1. Cantor-tétel

1. definíció. *Két halmaz egyenlő számosságú, ha elemeik összepárosíthatók egymással. Jele:* $|A| = |B|$.

2. definíció. *Az* A *halmaz nem nagyobb számosságú, mint a* B *halmaz, ha* A *egyenlő számosságú* B *valamely részhalmazával. Jele:* $|A| \leq |B|$.

3. definíció. *Az* A *halmaz kisebb számosságú, mint a* B *halmaz, ha*

- A *nem nagyobb számosságú, mint* B *és*
- A *és* B *nem egyenlő számosságúak*

4. definíció. *Az* A *halmaz részhalmazainak halmazát az* A *hatványhalmazának nevezzük. (Jele:* $P(A)$*.)*

1. tétel. *Bármely halmaz számossága kisebb, mint hatványhalmazának számossága.*

Bizonyítás: Először azt mutatjuk meg, hogy A számossága nem nagyobb, mint $P(A)$ számossága. Ehhez tekintsük a hatványhalmaz azon részhalmazát, amelyik A egyelemű részhalmazait tartalmazza. Ennek a részhalmaznak az elemei nyilválóan összepárosíthatók A elemeivel, vagyis A számossága megegyezik ennek a részhalmaznak a számosságával, így $|A| \leq |P(A)|$.

A és $P(A)$ számosságának különbözőségét indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy A és $P(A)$ azonos számosságú, vagyis elemeik összepárosíthatók egymással! Az összerendelési függvényt nevezzük f-nek, azaz egy A-beli a elem párja legyen az $f(a)$ részhalmaz. Nevezzük A egy a elemét (illetve a hozzárendelt $f(a)$ halmazt) „szépnek", ha $a \notin f(a)$!

Tekintsük azt az $S \subseteq A$ halmazt, amelyik a szép elemeket tartalmazza, és legyen s az ő párja! (Azaz $f(s) = S$.) Kérdés, hogy ez a halmaz szép-e. Amennyiben szép, akkor a hozzá tartozó s elem is szép, tehát szerepel S-ben, hiszen az minden szép elemet tartalmaz. Ez azonban ellentmond annak, hogy S szép lenne, hiszen benne van a párja. S tehát nem lehet szép. Ha azonban S nem szép, az a szépség definíciója miatt azt jelenti, hogy a párjának (s-nek) szerepelnie kell benne. Mivel azonban S a szép elemeket tartalmazza, következik, hogy a hozzá tartozó s elem szép, ami viszont ellentmond annak a feltételezésnek, hogy S nem az. Mivel S-ről kiderült, hogy akár szépnek, akár nem szépnek tételezzük fel, ellentmondásra jutunk, következik, hogy a kiinduló feltételezésünk hamis volt, tehát A és $P(A)$ elemei nem párosíthatók össze egymással, vagyis különböző számosságúak.

Mivel A és $P(A)$ nem egyenlő számosságúak, és A nem nagyobb számosságú, mint $P(A)$, kijelenthetjük, hogy $|A| < |P(A)|$.

□

2. Schönemann–Eisenstein kritérium

2. tétel. *Tekintsük az alábbi n-edfokú, egész együtthatós polinomot:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

Tegyük fel, hogy létezik egy olyan p prím, amire az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

- *a főegyüttható (a_n) kivételével minden együttható osztható p-vel,*
- *a főegyüttható nem osztható p-vel,*
- *a konstans tag (a_0) osztható ugyan p-vel, de p^2-tel már nem.*

Ebben az esetben az $f(x)$ polinom irreducibilis az egész számok felett, azaz nem bontható fel két nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinom szorzatára.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $f(x)$ reducibilis, azaz felírható $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ alakban, ahol g és h egész együtthatós polinomok:

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_kx^k$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_\ell x^\ell$$

Ekkor nyilván $n = k+\ell$, $a_n = b_k \cdot c_\ell$ és $a_0 = b_0 \cdot c_0$. Az a_n-re vonatkozó feltétel miatt $p \nmid b_k$, $p \nmid c_\ell$. Hasonlóan, az a_0-ra vonatkozó feltétel miatt b_0 és c_0 közül pontosan az egyik osztható p-vel. Mivel a két eset szimmetrikus, a továbbiakban a $p|b_0$, $p \nmid c_0$ esettel dolgozunk.

