to$ Bázis $\to$ Bizonyítás

Bázis $\to$ Sejtés $\to$ Bizonyítás $\checkmark$

3.példa

Különbségek

Számoljuk ki: $100 - (99 - \ldots - (2 - 1)\ldots)$

3.példa

Különbségek

Számoljuk ki: $100 - (99 - \ldots - (2 - 1)\ldots)$

Bázis: $n = 2:$ $\qquad 2 - 1 = 1$

3.példa

Különbségek

Számoljuk ki: $100 - (99 - \ldots - (2-1)\ldots)$

Bázis: $n = 2:$ $\quad 2 - 1 = 1$

$n = 3:$ $\quad 3 - (2 - 1) = 2$

3.példa

Különbségek

Számoljuk ki: $100 - (99 - \ldots - (2 - 1) \ldots)$

Bázis:
$$n = 2: \quad 2 - 1 = 1$$
$$n = 3: \quad 3 - (2 - 1) = 2$$
$$n = 4: \quad 4 - (3 - (2 - 1)) = 2$$

3.példa

Különbségek

Számoljuk ki: $100 - (99 - \ldots - (2 - 1)\ldots)$

Bázis:

$$\begin{aligned} n = 2 :& \quad 2 - 1 = 1 \\ n = 3 :& \quad 3 - (2 - 1) = 2 \\ n = 4 :& \quad 4 - (3 - (2 - 1)) = 2 \\ n = 5 :& \quad 5 - (4 - (3 - (2 - 1))) = 3 \end{aligned}$$

3.példa

Különbségek

Számoljuk ki: $100 - (99 - \ldots - (2 - 1)\ldots)$

Bázis:

$$\begin{aligned}
n = 2 :& \quad 2 - 1 = 1 \\
n = 3 :& \quad 3 - (2 - 1) = 2 \\
n = 4 :& \quad 4 - (3 - (2 - 1)) = 2 \\
n = 5 :& \quad 5 - (4 - (3 - (2 - 1))) = 3 \\
n = 6 :& \quad 6 - (5 - (4 - (3 - (2 - 1)))) = 3
\end{aligned}$$

3.példa

Különbségek

Számoljuk ki: $100 - (99 - \ldots - (2-1)\ldots)$

Bázis:

$$\begin{aligned}
n = 2: &\quad 2 - 1 = 1 \\
n = 3: &\quad 3 - (2-1) = 2 \\
n = 4: &\quad 4 - (3 - (2-1)) = 2 \\
n = 5: &\quad 5 - (4 - (3 - (2-1))) = 3 \\
n = 6: &\quad 6 - (5 - (4 - (3 - (2-1)))) = 3 \\
n = 7: &\quad \\
&7 - (6 - (5 - (4 - (3 - (2-1))))) = 4
\end{aligned}$$

Sejtés:

- ha n páros akkor:
  $$n - \big((n-1) - \ldots - (2-1)\ldots\big) =$$
  $$= n/2$$
- ha n páratlan akkor:
  $$n - \big((n-1) - \ldots - (2-1)\ldots\big) =$$
  $$= (n+1)/2$$

Jelölje $f(n)$ a kifejezés értékét.

Sejtés: páros n-re $f(n) = n/2$, páratlan n-re $f(n) = (n+1)/2$

Bázis: $n = 2, 3, \ldots, 7$

Feltevés: k-ig igaz

Bizonyítás: $(k+1)$-re

Sejtés: páros n-re $f(n) = n/2$, páratlan n-re
$f(n) = (n+1)/2$

Bázis: $n = 2, 3, \ldots, 7$

Feltevés: k-ig igaz

Bizonyítás: $(k+1)$-re
Ha $k+1$ páros:

Sejtés: páros n-re $f(n) = n/2$, páratlan n-re
$f(n) = (n+1)/2$

Bázis: $n = 2, 3, \ldots, 7$

Feltevés: k-ig igaz

Bizonyítás: $(k+1)$-re
Ha $k+1$ páros:
$f(k+1) = (k+1) - f(k) =$

Sejtés: páros n-re $f(n) = n/2$, páratlan n-re $f(n) = (n+1)/2$

Bázis: $n = 2, 3, \ldots, 7$

Feltevés: k-ig igaz

Bizonyítás: $(k+1)$-re

Ha $k+1$ páros:

$f(k+1) = (k+1) - f(k) =$

$k + 1 - (k+1)/2 = (k+1)/2$

Sejtés: páros n-re $f(n) = n/2$, páratlan n-re $f(n) = (n+1)/2$

Bázis: $n = 2, 3, \ldots, 7$

Feltevés: k-ig igaz

Bizonyítás: $(k+1)$-re

Ha $k+1$ páros:

$f(k+1) = (k+1) - f(k) =$

$k + 1 - (k+1)/2 = (k+1)/2$

Ha $k+1$ páratlan:

Sejtés: páros n-re $f(n) = n/2$, páratlan n-re $f(n) = (n+1)/2$

Bázis: $n = 2, 3, \ldots, 7$

Feltevés: k-ig igaz

Bizonyítás: $(k+1)$-re

Ha $k+1$ páros:

$f(k+1) = (k+1) - f(k) =$

$k + 1 - (k+1)/2 = (k+1)/2$

Ha $k+1$ páratlan:

$f(k+1) = (k+1) - f(k)$

Sejtés: páros n-re $f(n) = n/2$, páratlan n-re
$f(n) = (n+1)/2$

Bázis: $n = 2, 3, \ldots, 7$

Feltevés: k-ig igaz

Bizonyítás: $(k+1)$-re

Ha $k+1$ páros:

$f(k+1) = (k+1) - f(k) =$

$k+1-(k+1)/2 = (k+1)/2$

Ha $k+1$ páratlan:

$f(k+1) = (k+1) - f(k)$

$= k+1-k/2 = (k+2)/2$ ✓

4.példa

Négyzetek különbsége

Számoljuk ki!

$$100^2 - (99^2 - (98^2 - (\ldots - (3^2 - (2^2 - 1^2))\ldots)$$

4.példa

Négyzetek különbsége

Számoljuk ki!

