

Algebrai módszerek a számelméletben

I. rész

1. Prímszám-e $2^{2014} + 1$? Lehet-e prímszám a $2^{2013} + 1, 2^{2015} + 1$?

Megoldás:

$$2^{2014} + 1 = 2^{2014} + 2 \cdot 2^{1007} + 1 - 2^{1008} = (2^{1007} + 1)^2 - (2^{504})^2 = (2^{1007} + 2^{501} + 1) \cdot (2^{1007} - 2^{501} + 1)$$

Mindkét tényező nagyobb 1-nél, tehát $2^{2014} + 1$ összetett.

Megjegyzés 1.: Minden $2^{4k+2} + 1$ alakú szám osztható 5-tel.

Megjegyzés 2.: $2^n + 1$ minden olyan esetben szorzattá alakítható, ha n -nek van 1-nél nagyobb páratlan osztója. Legyen $n = a \cdot b$, ahol a 1-nél nagyobb páratlan szám.

$$2^n + 1 = 2^{ab} + 1 = (2^b)^a + 1 = (2^b + 1) \cdot ((2^b)^{a-1} - (2^b)^{a-2} + (2^b)^{a-3} + \dots - (2^b) + 1)$$

Megjegyzés 3.: Ha n -nek nincs páratlan osztója, azaz $n = 2^k$, vagyis $2^{2^k} + 1$ alakú számok így nem alakíthatók szorzattá. $k = 0, 1, 2, 3, 4$ esetén ezek prímek az ún. Fermat-féle prímek. Ezután sok összetett szám következik ($641|F_5$) és nem is tudjuk van-e még köztük prím. Jelenleg csak az első 12 Fermat prím felbontását ismerjük. A legnagyobb Fermat-féle szám melynek találtak osztóját az $F_{3329780}$, melynek osztója a $193 \cdot 2^{3329782} + 1$ (2014. július 25.)

2. Prímszám-e a $4 \cdot 100^{400} + 1$?

Megoldás:

$$4 \cdot 100^{400} + 1 = 4 \cdot 100^{400} + 4 \cdot 100^{200} + 1 - 4 \cdot 100^{200} = (2 \cdot 100^{200} + 1)^2 - (2 \cdot 100^{100})^2 = (2 \cdot 100^{200} + 2 \cdot 100^{100} + 1) \cdot (2 \cdot 100^{200} - 2 \cdot 100^{100} + 1)$$

3. Prímszám-e: $3^{22} + 5 \cdot 3^{10} + 1$?

Megoldás:

$$3^{22} + 5 \cdot 3^{10} + 1 = 3^{22} + 6 \cdot 3^{10} + 1 - 3^{10} = (3^{11} + 3^5 + 1) \cdot (3^{11} + 3^5 + 1)$$

4. Milyen n természetes számra lesz az $n^4 + 64$ prímszám?

Megoldás:

$$n^4 + 64 = n^4 + 16 \cdot n^2 + 64 - 16 \cdot n^2 = (n^2 + 8)^2 - (4n)^2 = (n^2 - 4n + 8) \cdot (n^2 + 4n + 8)$$

II. rész

1. Bizonyítsuk be, hogy 13^n bármely pozitív egész esetén felírható két négyzetszám összegeként!

Megoldás:

$$\text{Írjuk fel az első néhány számot: } 13^1 = 2^2 + 3^2, 13^2 = 5^2 + 12^2$$

Ha $13^n = a^2 + b^2$ alakú, akkor 13^{n+2} is, hiszen

$$13^{n+2} = (a^2 + b^2) \cdot 13^2 = (13a)^2 + (13b)^2$$

Ezekből a feladat állítása következik.

Megjegyzés 1.: A 13 helyett pl. 5 és 10 is lehet.

Megjegyzés 2.: Két négyzetszám tétele (Fermat-Euler tétel, Fermat karácsonyi tétele): Egy kettőnél nagyobb prímszám akkor és csak akkor bontható fel két négyzetszám összegére, ha négyvel osztva egy maradékot ad.

