Gömbkettőzés
(Banach-Tarski paradoxon)

1. Legyenek A, B, C térbeli ponthalmazok. Ha A és B is átdarabolható C-be (véges sok részre osztással, azok forgatásával és eltolásával), akkor A is átdarabolható B-be.

2. Legyen P egy pontja a k körvonalnak. Bontsuk fel k-t diszjunkt k_1, k_2 ponthalmazokra, hogy $k_1 \cup k_2 = k$, és valamely A forgatással
   $k_1 \cup A(k_2) = k \setminus \{P\}$, de $A(k_2)$ továbbra is diszjunkt k_1-től.

Legyen adott egy gömbfelszín. (Tömör gömbből kiforgatható a középpont..) Rögzítsünk két, egymásra merőleges tengelyt, e-t és f-et valamint egy *irracionális* α szöget, és jelölje A az e körüli és B az f körüli α szögű forgatást, A^{-1}, B^{-1} pedig a $-\alpha$ szögű forgatást. Egy P pont A-B-*hálója* álljon mindazon pontokból, ahova P eljuthat A, A^{-1}, B és B^{-1} akárhányszori alkalmazásával.

$\mathcal{W} :=$ { A, B, A^{-1}, B^{-1} karakterekkel alkotott sztringek, amiben A, A^{-1} illetve B, B^{-1} nem szerepelnek egymás mellett.}

3. Jelölje $\mathcal{S}(x)$ az x karakterrel kezdődő sztringek halmazát. Ekkor
   a) $\mathcal{W} = \{\text{""}\} \cup \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B) \cup \mathcal{S}(A^{-1}) \cup \mathcal{S}(B^{-1})$
   b) $\mathcal{W} = A\,\mathcal{S}(A^{-1}) \cup \mathcal{S}(A)$
   c) $\mathcal{W} = B\,\mathcal{S}(B^{-1}) \cup \mathcal{S}(B)$.

4. $\mathcal{U}_1 := \mathcal{S}(A) \cup \{A^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
   $\mathcal{U}_2 := \mathcal{S}(A^{-1}) \setminus \{A^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
   $\mathcal{U}_3 := \mathcal{S}(B)$,
   $\mathcal{U}_4 := \mathcal{S}(B^{-1})$.
   Ekkor $A\,\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3 \cup \mathcal{U}_4$ és $B\,\mathcal{U}_4 = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_4$.

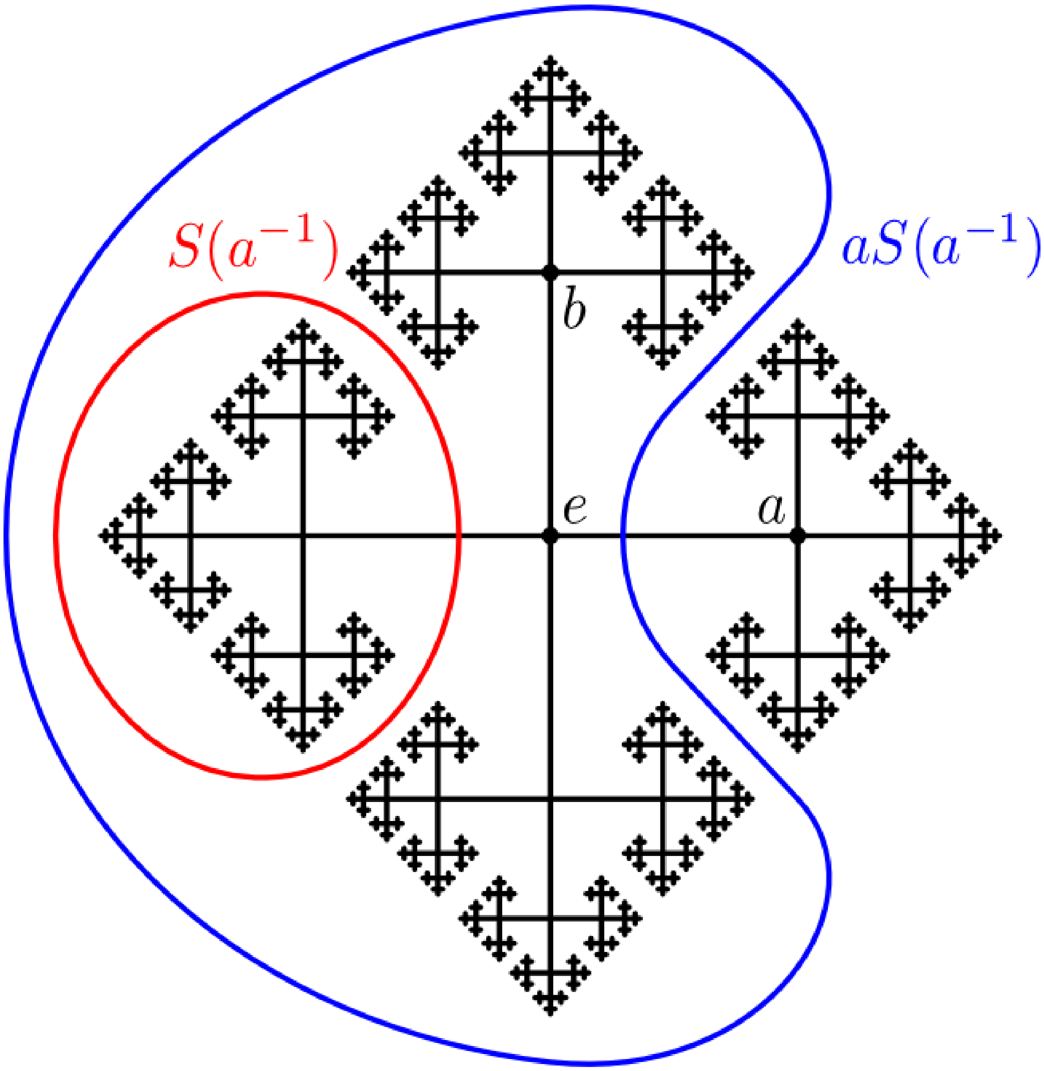
5. A gömböt lefedjük a pontok A-B-hálóival, mindegyik hálóból* pontosan egy pontot gyűjtünk ki az M ponthalmazba, és legyen

   $$H_i := \mathcal{U}_i(M) := \{w(P) \mid w \in \mathcal{U}_i,\ P \in M\}\,.$$

   Ekkor H_1, H_2, H_3, H_4 közös pont nélküli ponthalmazok, együtt lefedik a gömböt*, és $H_1 \cup A(H_2)$ valamint $H_3 \cup B(H_4)$ is ugyanez a gömb.

---

*Tulajdonképpen ki kell hagyni a $\mathcal{W}$-beli forgatások tengelyeinek végpontjait, a maradék azonban a 2. mintájára átdarabolható a teljes gömbbé.



$\mathcal{W} = aS(a^{-1}) \cup S(a)$