$$100^2 - (99^2 - (98^2 - (\ldots - (3^2 - (2^2 - 1^2))\ldots)$$

Bázis: $n = 2:$ $$2^2 - 1^2 = 3$$

4.példa

Négyzetek különbsége

Számoljuk ki!

$$100^2 - (99^2 - (98^2 - (\ldots - (3^2 - (2^2 - 1^2))\ldots)$$

Bázis: $n = 2:$ $\qquad 2^2 - 1^2 = 3$

$n = 3:$ $\qquad 3^2 - (2^2 - 1^2) = 6$

4.példa

Négyzetek különbsége

Számoljuk ki!

$$100^2 - (99^2 - (98^2 - (\ldots - (3^2 - (2^2 - 1^2)) \ldots)$$

Bázis:

$$\begin{aligned}
n = 2: &\quad 2^2 - 1^2 = 3 \\
n = 3: &\quad 3^2 - (2^2 - 1^2) = 6 \\
n = 4: &\quad 4^2 - (3^2 - (2^2 - 1^2)) = 10
\end{aligned}$$

4.példa

Négyzetek különbsége

Számoljuk ki!

$$100^2 - (99^2 - (98^2 - (\ldots - (3^2 - (2^2 - 1^2))\ldots)$$

Bázis:

$$\begin{aligned}
n = 2: &\quad 2^2 - 1^2 = 3 \\
n = 3: &\quad 3^2 - (2^2 - 1^2) = 6 \\
n = 4: &\quad 4^2 - (3^2 - (2^2 - 1^2)) = 10 \\
n = 5: &\quad 5^2 - (4^2 - (3^2 - (2^2 - 1^2))) = 15
\end{aligned}$$

4.példa

Négyzetek különbsége

Számoljuk ki!

$$100^2-(99^2-(98^2-(\ldots-(3^2-(2^2-1^2))\ldots)$$

Bázis:

$$n=2: \quad 2^2-1^2=3$$
$$n=3: \quad 3^2-(2^2-1^2)=6$$
$$n=4: \quad 4^2-(3^2-(2^2-1^2))=10$$
$$n=5: \quad 5^2-(4^2-(3^2-(2^2-1^2)))=15$$
$$n=6:$$
$$6^2-(5^2-(4^2-(3^2-(2^2-1^2))))=21$$

Sejtés: $n^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{n(n+1)}{2}$

Sejtés: $n^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Sejtés: $n^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Feltevés: $k^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{k(k+1)}{2}$

Sejtés: $n^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Feltevés: $k^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Sejtés: $n^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Feltevés: $k^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) =$

Sejtés: $n^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Feltevés: $k^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) =$

$$= (k+1)^2 - \frac{k(k+1)}{2} =$$

Sejtés: $n^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Feltevés: $k^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) =$

$$= (k+1)^2 - \frac{k(k+1)}{2} =$$

$$= (k+1)\left((k+1) - \frac{k}{2}\right) =$$

Sejtés: $n^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Feltevés: $k^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) =$

$$= (k+1)^2 - \frac{k(k+1)}{2} =$$
$$= (k+1)\left((k+1) - \frac{k}{2}\right) =$$
$$= (k+1)\left(\frac{(2k+2)-k}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Sejtés: $n^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{n(n+1)}{2}$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Feltevés: $k^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{k(k+1)}{2}$

Cél: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Bizonyítás: $(k+1)^2 - (\ldots - (2^2 - 1^2)\ldots) =$

$$= (k+1)^2 - \frac{k(k+1)}{2} =$$

$$= (k+1)\left((k+1) - \frac{k}{2}\right) =$$

$$= (k+1)\left(\frac{(2k+2)-k}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \checkmark$$

A Fibonacci-sorozat

A Fibonacci-sorozat úgy definiálható, hogy
$F_1 = 1, F_2 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, ha $n > 2$.

A Fibonacci-sorozat

A Fibonacci-sorozat úgy definiálható, hogy
$F_1 = 1, F_2 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, ha $n > 2$.

Az első néhány elem:
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$

5. példa

Fibonacci-számok összege

Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám összegét!

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = ?$$

5. példa

Az elemek: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

5. példa

Az elemek: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

n	F_n	össz
1	1	1

5. példa

Az elemek: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

n	F_n	össz
1	1	1
2	1	2

5. példa

Az elemek: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

n	F_n	össz
1	1	1
2	1	2
3	2	4

5. példa

Az elemek: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

n	F_n	össz
1	1	1
2	1	2
3	2	4
4	3	7

5. példa

Az elemek: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

n	F_n	össz
1	1	1
2	1	2
3	2	4
4	3	7
5	5	12

5. példa

Az elemek: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

n	F_n	össz
1	1	1
2	1	2
3	2	4
4	3	7
5	5	12
6	8	20

5. példa

Az elemek: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

n	F_n	össz
1	1	1
2	1	2
3	2	4
4	3	7
5	5	12
6	8	20
7	13	33

5. példa

Sejtés: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

5. példa

Sejtés: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

5. példa

Sejtés: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$

5. példa

Sejtés: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$

Cél: $F_1 + F_2 + \ldots + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$

5. példa

Sejtés: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$

Cél: $F_1 + F_2 + \ldots + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$

5. példa

Sejtés: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$

Cél: $F_1 + F_2 + \ldots + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$

Bizonyítás: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k + F_{k+1} =$

5. példa

Sejtés: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$

Cél: $F_1 + F_2 + \ldots + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$

Bizonyítás: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k + F_{k+1} =$

$= F_{k+2} - 1 + F_{k+1}$

5. példa

Sejtés: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$

Cél: $F_1 + F_2 + \ldots + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$

Bizonyítás: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k + F_{k+1} =$

$$= F_{k+2} - 1 + F_{k+1}$$

$$= F_{k+3} - 1$$

5. példa

Sejtés: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$

Cél: $F_1 + F_2 + \ldots + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$

Bizonyítás: $F_1 + F_2 + \ldots + F_k + F_{k+1} =$

$$= F_{k+2} - 1 + F_{k+1}$$

$$= F_{k+3} - 1 \qquad \checkmark$$

6. példa

Fibonacci-számok négyzetösszege

Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám négyzetösszegét!