Mivel b_k nem osztható p-vel, b_0 azonban igen, létezik egy olyan i index, hogy b_{i+1} nem osztható p-vel, de b_i, …, b_0 igen.

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ miatt

$$a_{i+1} = b_0c_{i+1} + b_1c_i + \ldots + b_ic_1 + b_{i+1}c_0.$$

Az egyenlőség bal oldalán álló a_{i+1} oszható $p - vel$, mivel $i + 1 \leq k \leq n - 1$. A jobb oldalon az utolsó tag kivételével mindegyik osztható p-vel, így az utolsónak is muszáj, hogy osztható legyen p-vel. Ez azonban lehetetlen, hiszen sem b_{i+1}, sem c_0 nem ozthatók p-vel, vagyis ellentmondásra jutottunk, tehát hibás volt a kiinduló feltételeuésünk, vagyis $f(x)$ nem írható fel két nála kisebb fokszámú polinom szorzataként, tehát $f(x)$ irreducibilis. □

3. Sperner-lemma

5. definíció. *Egy ABC háromszög háromszögelésén a következőt értjük: felveszünk véges sok pontot a háromszög belsejében és az élein, majd ezek közül néhányat összekötünk egyenes szakaszokkal úgy, hogy a szakaszok ne metsszék egymást, és a keletkező tartományok háromszögek legyenek.*

3. tétel. *Tekintsük egy ABC háromszög tetszőleges háromszögelését, és színezzük ki a szakaszok metszéspontjait három színnel (piros, kék, zöld) úgy, hogy a következők teljesüljenek:*

- *az A csúcs piros, a B csúcs kék, a C csúcs zöld legyen,*
- *az AB oldalon lévő pontok csak pirosak vagy kékek lehetnek,*
- *az AC oldalon lévő pontok csak pirosak vagy zöldek lehetnek,*
- *az BC oldalon lévő pontok csak kékek vagy zöldek lehetnek,*
- *a belső pontok tetszőleges színűek lehetnek.*

Ekkor van olyan kis háromszög, aminek mindhárom csúcsa különböző színű.

Bizonyítás: Kezdetnek vegyük észre, hogy a külvilág és a nagy háromszög belseje között páratlan sok piros-kék él húzódik: ilyen élek csak az AB oldalon lehetnek, ahol ha végigfutunk a pontokon, akkor a piros A-ból a kék B-be jutunk, így páratlanszor kell színt váltanunk.

A tétel bizonyításához induljunk el kívülről, és lépegessünk a kis háromszögek (és a külvilág) között úgy, hogy mindig egy piros-kék szakaszon lépünk keresztül. Vegyük észre, hogy egy ilyen út során soha nem léphetünk olyan kis háromszögbe, ahol már jártunk, mivel akkor annak három piros-kék oldala kellene, hogy legyen, ami lehetetlen. (A külvilág ez alól termélszetesen kivétel.) Mivel véges sok tartomány van, előbb-utóbb muszáj elakadnunk valahol. Ha ez egy kis háromszögben történik, akkor annak muszáj, hogy a harmadik csúcsa zöld legyen, mert ha más színű lenne, akkor lenne egy újabb piros-kék él, amin átlépve elhagyhatnánk a háromszöget. (Mint azt már megállapítottuk, korábban már meglátogatott háromszögbe nem léphetünk be újból, tehát a piros-kék él túloldalán eddig még meg nem látogatott háromszög vagy a külvilág lehet csak.) Ha tehát egy kis háromszögben akadtunk el, akkor annak mindhárom csúcsa különöző színű, tehát a tétel állítása igaz.

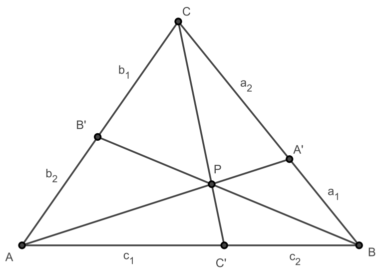
Kérdés, hogy elakadhatunk-e a külvilágban? Ahhoz, hogy kint elakadjunk, arra van szükség, hogy a külvilág és a háromszög belseje között fekvő összes piros-kék szakasz már felhasznált legyen. Ilyen szakaszból páratlan sok van, tehát ha kívülről indulunk, akkor páratlan sok határátlépés után a nagy háromszög belsejében vagyunk, vagyis nem akadhattunk el a külvilágban. Emiatt csak egy kis háromszögben akadhattunk el, vagyis az előző bekezdés értelmében létezik három színű háromszög. □