Megjegyzés 3.: Három négyzetszám tétele (Gauss bizonyította): egy n pozitív egész akkor és csak akkor nem áll elő három négyzetszám összegeként, ha $n = 4^k(8m + 7)$ alakú.

Megjegyzés 4.: Négy négyzetszám tétele (Lagrange). Minden természetes szám felírható 4 négyzetszám összegeként.

2. Az n olyan pozitív egész szám, mely felírható 2 pozitív egész szám négyzetének összegeként. Bizonyítsuk be, hogy akkor n^2 szintén rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Megoldás:

$$\text{Ha } n = a^2 + b^2, \text{ akkor } n^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$$

3. Az n olyan pozitív egész szám, mely felírható 3 pozitív egész szám négyzetének összegeként. Bizonyítsuk be, hogy akkor n^2 szintén rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Megoldás:

$$\text{Ha } n = a^2 + b^2 + c^2, \text{ akkor } n^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2$$

4. Milyen a, b, c, d pozitív egész számok esetén lesz $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ prím?

Megoldás:

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$$

Mindkét tényező nagyobb 1-nél, tehát nincs olyan pozitív egész a, b, c, d , melyre prím lenne a kifejezés.

5. Bizonyítsuk be, hogy az $1 \cdot 2 + 3, 4 \cdot 5 + 6, \dots, 2014 \cdot 2015 + 2016$ számokból akárhány elemet összeszorozunk, a szorzat előáll két négyzetszám összegeként!

Megoldás:

A sorozat minden eleme felírható: $(3k - 2) \cdot (3k - 1) + 3k$ alakban. Kibontva és átalakítva

$$(3k - 2) \cdot (3k - 1) + 3k = 9k^2 - 6k + 2 = (3k - 1)^2 + 1^2$$

Tehát a sorozat minden eleme felírható két négyzetszám összegeként. Az előző feladat állítása szerint $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ a sorozat bármely két elemének szorzata újra két négyzetszám összege lesz, így akárhány elemet szorzunk össze mindig felírható két négyzetszám összegeként.

6. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}xz - yt &= 5, \\xt + yz &= 16\end{aligned}$$

Négyzetre emelve, összeadva

$$(xz - yt)^2 + (xt + yz)^2 = (x^2 + y^2) \cdot (z^2 + t^2) = 5^2 + 16^2 = 881$$

Mivel a 881 prím, ezért a szorzat egyik tényezője 1 a másik 881. Két négyzetszám összege csak úgy lehet 1, ha az egyik szám az 1 a másik a 0. Így az egyik ismeretlen 0. Az első egyenletből következik, hogy vagy y vagy t egyenlő nullával és x és z közül az egyik 1, a másik 5. Megoldások $(5; 16; 1; 0), (1; 0; 5; 16)$.

7. Egy táblára felírtuk az 1 és 2 számokat. Ezután új számokat írhatunk a táblára a következő szabály szerint: ha szerepel a táblán a és b , akkor felírhatjuk az $a + b + ab$ számot. Eljuthatunk-e ilyen módon a 2014, az 13121, illetve a 12131 számokhoz.

Megoldás:

Néhány elemet felírva észrevehetjük, hogy a kapott számoknál egyel nagyobb számok prímtényezőös felosztásában, csak 2 és 3 szerepel.

Tehát vizsgáljuk az $a + b + ab + 1 = (a + 1) \cdot (b + 1)$ számokat. Ha $a = 2^n \cdot 3^k - 1$ és $b = 2^m \cdot 3^l - 1$, akkor $a + b + ab = 2^{n+m} \cdot 3^{k+l} - 1$. Tehát minden táblára kerülő szám ilyen alakú lesz.

2015 osztható 5-tel, tehát 2014 nem kerülhet fel a táblára. $13122 = 2 \cdot 3^8$, tehát 13121 lehet a táblán, $12132 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337$, azaz 12131 nem.