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = ?$$

6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1

6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1
2	1	2

6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1
2	1	2
3	4	6

6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1
2	1	2
3	4	6
4	9	15

6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1
2	1	2
3	4	6
4	9	15
5	25	40

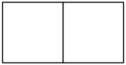
6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1
2	1	2
3	4	6
4	9	15
5	25	40

$\square$

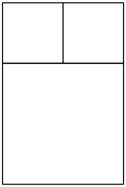
6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1
2	1	2
3	4	6
4	9	15
5	25	40



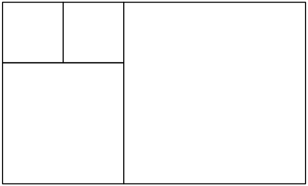
6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1
2	1	2
3	4	6
4	9	15
5	25	40



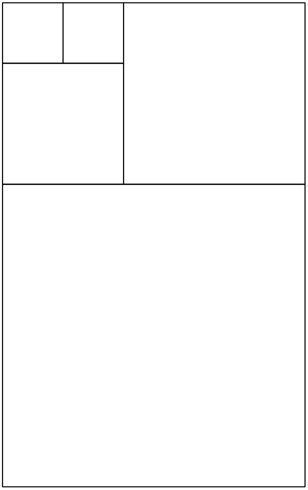
6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1
2	1	2
3	4	6
4	9	15
5	25	40



6.példa

n	F_n^2	össz
1	1	1
2	1	2
3	4	6
4	9	15
5	25	40



6.példa

Sejtés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

6.példa

Sejtés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

6.példa

Sejtés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$

6.példa

Sejtés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$

Cél: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$

6.példa

Sejtés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$

Cél: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$

Bizonyítás:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + (F_{k+1})^2 =$$

6.példa

Sejtés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$

Cél: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$

Bizonyítás:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + (F_{k+1})^2 =$$
$$= F_k \cdot F_{k+1} + (F_{k+1})^2 =$$

6.példa

Sejtés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$

Cél: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} & F_1^2 + F_2^2 + \ldots + (F_{k+1})^2 = \\ & = F_k \cdot F_{k+1} + (F_{k+1})^2 = \\ & = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) = \end{aligned}$$

6.példa

Sejtés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Bázis: $n = 1, 2, \ldots, 5$

Feltevés: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$

Cél: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$

Bizonyítás:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + (F_{k+1})^2 =$$
$$= F_k \cdot F_{k+1} + (F_{k+1})^2 =$$
$$= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) =$$
$$= F_{k+1} \cdot F_{k+2} \qquad \checkmark$$

Kihívás

A Fibonacci-számok oszthatósági tulajdonságai

Különböző pozitív egész d értékekre döntsük el, hogy milyen k esetén osztható F_k d-vel!

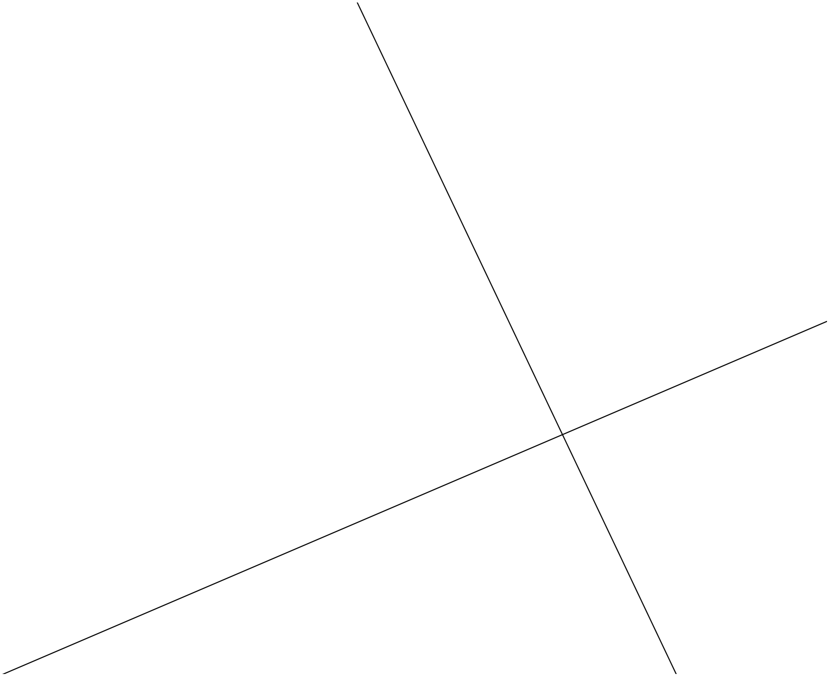
Tartalom

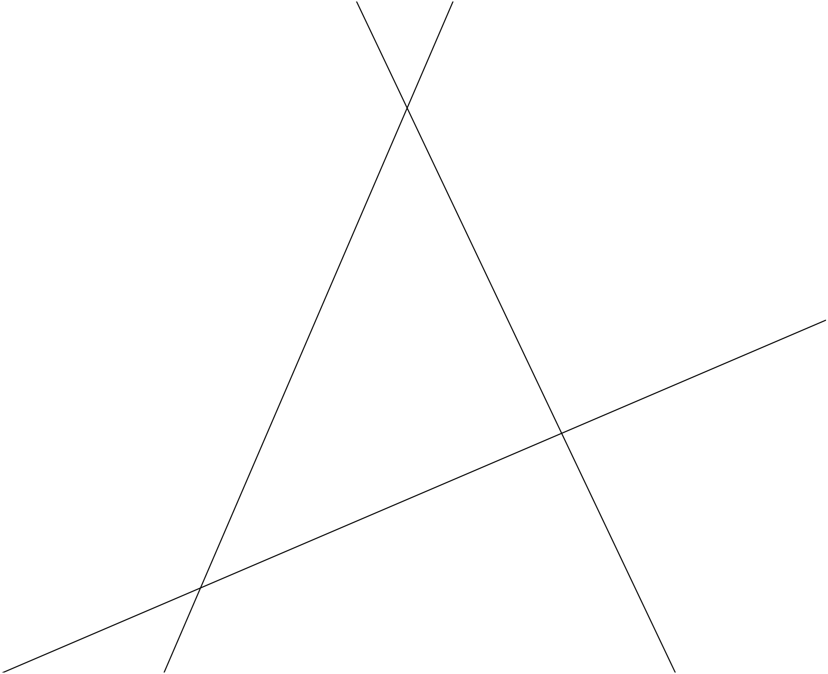
- Mi az a *matematikai indukció*? ✓
- Algebrai példák ✓
- **Geometriai példák**
- Gráfok

