

Aritmetikai derivált

A következő feladatsor az alábbi művelet vizsgálatával foglalkozik:

Legyen $n \in \mathbb{N}$, és vezessük be az n' műveletet az alábbi tulajdonságokkal:

- $1' = 0$;
- $p' = 1$, ha p prím;
- minden $a, b \in \mathbb{N}$ esetén $(ab)' = a'b + ab'$.

Feladatok

1. Határozzuk meg n' értékét az $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ halmazon!
2. Mutassuk meg, hogy az n' művelet egyértelműen definiált a természetes számokon! Fejezzük ki n' -t az n prímtényező felbontása alapján.
3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $n' = 0$;	b) $n' = 1$;	c) $n' = n$.
---------------	---------------	---------------
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} 63^{(k)} = ?$ ($n^{(k)} = (n^{(k-1)})'$, ha $k > 1$ és $n^{(1)} = n'$.)
5. Ha igaz a Goldbach-sejtés, akkor az $n' = 2b$ egyenletnek minden $b > 1$ esetén van megoldása.
6. Ha végtelen sok ikerprím van, akkor az $n'' = 1$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazán.

Kiterjesztések

1. Általánosítsuk az n' műveletet az egész számok halmazára!
2. Általánosítsuk az n' műveletet a racionális számok halmazára!
3. Írjuk fel $n' = (a/b)'$ értékét az $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ esetekben.
4. Keressünk olyan $x \neq 1$ racionális számot, amelyre $x' = 0$. Mutassuk meg, hogy végtelen sok ilyen van és jellemezzük őket.
5. Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in \mathbb{Q}$, akkor

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}.$$

Források

1. Victor Ufnarovski *How to Differentiate a Number*
2. Linda Westrick *Investigations of the Number Derivative*
3. Michael Stay *Generalized Number Derivatives*