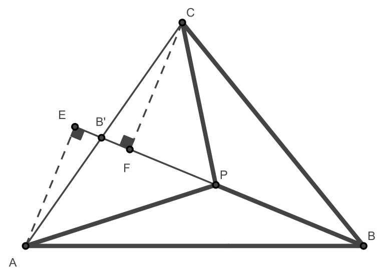
Bizonyítás: Tekintsük azt a gráfot, aminek a csúcsai a háromszögelés tartományai, és két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő tartományok szomszédosak a háromszögelésben, és az őket elválasztó szakasz egyik végpontja piros, a másik kék! Vizsgáljuk meg a külső tartományt. A neki megfelelő csúcs fokszáma biztosan páratlan, mert a külső tartomány és a nagy háromszög belseje között páratlan sok piros-kék él húzódik: ilyen élek csak az AB oldalon lehetnek, ahol ha végigfutunk a pontokon, akkor a piros A-ból a kék B-be jutunk, így páratlanszor kell színt váltanunk. Mivel minden gráf csúcsainak fokszámösszege páros, van még egy páratlan fokú csúcs a gráfban. Az ennek megfelelő kis háromszögnek tehát páratlan sok piros-kék oldala van. Három piros-kék oldal lehetetlen, így muszáj, hogy pontosan egy piros-kék oldala legyen a háromszögnek, amiből következik, hogy a harmadik csúcs zöld, tehát létezik a tétel feltételeinek megfelelő kis háromszög. $\square$

4. Ceva tétele

4. tétel. *Tekintsük az ABC háromszöget és a belsejében egy P pontot. Az AP, BP és CP félegyenesek messék a háromszög szemközti oldalait rendre az A', B' ill. C' pontokban. Ekkor*

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1$$





Bizonyítás: Tekintsük az ABP és a CBP háromszögeket! Az ABP háromszög BP oldalához tartozó magasság talppontja legyen E, a CBP háromszög BP oldalához tartozó magasság talppontja legyen F. A háromszögek területének aránya nyilvánvalóan megegyezik a közös oldalukhoz tartozó magasságok arányával. Az $AB'E$ és $CB'F$ szögek csúcsszögek, így a hozzájuk tartozó $AB'E$ és $CB'F$ derékszögű háromszögek hasonlók egymáshoz, így oldalaik aránya megegyezik egymással.

Összefoglalva az eddigieket:

$$\frac{t_A}{t_C} = \frac{T_{CBP}}{T_{ABP}} = \frac{CF}{AE} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{b_1}{b_2}$$

Hasonló módon kiderül, hogy

$$\frac{t_B}{t_A} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{t_C}{t_B} = \frac{a_1}{a_2}$$

Amiből már következik az állítás. □

5. Pick-tétel

5. tétel. *Legyen S egy tetszőleges rácssokszög a síkon! Ha az S határán lévő rácspontok számát h-val, a belsejébe eső rácspontok számát pedig b-vel jelöljük, akkor S területe*

$$T_S = b + \frac{h}{2} - 1$$

Bizonyítás: Legyen P egy tetszőleges rácssokszög és H egy vele egyetlen él mentén érintkező rácsháromszög! Legyen a P és H „összeragasztásával” kapott rácssokszög neve PH! Jelöljük a P, H és PH határán ill. belsejében lévő rácspontok számát a h_P, b_P, h_{PH}, … rövidítésekkel! Legyen a közös él mentén lévő rácspontok száma k. Ekkor az „összeragasztás” után igazak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} b_{PH} &= b_P + b_H + (k-2) \\ h_{PH} &= (h_P - k) + (h_H - k) + 2 \end{aligned}$$

Ha H-ra és P-re igaz a tétel, akkor PH-ra is:

$$\begin{aligned} T_{PH} = T_P + T_H &= \left(b_P + \frac{h_P}{2} - 1\right) + \left(b_H + \frac{h_H}{2} - 1\right) \\ &= (b_P + h_P) + \frac{h_P + h_H}{2} - 2 \\ &= (b_{PH} - k + 2) + \frac{h_{PH} + 2k - 2}{2} - 2 = b_{PH} + \frac{h_{PH}}{2} - 1 \end{aligned}$$

Ha H-ra és PH-ra igaz a tétel, akkor P-re is:

$$\begin{aligned} T_P = T_{PH} - T_H &= \left(b_{PH} + \frac{h_{PH}}{2} - 1\right) - \left(b_H + \frac{h_H}{2} - 1\right) \\ &= (b_{PH} - b_H) + \frac{h_{PH} - h_H}{2} \\ &= (b_P + k - 2) + \frac{h_P - 2k + 2}{2} = b_P + \frac{h_P}{2} - 1 \end{aligned}$$

□

Most azt igazoljuk, hogy egy tetszőleges rácsháromszögre igaz a tétel.

