# Generátorfüggvények

Frankl Nóra

2014. október 21.

## Bevezetés

**0. feladat**: Mennyi az

$$X = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

végtelen összeg értéke?

**Megoldás**: $1 + \frac{1}{2}X = X \Rightarrow X = 2$.

Az általános eset is megy, ha $|s| < 1$:

$$1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \frac{1}{1-s}.$$

Érdemes fejben tartani a fenti összefüggés alábbi alakját is:

$$\frac{1}{1-ks} = 1 + ks + k^2s^2 + \dots$$

## A generátorfüggvény

**1. feladat**: Az $(a_n)$ sorozat definíciója: $a_0 = 0$ és $a_{n+1} = 2a_n + 1$, ha $n > 0$. Mennyi $a_{100}$?

**Megoldás**: Rendeljünk a sorozathoz egy végtelen összeget:

$$a_0, a_1, a_2, \dots \Rightarrow A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
A(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \\
&= a_0 + (2a_0 + 1)x + (2a_1 + 1)x^2 + (2a_2 + 1)x^3 + \dots = \\
&= 2x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) + (a_0 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \\
&= 2xA(x) + \frac{1}{1-x} - 1
\end{aligned}$$

Rendezés után:

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

$\frac{1}{1-x}$-et és $\frac{1}{1-2x}$-et már ismerjük a bevezetésből:

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = A(x) = (1-1) + (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + \ldots$$

így $a_n = 2^n - 1$.

## Kérdések

- Milyen $x$-re van értelme általában egy $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ összegnek?
- Ha értelmes egy ilyen összeg, mikor rendezhető át szabadon?

# Algebrai megközelítés

Az analitikus megközelítés kellemetlen problémákat is felvet, kényelmesebb az algebrai felfogás.

Egy $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ alakú összeget formális hatványsornak nevezünk. Két ilyen kifejezés összegét koordinátánként értelmezzük:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots) = \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \ldots\end{aligned}$$

A szorzat pedig a Cauchy-szorzat:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots) = \\ = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots \\ + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)x^n \ldots\end{aligned}$$

Az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ formális hatványsor inverze a $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$ formális hatványsor, ha

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots) = 1.$$

Ezt úgy is jelölhetjük, hogy

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)^{-1} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots,$$

vagy

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots.$$

# Az inverz létezése

**2. feladat**: Melyek az invertálható formális hatványsorok?

**Megoldás**: Pontosan azok, melyekben a konstans tag nem 0. A polinomosztáshoz hasonlóan: sorban kiszámoljuk az együtthatókat:

$$1 = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) =$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots$$

Az $a_0b_0 = 1$ feltétel csak $a_0 \neq 0$ esetén teljesülhet, ekkor $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Ez elég is, ilyenkor minden $i$-re megadható jó $b_i$:

$a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{a_1b_0}{a_0}$

$a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{a_1b_1 + a_2b_0}{a_0}$

...

Látható, hogy $b_i$ kiszámításához csak a kisebb indexű $b$-kre van szükség, és mindig $a_0$-lal kell osztani, amiről kikötöttük, hogy nem nulla.

# A Fibonacci-sorozat

**3. feladat**: Generátorfüggvények segítségével határozzuk meg a Fibonacci-sorozat $n$. elemének zárt alakját!

**Megoldás**: Mivel $f_0 = 0, f_1 = 1$ és $n > 1$ esetén $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ezért

$$
\begin{aligned}
F(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \ldots = \\
&= f_0 + f_1 x + (f_0 + f_1) x^2 + (f_1 + f_2) x^3 + \ldots = \\
&= (f_0 + f_1 x + f_1 x^2 + f_2 x^3 + \ldots) + (f_0 x^2 + f_1 x^3 + f_2 x^4 + \ldots) = \\
&= x + x F(x) + x^2 F(x),
\end{aligned}
$$

felhasználva, hogy az $f_0 = 0$.

Rendezve, kiemelve, majd leosztva:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Most már csak annyi van hátra, hogy $F(x)$-et $\frac{1}{1-kx}$ alakú törtek összegére bontsuk.

Jelölje $\phi_1$ és $\phi_2$ az $1 - x - x^2 = 0$ egyenlet két gyökét: $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Az $\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\phi_1 x} + \frac{b}{1-\phi_2 x}$ egyenlet teljesül, ha $a = \frac{1}{\phi_1 - \phi_2}$ és $b = -a$.

Visszahelyettesítve:

$$F(x) = \frac{1}{\phi_1 - \phi_2} \cdot \left( (1 + \phi_1 x + \phi_1^2 x^2 + \ldots) - (1 + \phi_2 x + \phi_2^2 x^2 + \ldots) \right),$$

tehát

$$f_n = \frac{1}{\phi_1 - \phi_2} \cdot (\phi_1^n - \phi_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$