Algebrai módszerek a számelméletben

I. rész

1. Prímszám-e $2^{2014}+1$? Lehet-e prímszám a $2^{2013}+1, 2^{2015}+1$?

   Megoldás:

   $2^{2014}+1 = 2^{2014}+2\cdot 2^{1007}+1-2^{1008} = (2^{1007}+1)^2-(2^{504})^2 = (2^{1007}+2^{501}+1)\cdot(2^{1007}-2^{501}+1)$

   Mindkét tényező nagyobb 1-nél, tehát $2^{2014}+1$ összetett.

   Megjegyzés 1.: Minden $2^{4k+2}+1$ alakú szám osztható 5-tel.

   Megjegyzés 2.: 2^n+1 minden olyan esetben szorzattá alakítható, ha n-nek van 1-nél nagyobb páratlan osztója. Legyen $n=a\cdot b$, ahol a 1-nél nagyobb páratlan szám.

   $$2^n+1 = 2^{ab}+1 = (2^b)^a+1 = (2^b+1)\cdot((2^b)^{a-1}-(2^b)^{a-2}+(2^b)^{a-3}+\ldots-(2^b)+1)$$

   Megjegyzés 3.: Ha n-nek nincs páratlan osztója, azaz $n=2^k$, vagyis $2^{2^k}+1$ alakú számok így nem alakíthatóak szorzattá. $k=0,1,2,3,4$ esetén ezek prímek az ún. Fermat-féle prímek. Ezután sok összetett szám következik $(641|F_5)$ és nem is tudjuk van-e még köztük prím. jelenleg csak az első 12 Fermat prím felbontását ismerjük. A legnagyobb Fermat-féle szám melynek találtak osztóját az $F_{3329780}$, melynek osztója a $193\cdot 2^{3329782}+1$ (2014. július 25.)

2. Prímszám-e a $4\cdot 100^{400}+1$?

   Megoldás:

   $4\cdot 100^{400}+1 = 4\cdot 100^{400}+4\cdot 100^{200}+1-4\cdot 100^{200} = (2\cdot 100^{200}+1)^2-(2\cdot 100^{100})^2 = (2\cdot 100^{200}+2\cdot 100^{100}+1)\cdot(2\cdot 100^{200}-2\cdot 100^{100}+1)$

3. Prímszám-e: $3^{22}+5\cdot 3^{10}+1$?

   Megoldás:

   $3^{22}+5\cdot 3^{10}+1 = 3^{22}+6\cdot 3^{10}+1-3^{10} = (3^{11}+3^5+1)\cdot(3^{11}+3^5+1)$

4. Milyen n természetes számra lesz az n^4+64 prímszám?

   Megoldás:

   $n^4+64 = n^4+16\cdot n^2+64-16\cdot n^2 = (n^2+8)^2-(4n)^2 = (n^2-4n+8)\cdot(n^2+4n+8)$

II. rész

1. Bizonyítsuk be, hogy 13^n bármely pozitív egész esetén felírható két négyzetszám összegeként!

   Megoldás:

   Írjuk fel az első néhány számot: $13^1 = 2^2+3^2, 13^2 = 5^2+12^2$

   Ha 13^n a^2+b^2 alakú, akkor 13^{n+2} is, hiszen

   $$13^{n+2} = (a^2+b^2)\cdot 13^2 = (13a)^2+(13b)^2$$

   Ezekből a feladat állítása következik.

   Megjegyzés 1.: A 13 helyett pl. 5 és 10 is lehet.

   Megjegyzés 2.: Két négyzetszám tétele (Fermat-Euler tétel, Fermat karácsonyi tétele): Egy kettőnél nagyobb prímszám akkor és csak akkor bontható fel két négyzetszám összegére, ha néggyel osztva egy maradékot ad.

   Megjegyzés 3.: Három négyzetszám tétele (Gauss bizonyította): egy n pozitív egész akkor és csak akkor nem áll elő három négyzetszám összegeként, ha $n=4^k(8m+7)$ alakú.

   Megjegyzés 4.: Négy négyzetszám tétele (Lagrange). Minden természetes szám felírható 4 négyzetszám összegeként.

2. Az n olyan pozitív egész szám, mely felírható 2 pozitív egész szám négyzetének összegeként. Bizonyítsuk be, hogy akkor n^2 szintén rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

   Megoldás:

   Ha $n=a^2+b^2$, akkor $n^2=(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$

3. Az n olyan pozitív egész szám, mely felírható 3 pozitív egész szám négyzetének összegeként. Bizonyítsuk be, hogy akkor n^2 szintén rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Megoldás:

Ha $n = a^2 + b^2 + c^2$, akkor $n^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2$

4. Milyen a, b, c, d pozitív egész számok esetén lesz $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ prím?

Megoldás:

$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$

Mindkét tényező nagyobb 1-nél, tehát nincs olyan pozitív egész a, b, c, d, melyre prím lenne a kifejezés.

5. Bizonyítsuk be, hogy az $1 \cdot 2 + 3, 4 \cdot 5 + 6, \ldots, 2014 \cdot 2015 + 2016$ számokból akárhány elemet összeszorzunk, a szorzat előáll két négyzetszám összegeként!

Megoldás:

A sorozat minden eleme felírható: $(3k - 2) \cdot (3k - 1) + 3k$ alakban. Kibontva és átalakítva

$$(3k - 2) \cdot (3k - 1) + 3k = 9k^2 - 6k + 2 = (3k - 1)^2 + 1^2$$

Tehát a sorozat minden eleme felírható két négyzetszám összegeként. Az előző feladat állítása szerint $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ a sorozat bármely két elemének szorzata újra két négyzetszám összege lesz, így akárhány elemet szorzunk össze mindig felírható két négyzetszám összegeként.

6. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} xz - yt &= 5, \\ xt + yz &= 16 \end{aligned}$$

Négyzetre emelve, összeadva

$$(xz - yt)^2 + (xt + yz)^2 = (x^2 + y^2) \cdot (z^2 + t^2) = 5^2 + 16^2 = 881$$

Mivel a 881 prím, ezért a szorzat egyik tényezője 1 a másik 881. Két négyzetszám összege csak úgy lehet 1, ha az egyik szám az 1 a másik a 0. Így az egyik ismeretlen 0. Az első egyenletből következik, hogy vagy y vagy t egyenlő nullával és x és z közül az egyik 1, a másik 5. Megoldások $(5; 16; 1; 0), (1; 0; 5; 16)$.

7. Egy táblára felírtuk az 1 és 2 számokat. Ezután új számokat írhatunk a táblára a következő szabály szerint: ha szerepel a táblán a és b, akkor felírhatjuk az $a + b + ab$ számot. Eljuthatunk-e ilyen módon a 2014, az 13121, illetve a 12131 számokhoz.

Megoldás:

Néhány elemet felírva észrevehetjük, hogy a kapott számoknál egyel nagyobb számok prímtényezős felosztásában, csak 2 és 3 szerepel.

Tehát vizsgáljuk az $a + b + ab + 1 = (a + 1) \cdot (b + 1)$ számokat. Ha $a = 2^n \cdot 3^k - 1$ és $b = 2^m \cdot 3^l - 1$, akkor $a + b + ab = 2^{n+m} \cdot 3^{k+l} - 1$. Tehát minden táblára kerülő szám ilyen alakú lesz.

2015 osztható 5-tel, tehát 2014 nem kerülhet fel a táblára. $13122 = 2 \cdot 3^8$, tehát 13121 lehet a táblán, $12132 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337$, azaz 12131 nem.

III. rész

1. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c, d olyan pozitív egészek, amelyekre $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$ teljesül, akkor $a + b + c + d$ összetett szám!

Megoldás:

Alakítsuk át a feltételt.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + ab &= c^2 + d^2 + cd, \\ (a + b)^2 - ab &= (c + d)^2 - cd, \\ (a + b)^2 - (c + d)^2 &= ab - cd, \\ (a + b + c + d) \cdot (a + b - c - d) &= ab - cd \end{aligned}$$

Alakítsuk át másképpen:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + ab &= c^2 + d^2 + cd, \\ (a - b)^2 + 3ab &= (c - d)^2 + 3cd, \\ (a - b)^2 - (c - d)^2 &= -3(ab - cd), \end{aligned}$$

$$(a-b+c-d)\cdot(a-b-c+d) \quad = \quad -3(ab-cd)$$

Összevetve az utolsó sorokat:

$$3\cdot(a+b+c+d)\cdot(a+b-c-d) = -(a-b+c-d)\cdot(a-b-c+d)$$

Ha $a+b-c-d=0$, akkor $a+b=c+d$, ezért $a+b+c+d=2\cdot(a+b)$, tehát $a+b+c+d$ összetett. Ha $a+b-c-d\neq 0$, akkor egyik oldal sem 0. Ha $a+b+c+d$ prím lenne, akkor osztója lenne a jobb oldali szorzat valamelyik tényezőjének. De ez nem lehet, mert mindkettő abszolút értéke pozitív, de kisebb, mint $a+b+c+d$ abszolút értéke.

Van-e olyan a,b,c,d pozitív számnégyes, amelyre a feltétel teljesül? Igen (1; 11; 4; 9).

2. Az a,b,c,d pozitív egész számokra igaz, hogy $ab=cd$. Bizonyítsuk be, hogy $a+b+c+d$ nem prím!

   Megoldás:

   Legyen $S=a+b+c+d$. Ekkor $Sa=a^2+ab+ac+ad$, a második tagban cseréljük ki ab-t cd-re.

   $$Sa=a^2+cd+ac+ad=a(a+c)+d(a+c)=(a+c)\cdot(a+d)$$

   Ha S prím lenne, akkor osztója lenne a jobb oldali szorzat valamelyik tényezőjének. De ez nem lehet, mert mindkét tényező pozitív és kisebb, mint S.

3. Az a,b,c,d pozitív egész számokra igaz, hogy $ab=cd$. Bizonyítsuk be, hogy $a^2+b^2+c^2+d^2$ nem prím!

   Megoldás:

   Hasonlóan az előzőhöz $a^2b^2=c^2d^2$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha a,b,c,d pozitív egész számokra teljesül, hogy $a^2+b^2=c^2+d^2$, akkor $a+b+c+d$ összetett szám!

   Megoldás:

   Legyen $S=a+b+c+d$. Ekkor $S\cdot(a-c)=(a^2-c^2)+(a-c)\cdot(b+d)$, a második tagban cseréljük ki a^2-c^2-t d^2-b^2-re.

   $$S\cdot(a-c)=(a^2-c^2)+(a-c)\cdot(b+d)=(d^2-b^2)+(b+d)\cdot(a+c)=(b+d)\cdot(d-b+a-c)$$

   Ha S prím lenne, akkor osztója lenne a jobb oldali szorzat valamelyik tényezőjének. De ez nem lehet, mert mindkét tényező abszolút értéke kisebb, mint S.

A foglalkozáson nem került sor a II./6.,7. feladatokra az I. illetve a II.részből. A III. részből csak a 2. feladatot és a módszert tudtuk megbeszélni.

Felhasznált irodalom:

Katz Sándor: Algebrai kifejezések alkalmazása oszthatósági feladatokban (Új utak és lehetőségek a matematikában konferencia, Nagykanizsa 2004)

Schultz János: Elemi matematikai versenyfeladatok (ZALAMAT, 2011)