- Egy rácsvonalakkal párhuzamos oldalú téglalapra igaz a tétel: ha az oldalak hossza x és y, akkor $b = (x-1)(y-1)$, $h = 2x + 2y - 4$ és $T = x \cdot y$, amikre teljesül a kívánt összefüggés.
- Egy derékszögű, svonalakkal párhuzamos befogújú rácsháromszögre igaz a tétel: ha H egy x és y oldalú R rácstéglalap elfelezésével keletkezik, és az átlón k rácspont van, akkor $b_R = 2b_H + (k-2)$ és $h_R = 2h_H - 2k + 2$, amiből $T_H = \frac{T_R}{2} = \frac{b_R}{2} + \frac{h_R}{4} - \frac{1}{2} = b_H + \frac{h_H}{2} - 1$.
- Tetszőleges rácsháromszög kiegészíthető téglalappá néhány az előző pontban leírt háromszöggel, így a korábbiak miatt arra is igaz a tétel.

Mivel tetszőleges rácssokszög felbontható rácsháromszögekre, a háromszögekre igaz a tétel, és az „összeragasztás” megtartja ezt a tulajdonságot, bebizonyítottuk, hogy tetszőleges rácssokszögre igaz a tétel.

6. Erdős-Szekeres tétel

6. tétel. *Tetszőleges $n^2 + 1$ tagból álló sorozatban található $n + 1$ hosszú monoton növő, vagy monoton csökkenő részsorozat. (Részsorozat bármely néhány elem elhagyásával kapott sorozat, vagyis az elemeknek nem kell szomszédosaknak lenniük.)*

Bizonyítás: Írjunk a sorozat minden eleme mellé két számot: az első jelentse az ebben az elemben végződő leghosszabb monoton *növő* részsorozat hosszát, a második az ebben az elemben végződő leghosszabb monoton *csökkenő* részsorozat hosszát!

Vegyük észre, hogy két különböző elem mellé nem írhattuk ugyanazt a számpárt. Ha ugyanis a sorozatban korábban szereplő elem (x) kisebb vagy egyenlő, mint a későbbi (y), akkor az x-ben végződő leghosszabb monoton növő részsorozat végére illesztve y-t egy eggyel hosszabb monoton növő részsorozatot kapunk, vagyis nem egyezhet meg az x és y mellé írt első szám, hiszen az y mellé írt *legalább* eggyel nagyobb. Ha azonban x nagyobb, mint y, akkor az x-ben végződő leghosszabb monoton csökkenő részsorozat végére illesztve y-t egy eggyel hosszabb monoton csökkenő részsorozatot kapunk, vagyis nem egyezhet meg az x és y mellé írt második szám.

Tegyük fel, hogy a tétel állítása hamis, vagyis nincs $n + 1$ hosszú monoton részsorozat! Ez azt jelenti, hogy semelyik elem mellé nem írtunk n-nél nagyobb számot. 1 és n közötti számpárból n^2 van, tehát az $n^2 + 1$ számppár közül a skatulyaelv miatt van legalább kettő, amelyik megegyezik. Ez azonban ellentmond a korábbi megállapításunknak, tehát hamis az indirekt feltevésünk, tehát a tétel igaz. □

7. Erdős-Ko-Rado tétel

7. tétel. *Egy n elemű A halmaz $r \leq \frac{n}{2}$ elemű részhalmazai közül legfeljebb $\binom{n-1}{r-1}$ választható ki úgy, hogy bármely kettő messe egymást. $r > \frac{n}{2}$ esetén $\binom{n}{r}$ részhalmaz választható ki. Ez a két határ éles, vagyis ennyi részhalmaz valóban kiválasztható.*

Bizonyítás: Először intézzük el az $r > \frac{n}{2}$ esetet: ekkor bármely két r-elemű részhalmaz metszi egymást, így az összeset kiválaszthatjuk egyszerre, tehát a kiválasztható részhalmazok maximális száma $\binom{n}{r}$.