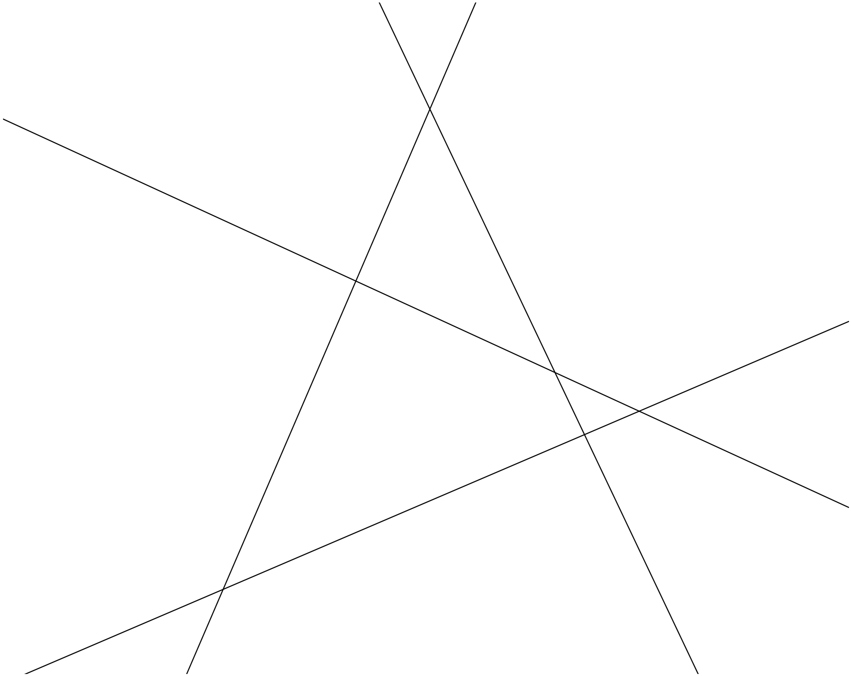
7. példa

Síkfelosztás egyenesekkel

Hány részre osztja n egyenes a síkot, ha nincs közöttük párhuzamos, és nem megy át három egy ponton?







Bázis

n	E_n
1	2

Bázis

n	E_n
1	2
2	4

Bázis

n	E_n
1	2
2	4
3	7

Bázis

n	E_n
1	2
2	4
3	7
4	11

Bázis

n	E_n
1	2
2	4
3	7
4	11

Síkfelosztás egyenesekkel

Sejtés: n egyenes: $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ rész

Síkfelosztás egyenesekkel

Sejtés: n egyenes: $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ rész

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Síkfelosztás egyenesekkel

Sejtés: n egyenes: $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ rész

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: k egyenes: $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ rész

Síkfelosztás egyenesekkel

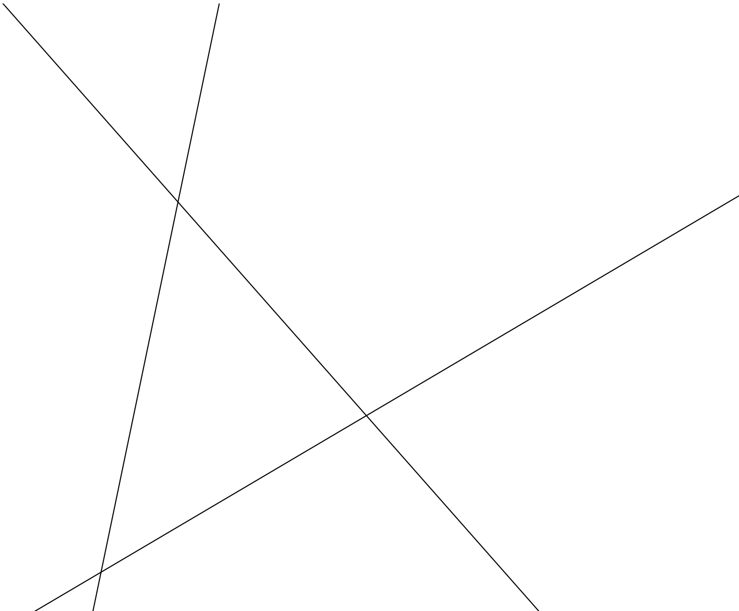
Sejtés: n egyenes: $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ rész

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

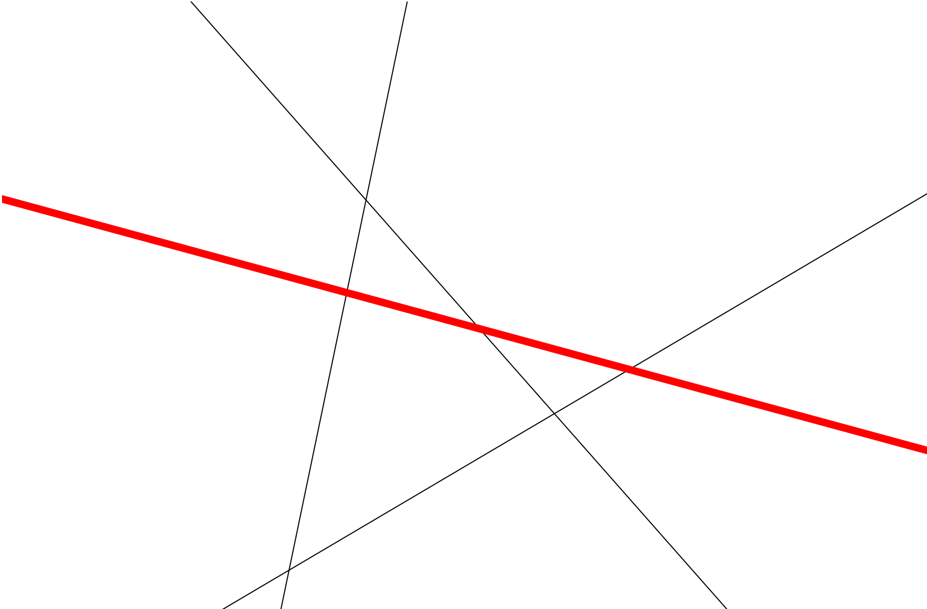
Feltevés: k egyenes: $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ rész