III. rész

1. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c, d olyan pozitív egészek, amelyekre $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$ teljesül, akkor $a + b + c + d$ összetett szám!

Megoldás:

Alakítsuk át a feltételt.

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + ab &= c^2 + d^2 + cd, \\(a + b)^2 - ab &= (c + d)^2 - cd, \\(a + b)^2 - (c + d)^2 &= ab - cd, \\(a + b + c + d) \cdot (a + b - c - d) &= ab - cd\end{aligned}$$

Alakítsuk át másképpen:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + ab &= c^2 + d^2 + cd, \\(a - b)^2 + 3ab &= (c - d)^2 + 3cd, \\(a - b)^2 - (c - d)^2 &= -3(ab - cd),\end{aligned}$$

$$(a - b + c - d) \cdot (a - b - c + d) = -3(ab - cd)$$

Összevetve az utolsó sorokat:

$$3 \cdot (a + b + c + d) \cdot (a + b - c - d) = -(a - b + c - d) \cdot (a - b - c + d)$$

Ha $a + b - c - d = 0$, akkor $a + b = c + d$, ezért $a + b + c + d = 2 \cdot (a + b)$, tehát $a + b + c + d$ összetett. Ha $a + b - c - d \neq 0$, akkor egyik oldal sem 0. Ha $a + b + c + d$ prím lenne, akkor osztója lenne a jobb oldali szorzat valamelyik tényezőjének. De ez nem lehet, mert mindkettő abszolút értéke pozitív, de kisebb, mint $a + b + c + d$ abszolút értéke.

Van-e olyan a, b, c, d pozitív számnégyes, amelyre a feltétel teljesül? Igen (1; 11; 4; 9).

2. Az a, b, c, d pozitív egész számokra igaz, hogy $ab = cd$. Bizonyítsuk be, hogy $a + b + c + d$ nem prím!

Megoldás:

Legyen $S = a + b + c + d$. Ekkor $Sa = a^2 + ab + ac + ad$, a második tagban cseréljük ki ab -t cd -re.

$$Sa = a^2 + cd + ac + ad = a(a + c) + d(a + c) = (a + c) \cdot (a + d)$$

Ha S prím lenne, akkor osztója lenne a jobb oldali szorzat valamelyik tényezőjének. De ez nem lehet, mert mindkét tényező pozitív és kisebb, mint S .

3. Az a, b, c, d pozitív egész számokra igaz, hogy $ab = cd$. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ nem prím!

Megoldás:

Hasonlóan az előzőhöz $a^2b^2 = c^2d^2$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c, d pozitív egész számokra teljesül, hogy $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, akkor $a + b + c + d$ összetett szám!

Megoldás:

Legyen $S = a + b + c + d$. Ekkor $S \cdot (a - c) = (a^2 - c^2) + (a - c) \cdot (b + d)$, a második tagban cseréljük ki $a^2 - c^2$ -t $d^2 - b^2$ -re.

$$S \cdot (a - c) = (a^2 - c^2) + (a - c) \cdot (b + d) = (d^2 - b^2) + (b + d) \cdot (a + c) = (b + d) \cdot (d - b + a - c)$$

Ha S prím lenne, akkor osztója lenne a jobb oldali szorzat valamelyik tényezőjének. De ez nem lehet, mert mindkét tényező abszolút értéke kisebb, mint S .

A foglalkozáson nem került sor a II./6.,7. feladatokra az I. illetve a II.részből. A III. részből csak a 2. feladatot és a módszert tudtuk megbeszélni.

Felhasznált irodalom:

Katz Sándor: Algebrai kifejezések alkalmazása oszthatósági feladatokban (Új utak és lehetőségek a matematikában konferencia, Nagykanizsa 2004)

Schultz János: Elemi matematikai versenyfeladatok (ZALAMAT, 2011)