$r \leq \frac{n}{2}$ esetén $\binom{n-1}{r-1}$ elérhető: jelöljük ki A egyik elemét, s vegyük az összes olyan r elemű részhalmazt, amiben benne van a kijelölt elem! Ekkor nyilván bármely kettő részhalmaz metszi egymást, és ilyen részhalmazból $\binom{n-1}{r-1}$ van. (A nem kijelölt $n-1$ elem közül még $r-1$-et kell választani a kijelölt elem mellé.)

Következzék a főfogás, vagyis az előző konstrukció optimalitásának bizonyítása!

Képzeljünk el egy kört, aminek a szélére felírtuk az A halmaz elemeit valamilyen sorrendben. Nevezzük az ilyen köröket *ciklus*nak! (Két ciklust azonosnak tekintünk, ha egymásba forgathatóak, de a tükrözéssel egymásba vihetőket különbözőnek tekintjük.) Azt mondjuk, hogy egy kiválasztott (r elemű) részhalmaz és egy ciklus *összetartozik*, ha a részhalmaz elemei szomszédosak a kör íve mentén.

Legyen a kiválasztott részhalmazok száma k, és számoljuk meg az összetartozó ciklus-részhalmaz párokat kétféleképpen! Egy konkrét részhalmaz pontosan $r! \cdot (n-r)!$ ciklushoz tartozik: a részhalmaz r elemét $r!$ sorrendben írhatjuk rá a ciklusra, majd a maradék $n-r$ elemet $(n-r)!$ sorendben, vagyis $k \cdot r! \cdot (n-r)!$ összetartozó ciklus-részhalmaz pár van.

Vegyük észre, hogy egy C ciklushoz legfeljebb r kiválasztott részhalmaz tartozhat. Ennek belátásához vizsgáljuk meg az egyik C-hez tartozó kiválasztott részhalmazt, X-et! A C-hez tartozó többi részhalmaznak muszáj, hogy legyen közös eleme X-szel. Bármely ilyen részhalmazhoz tartozik egy „határ” X-en belül, aminek az egyik oldalán lévő elem mindkét halmazban benne van, míg a másik oldalán lévő elem csak X-ben. Egy határhoz nem tartozhat kettő vagy több részhalmaz: ellenkező esetben ha a két részhalmaz azonos oldalán helyezkedne el a határnak, akkor megegyezne egymással, míg ha különböző oldalán, akkor ($2r \leq n$ miatt) nem metszené egymást. Mivel X-en belül összesen $r-1$ lehetséges határ van, C-hez legfeljebb r részhalmaz tartozhat.

Az A halmaz elemeiből $(n-1)!$ darab ciklus képezhető: az elemeket $n!$ sorrendben írhatom fel a körre, de így minden ciklust n-szer számoltam (attól függően, hogy melyik elemnél kezdtem a körre írást), így összesen $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ ciklus létezik. Mint korábban megállapítottuk, egy ciklushoz legfeljebb r részhalmaz tartozhat, vagyia összesen legfeljebb $r \cdot (n-1)!$ darab összetartozó ciklus-részhalmaz pár van.

Összefoglalva az eddigieket:

$$k \cdot r! \cdot (n-r)! \leq r \cdot (n-1)!$$

Leosztva úgy, hogy a bal oldalon k maradjon:

$$k \leq \frac{r \cdot (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1}$$

□

8. Bolyai Farkas-féle sokszög-átdarabolási tétel

8. tétel. *Bármely két azonos területű sokszög átdarabolható egymásba, vagyis feldarabolható kisebb részekre úgy, hogy azokból összerakható a másik sokszög.*

Bizonyítás: A tételt több lépésben bizonyítjuk.

