

Gömbkettőzés

(Banach-Tarski paradoxon)

1. Legyenek A, B, C térbeli ponthalmazok. Ha A és B is átdarabolható C -be (véges sok részre osztással, azok forgatásával és eltolásával), akkor A is átdarabolható B -be.
2. Legyen P egy pontja a k körvonalnak. Bontsuk fel k -t diszjunkt k_1, k_2 ponthalmazokra, hogy $k_1 \cup k_2 = k$, és valamely A forgatással $k_1 \cup A(k_2) = k \setminus \{P\}$, de $A(k_2)$ továbbra is diszjunkt k_1 -től.

Legyen adott egy gömbfelszín. (Tömör gömbből kiforgatható a középpont..) Rögzítsünk két, egymásra merőleges tengelyt, e -t és f -et valamint egy *irracionális* α szöveget, és jelölje A az e körüli és B az f körüli α szögű forgatást, A^{-1} , B^{-1} pedig a $-\alpha$ szögű forgatást. Egy P pont A - B -hálója álljon mindazon pontokból, ahova P eljuthat A , A^{-1} , B és B^{-1} akárhányszori alkalmazásával.

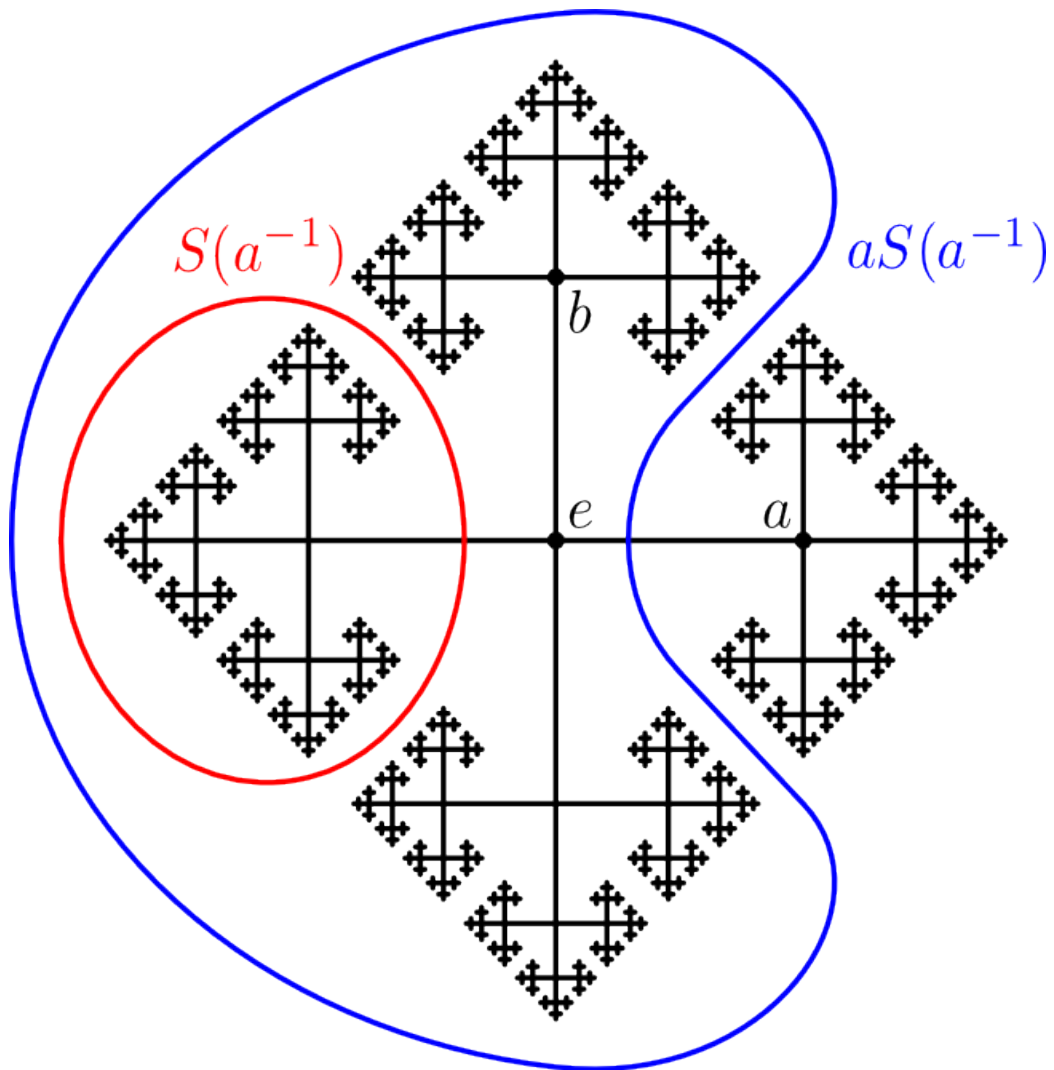
$\mathcal{W} := \{A, B, A^{-1}, B^{-1}$ karakterekkel alkotott sztringek, amiben A, A^{-1} illetve B, B^{-1} nem szerepelnek egymás mellett.}

3. Jelölje $\mathcal{S}(x)$ az x karakterrel kezdődő sztringek halmazát. Ekkor
 - a) $\mathcal{W} = \{''''\} \cup \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B) \cup \mathcal{S}(A^{-1}) \cup \mathcal{S}(B^{-1})$
 - b) $\mathcal{W} = A\mathcal{S}(A^{-1}) \cup \mathcal{S}(A)$
 - c) $\mathcal{W} = B\mathcal{S}(B^{-1}) \cup \mathcal{S}(B)$.
4. $\mathcal{U}_1 := \mathcal{S}(A) \cup \{A^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
 $\mathcal{U}_2 := \mathcal{S}(A^{-1}) \setminus \{A^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
 $\mathcal{U}_3 := \mathcal{S}(B)$,
 $\mathcal{U}_4 := \mathcal{S}(B^{-1})$.
 Ekkor $A\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3 \cup \mathcal{U}_4$ és $B\mathcal{U}_4 = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_4$.
5. A gömböt lefedjük a pontok A - B -hálóival, mindegyik hálóból* pontosan egy pontot gyűjtünk ki az M ponthalmazba, és legyen

$$H_i := \mathcal{U}_i(M) := \{w(P) \mid w \in \mathcal{U}_i, P \in M\}.$$

Ekkor H_1, H_2, H_3, H_4 közös pont nélküli ponthalmazok, együtt lefedik a gömböt*, és $H_1 \cup A(H_2)$ valamint $H_3 \cup B(H_4)$ is ugyanez a gömb.

*Tulajdonképpen ki kell hagyni a \mathcal{W} -beli forgatások tengelyeinek végpontjait, a maradék azonban a 2. mintájára átdarabolható a teljes gömbbé.



$$W = aS(a^{-1}) \cup S(a)$$