Cél: a $(k+1)$. egyenes $(k+1)$-gyel növeli a részek számát

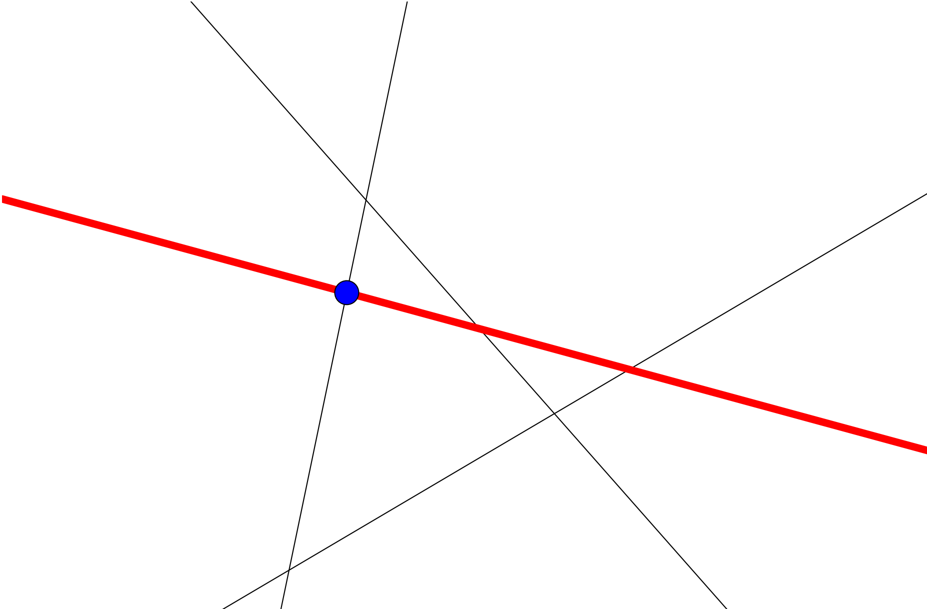
Síkfelosztás egyenesekkel



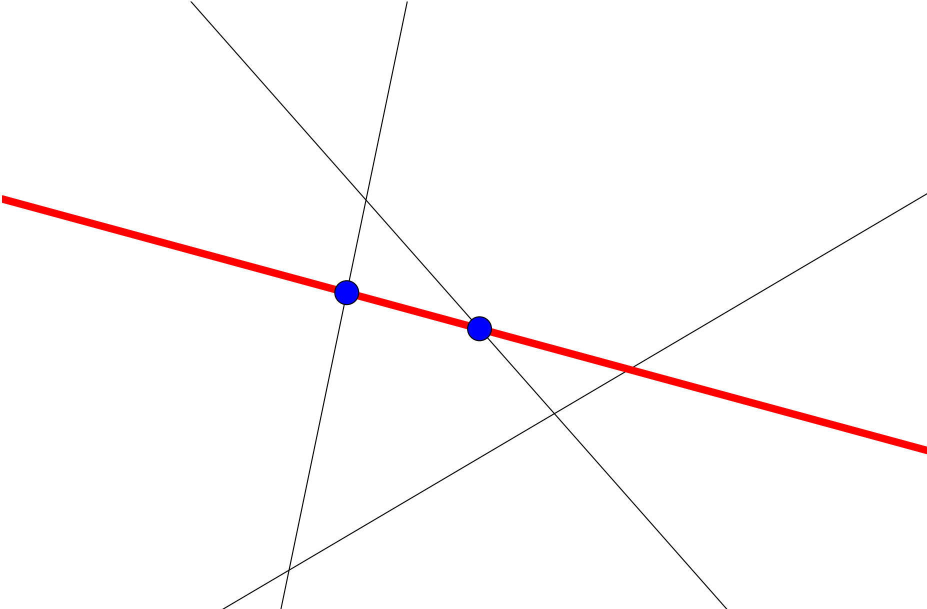
Síkfelosztás egyenesekkel



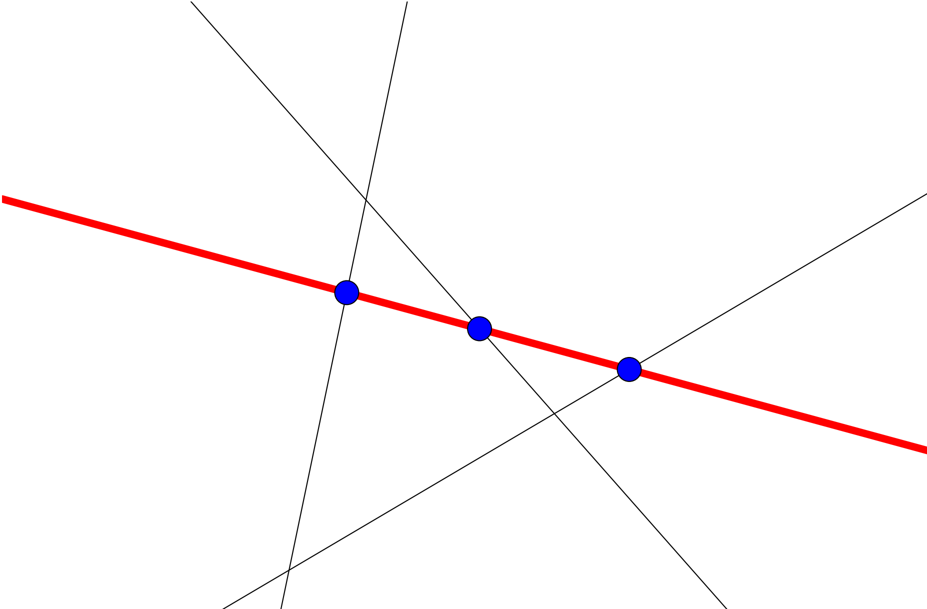
Síkfelosztás egyenesekkel



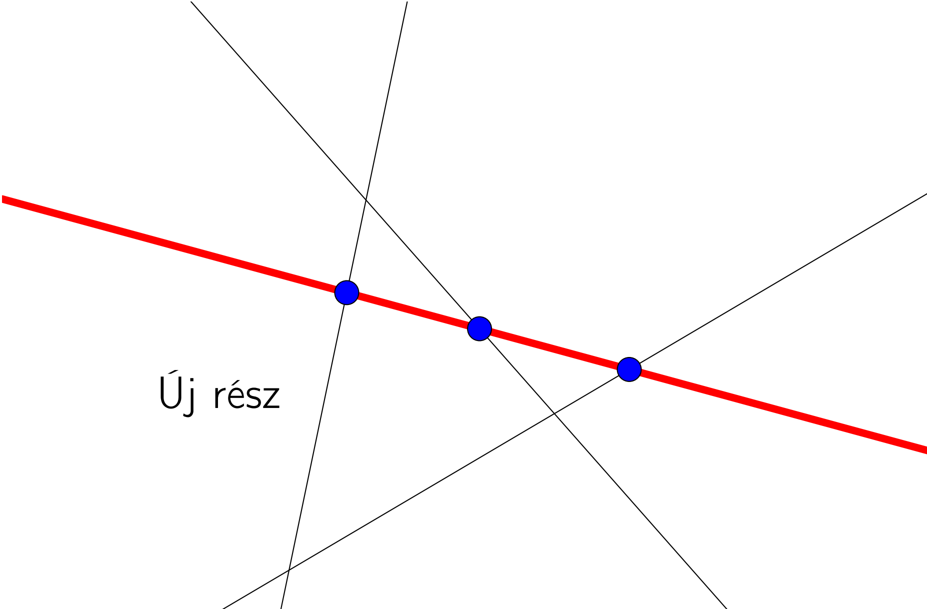
Síkfelosztás egyenesekkel



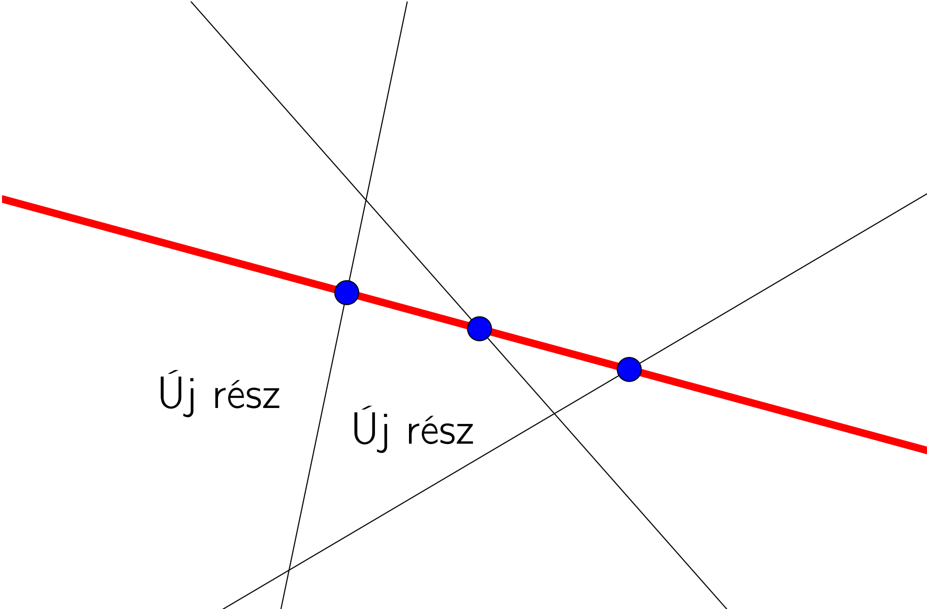
Síkfelosztás egyenesekkel



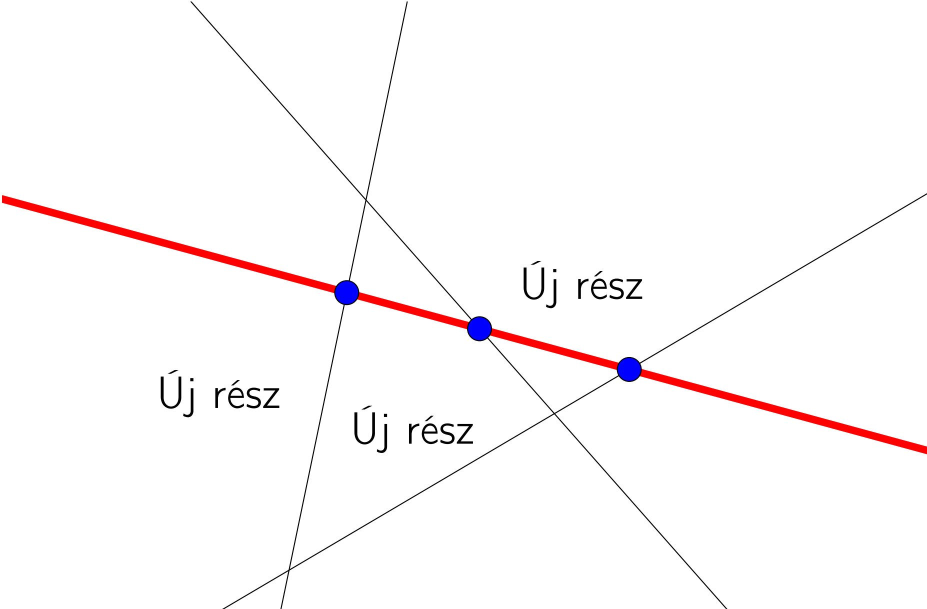
Síkfelosztás egyenesekkel



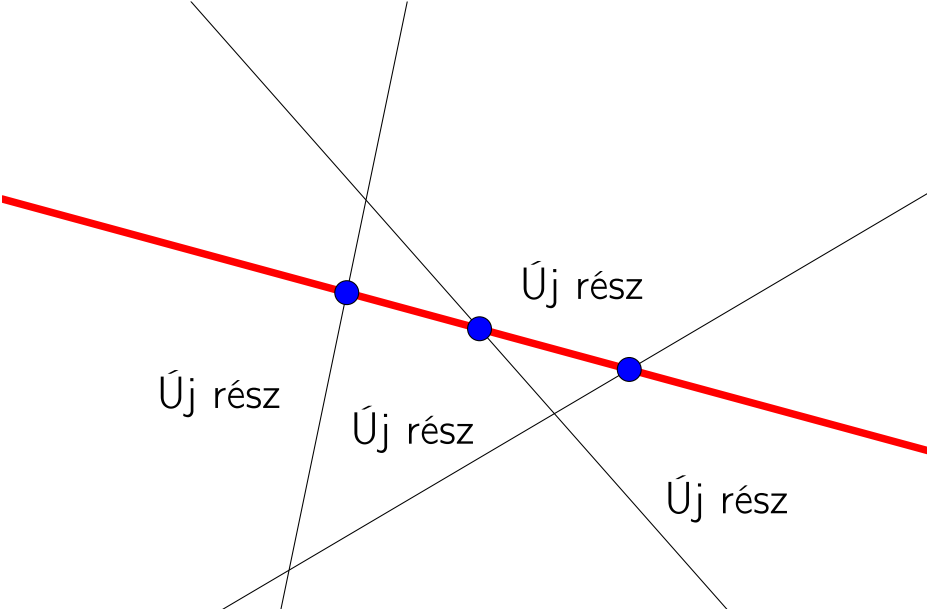