1. Vegyük észre, hogy az átdarabolhatóság tranzitív, vagyis ha egy A sokszög átdarabolható a B sokszöggé, és B átdarabolható a C sokszöggé, akkor A is átdarabolható a C sokszöggé.
2. Belátjuk, hogy egy háromszög átdarabolható egy vele egyenlő területű téglalappá. Ehhez a legnagyobb oldallal párhuzamos középvonallal egy kis háromszöget vágunk le, és ezt a középvonalra merőleges magasságvonalával vágjuk ketté. A kapott kis háromszögek a trapézt téglalappá egészítik ki.
3. Belátjuk, hogy két egyenlő alapú és egyenlő magasságú paralelogramma átdarabolható egymásba. Tegyük fel, hogy az $ABCD$ és az $ABC'D'$ paralelogrammák az AB egyenes ugyazon oldalán fekszenek. Feltehető, hogy legalább az egyik nem téglalap, különben egybevágók, és kész vagyunk. Ha a két paraleolgramma „felső" éle összeér, vagyis C' rajta van a CD szakaszon, akkor az ACC' és BDD' háromszögek egybevágóak, így a két paralelogramma átdarabolható egymásba. Ha C' nincs rajta a CD szakaszon, akkor tegyük fel, hogy a CD félegyenes D-n túli felén van. (A másik eset szimmetrikusan igazolható.) Mérjük fel a CD szakaszt még egyszer a D pont után, legyen az így kapott pont P! Az $ABCD$ paralelogramma az előző esethez hasonló módon átdarabolható az $ABDP$ paralelogrammává. Ismételjük az eljárást addig, amíg P nem esik a $C'D'$ szakaszra. (P nem tud „túlugrani" $C'D'$-n, mert minden lépésben a $C'D'$ szakasz hosszával megegyezőt lép.)
4. Belátjuk, hogy egy tetszőleges téglalap átdarabolható egy vele azonos területű, x széles téglalappá. Először nézzük azt az esetet, amikor az $ABCD$ téglalap rövidebbik oldala (BC) rövidebb, mint x. Ekkor van olyan C' és D' a CD oldal egyenesén, hogy $CD = C'D'$ és $BC' = AD' = x$. Ekkor $ABC'D'$ egy $ABCD$-vel azonos alapú és magasságú paralelogramma, így $ABCD$ átdarabolható $ABC'D'$-be. Mivel $ABC'D'$ egyik oldala x hosszú, így átdarabolható egy vele megegyező területű olyan téglalappá, amelynek egyik oldala x hosszú. A tranzitivitás miatt tehát $ABCD$ átdarabolható egy x széles téglalappá. Ha $ABCD$ mindkét oldala hosszabb, mint x, akkor BC-t osszuk fel k részre úgy, hogy $BC/k < x$ teljesüljön, majd „csíkozzuk fel" az $ABCD$ téglalapot BC-re merőlegesen k részre, és a csíkokat ragasszuk össze egy BC/k széles téglalappá. Innentől kezdve a korábban látott módon átdarabolható a téglalap x szélességbe.

A tétel belátásához elég megmutatnunk, hogy tetszőleges sokszög átdarabolható egy vele azonos területű, x széles téglalappá. Ehhez először osszuk fel háromszögekre a sokszöget, majd a háromszögeket egyenként daraboljuk át téglalapokká. A kapott téglalapok mindegyikét daraboljuk át úgy, hogy x szélesek legyenek, majd az így keletkezett téglalapokat egyesítsük egy, az eredeti sokszöggel megegyező területű x széles téglalappá. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

□

9. Szögfelező hosszának kiszámítása

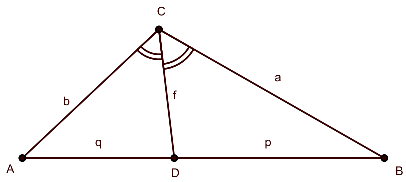
1. lemma. *(Szögfelező-tétel) Tekintsük az ABC háromszöget. Jelöljük D-vel a C-ből induló belső szögfelező metszéspontját az AB oldallal! Legyen $p = BD$ és $q = AD$. Ekkor $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$.*

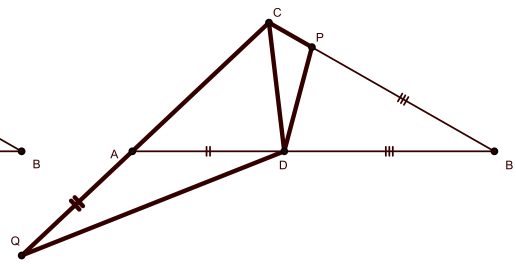
Bizonyítás: Legyen az ADC háromszög területe T_A, a BDC háromszög területe T_B!

Mivel a két háromszög C-hez tartozó magassága megegyezik, a területeik aránya megegyezik a háromszögek alapjának arányával, vagyis $\frac{T_B}{T_A} = \frac{BD}{AD} = \frac{p}{q}$.

Mivel a D pont rajta van az ACB szög szögfelezőjén, következik, hogy azonos távolságra van az AC és BC oldalaktól. Emiatt a két háromszög D csúcshoz tartozó magasságának hossza megegyezik, így területeik aránya megegyezik a D-vel szemközti oldalaik arányával, vagyis $\frac{T_B}{T_A} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$.

