Generátorfüggvények

Frankl Nóra

2014. október 21.

Bevezetés

0. feladat: Mennyi az

$$X = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

végtelen összeg értéke?

Megoldás: $1 + \frac{1}{2}X = X \Rightarrow X = 2$.

Az általános eset is megy, ha $|s| < 1$:

$$1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \frac{1}{1-s}.$$

Érdemes fejben tartani a fenti összefüggés alábbi alakját is:

$$\frac{1}{1-ks} = 1 + ks + k^2s^2 + \dots$$

A generátorfüggvény

1. feladat: Az (a_n) sorozat definíciója: $a_0 = 0$ és $a_{n+1} = 2a_n + 1$, ha $n > 0$. Mennyi a_{100}?

Megoldás: Rendeljünk a sorozathoz egy végtelen összeget:

$$a_0, a_1, a_2, \dots \Rightarrow A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
A(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \\
&= a_0 + (2a_0+1)x + (2a_1+1)x^2 + (2a_2+1)x^3 + \dots = \\
&= 2x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) + (a_0 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \\
&= 2xA(x) + \frac{1}{1-x} - 1
\end{aligned}$$

Rendezés után:

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

$\frac{1}{1-x}$-et és $\frac{1}{1-2x}$-et már ismerjük a bevezetésből:

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = A(x) = (1-1) + (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + \dots$$

így $a_n = 2^n - 1$.

Kérdések

- Milyen x-re van értelme általában egy $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ összegnek?
- Ha értelmes egy ilyen összeg, mikor rendezhető át szabadon?

Algebrai megközelítés

Az analitikus megközelítés kellemetlen problémákat is felvet, kényelmesebb az algebrai felfogás.

Egy $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ alakú összeget formális hatványsornak nevezünk. Két ilyen kifejezés összegét koordinátánként értelmezzük:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots) = \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \dots\end{aligned}$$

A szorzat pedig a Cauchy-szorzat:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots) = \\ = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots \\ + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0)x^n \dots\end{aligned}$$

Az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ formális hatványsor inverze a $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$ formális hatványsor, ha

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots) = 1.$$

Ezt úgy is jelölhetjük, hogy

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)^{-1} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots,$$

vagy

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots.$$

Az inverz létezése

2. feladat: Melyek az invertálható formális hatványsorok?

Megoldás: Pontosan azok, melyekben a konstans tag nem 0. A polinomosztáshoz hasonlóan: sorban kiszámoljuk az együtthatókat:

$$1 = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) =$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots$$

Az $a_0b_0 = 1$ feltétel csak $a_0 \neq 0$ esetén teljesülhet, ekkor $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Ez elég is, ilyenkor minden i-re megadható jó b_i:

$a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{a_1b_0}{a_0}$

$a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{a_1b_1 + a_2b_0}{a_0}$

$\ldots$

Látható, hogy b_i kiszámításához csak a kisebb indexű b-kre van szükség, és mindig a_0-lal kell osztani, amiről kikötöttük, hogy nem nulla.

A Fibonacci-sorozat

3. feladat: Generátorfüggvények segítségével határozzuk meg a Fibonacci-sorozat n. elemének zárt alakját!

Megoldás: Mivel $f_0 = 0, f_1 = 1$ és $n > 1$ esetén $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ezért

$$\begin{aligned} F(x) &= f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots = \\ &= f_0 + f_1x + (f_0 + f_1)x^2 + (f_1 + f_2)x^3 + \ldots = \\ &= (f_0 + f_1x + f_1x^2 + f_2x^3 + \ldots) + (f_0x^2 + f_1x^3 + f_2x^4 + \ldots) = \\ &= x + xF(x) + x^2F(x), \end{aligned}$$

felhasználva, hogy az $f_0 = 0$.

Rendezve, kiemelve, majd leosztva:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Most már csak annyi van hátra, hogy $F(x)$-et $\frac{1}{1-kx}$ alakú törtek összegére bontsuk.

Jelölje ϕ_1 és ϕ_2 az $1 - x - x^2 = 0$ egyenlet két gyökét: $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Az $\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\phi_1 x} + \frac{b}{1-\phi_2 x}$ egyenlet teljesül, ha $a = \frac{1}{\phi_1 - \phi_2}$ és $b = -a$.

Visszahelyettesítve:

$$F(x) = \frac{1}{\phi_1 - \phi_2} \cdot \left((1 + \phi_1 x + \phi_1^2 x^2 + \ldots) - (1 + \phi_2 x + \phi_2^2 x^2 + \ldots)\right),$$

tehát

$$f_n = \frac{1}{\phi_1 - \phi_2} \cdot (\phi_1^n - \phi_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$