Síkfelosztás egyenesekkel



Síkfelosztás egyenesekkel



Síkfelosztás egyenesekkel

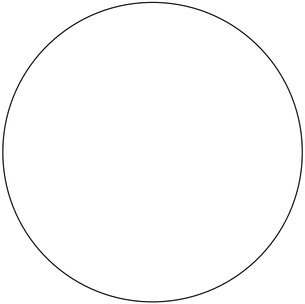


8. példa

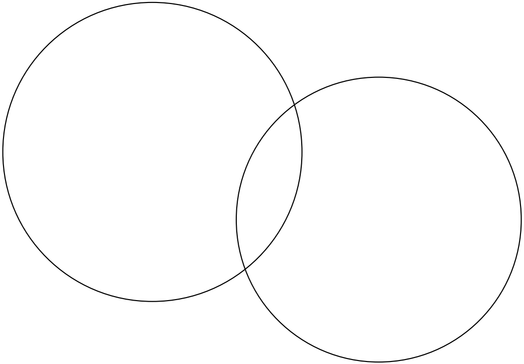
Síkfelosztás körökkel

Hány részre osztja n kör a síkot, ha bármely kettő két pontban metszi egymást, és nem megy át három egy ponton?

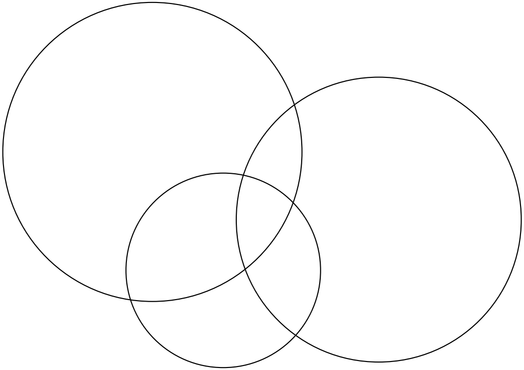
n	rész
0	1



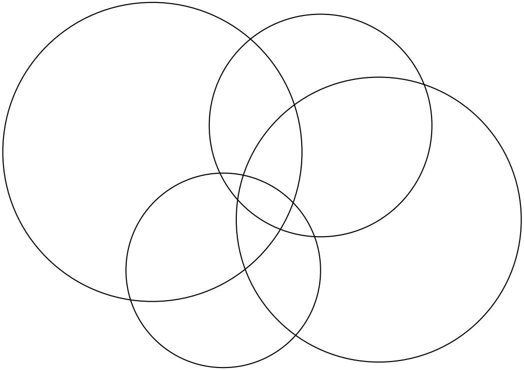
n	rész
0	1
1	2



n	rész
0	1
1	2
2	4



n	rész
0	1
1	2
2	4
3	8



n	rész
0	1
1	2
2	4
3	8
4	14

Sejtés: $C_n = \frac{(n-1)n}{2} \cdot 2 + 2$

Sejtés: $C_n = \frac{(n-1)n}{2} \cdot 2 + 2$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Sejtés: $C_n = \frac{(n-1)n}{2} \cdot 2 + 2$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: $C_k = \frac{(k-1)k}{2} \cdot 2 + 2$

Sejtés: $C_n = \frac{(n-1)n}{2} \cdot 2 + 2$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: $C_k = \frac{(k-1)k}{2} \cdot 2 + 2$

Cél: $C_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} \cdot 2 + 2$

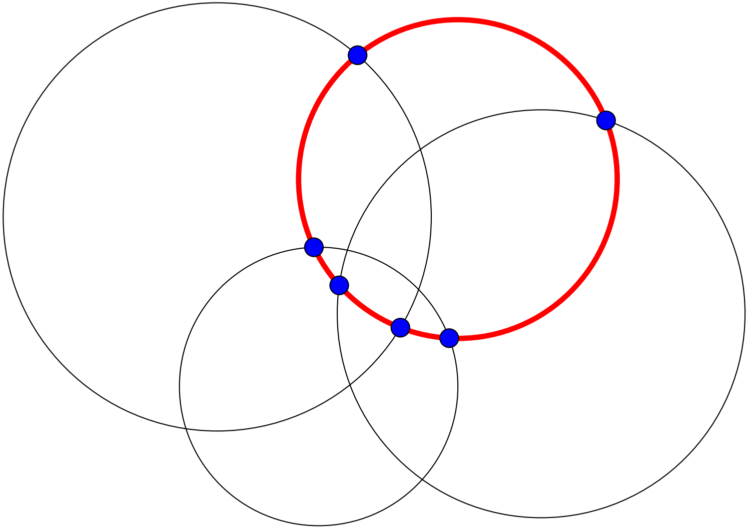
Sejtés: $C_n = \frac{(n-1)n}{2} \cdot 2 + 2$

Bázis: $n = 1, 2, 3, 4$

Feltevés: $C_k = \frac{(k-1)k}{2} \cdot 2 + 2$

Cél: $C_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} \cdot 2 + 2$ vagyis a $(k+1)$.
kör $2k$-val növeli a részek számát

Bizonyítás



Kihívás

Síkfelosztás háromszögekkel

Hány részre osztja n háromszög a síkot, ha bármely kettő hat pontban metszi egymást, és nem megy át három egy ponton?

Tartalom

- Mi az a *matematikai indukció*? ✓
- Algebrai példák ✓
- Geometriai példák ✓
- **Gráfok**

9. példa: Egyirányú utak

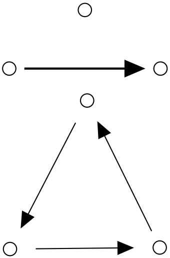
Egy vidéki megyében a városok egysávos utakkal vannak összekötve. Az ütközések elkerülése végett minden útnak egyirányúnak kell lennie. Bármely két város között egy út vezet. Csak a városokban lehet másik útra áttérni. Minden utat úgy egyirányúsítanak, hogy bármelyik városból bármelyikbe maximum egy útváltással eljuthatunk.
Hány város esetén lehetséges ez?

$n \leq 4$

$n = 1$

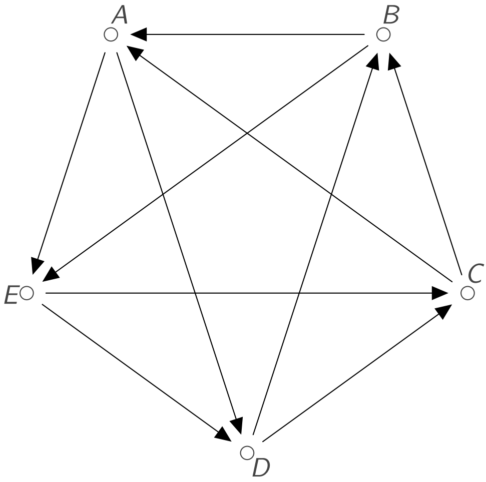
$n = 2$

$n = 3$

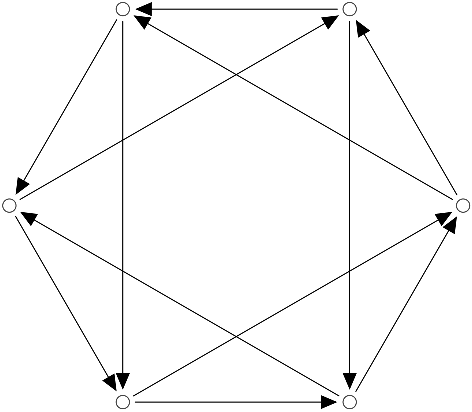


$n = 4$ ↯

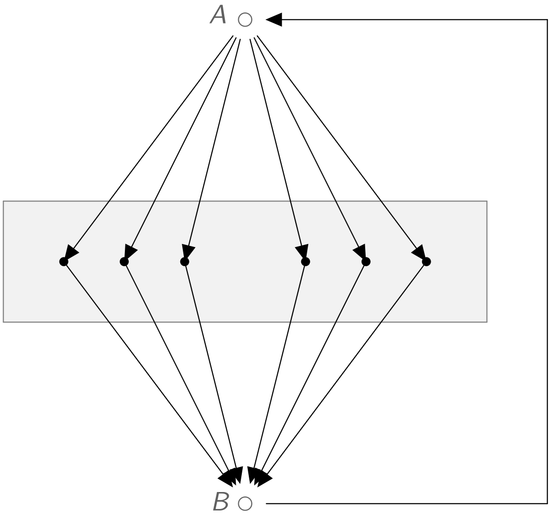
$n = 5$



$n = 6$



$k \to k + 2$



9. példa: összegzés

n	1	2	3	4	5	6
	-	$\lightning$	$\checkmark$	$\lightning$	$\checkmark$	$\checkmark$

$n \to n + 2$

$5 \to 7 \to 9 \to \dots$

$6 \to 8 \to 10 \to \dots$

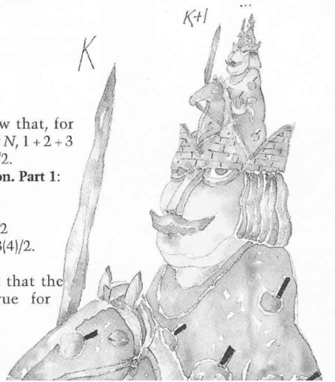
$n = 2$ és $n = 4$ kivételével minden n-re van jó irányítás.

Forrás

Jewels in the crown

The beauty of inductive reasoning

by Mark Saul



IT HAS BEEN SAID THAT mathematics is the queen of the sciences. If this is true, then she must wear a crown. What jewels shall we place in her crown? Mathematics abounds in beautiful results. Rather than selecting any specific beauty, we should find a prominent place in the crown for beauties on a larger, more general scale. Among these might be the method of mathematical induction.

Mathematical induction is a method of proof allowed us by the very definition of the natural num-

Problem 1. Show that, for any natural number N, $1 + 2 + 3 + \ldots + N = N(N + 1)/2$.

Proof by induction. Part 1:

$$1 = 1(2)/2,$$
$$1 + 2 = 2(3)/2$$
$$1 + 2 + 3 = 3(4)/2.$$

Part 2: Suppose that the proposition is true for

A csoport

- Bácskai Zsombor
- Bencze Tamás
- Bertalan Dávid
- Galovics Gábor
- Hülvely Alina
- Kovács Áron
- Vavrik Márton