Az előző két bekezdés eredményét összevetve kiderül, hogy $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$. □





9. tétel. *Az előző lemma jelöléseit használva a szögfelező hossza $f = \sqrt{ab - pq}$*

Bizonyítás: Mérjük fel p-t a BC oldalra a B pontból, és jelöljük a másik végpontját P-vel! Mérjük fel q-t a AC oldal egyenesére A-tól kifelé, és jelöljük a másik végpontját Q-val!

Legyen $ABC\angle = \beta$ és $BCA\angle = \gamma$! Ekkor $DAQ\angle = \beta + \gamma$, mivel külső szöge az ABC háromszögnek. Mivel ADQ egyenlő szárú, $CQD\angle = \frac{180° - \beta - \gamma}{2}$. Mivel CD szögfelező, $QCD\angle = PCD\angle = \frac{\gamma}{2}$. Mivel BPD háromszög egyenlő szárú, $BPD\angle = \frac{180° - \beta}{2}$, így $CPD\angle = \frac{180° - \beta}{2}$. A CPD háromszög szögeinek összege $180°$, így $CDP\angle = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{180° - \beta}{2} = \frac{180° - \beta - \gamma}{2}$.

Azt kaptuk tehát, hogy az CQD és CPD háromszögek szögei megegyeznek, vagyis a két háromszög hasonló. Emiatt megfelelő oldalaik aránya megegyezik, vagyis

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{CD}{CP}$$

Beírva a szakaszok hosszát:

$$\frac{b+q}{f} = \frac{f}{a-p}$$

Átrendezve:

$$f^2 = (b+q)(a-p) = ab - pq + aq - bp$$

A szögfelező-tétel miatt $aq - bp = 0$, vagyis

$$f^2 = ab - pq$$

□

10. Cayley-formula

6. definíció. *Számozott fa, mikor egyezik meg, mikor különbözik. (Mese.) Vegyük észre, hogy n-1 éle van.*

10. tétel. *n csúcsú számozott fából n^{n-2} darab van.*

Bizonyítás: Irányítsuk meg egy számozott fa éleit úgy, hogy valamelyik pontjából (a *gyökérből*) bármely másik pont elérhető legyen! Nevezzük az így kapott gráfot *(számozott) fenyőnek*.

Jelöljük az n csúcsú számozott fák számát s-sel!

A következők során kétféle módon kiszámoljuk, hány n csúcsú számozott fenyő van. Először vizsgáljuk meg, hogy egy számozott fát hányféleképpen tudunk fenyővé alakítani! Vegyük észre, hogy miután kijelöltük a fa egyik csúcsát gyökérnek, az irányítás egyértelmű. Mivel bármelyik csúcsot kijelölhetjük gyökérnek, egy fát pontosan n-féleképp alakíthatunk fenyővé, vagyis összesen $s \cdot n$ számozott fenyő van.

Építsük most fel a fát a „semmiből", azaz induljunk ki n nem-összekötött pontból, és minden lépésben kössünk össze kettőt egy irányított éllel. A k. él behúzása után $n - k$ fenyőből áll a gráf, mivel minden lépésben két különböző fenyő egy-egy pontját kötjük össze egymással, hisz ellenkező esetben kör keletkezne a gráfban. A $k + 1$. él végpontja muszáj, hogy valamelyik eddig kialakult fenyő gyökere legyen, ellenkező esetben a végül elkészülő gráfban nem lenne gyökérelem. Vagyis minden lépésben ki kell választanunk egy tetszőleges kezdőpontot, és egy ettől eltérő fenyő gyökerét. A fentiek alapján tehát $(n\cdot(n-1))\cdot(n\cdot(n-2))\cdot(n\cdot(n-3))\cdots(n\cdot 1) = n^{n-1}\cdot(n-1)!$ féle módon építhetjük fel a fenyőnket. Azonban ebben az esetben minden elkészült fenyőt $(n-1)!$-szor számoltunk, hiszen ennyiféle sorrendben húzhattuk be a fenyő éleit. Azaz ezzel a módszerrel azt állapíthattuk meg, hogy pontosan $\frac{n^{n-1}\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n^{n-1}$ számozott fenyő van.

Az eddigeket összevetve azt kapjuk, hogy

$$s \cdot n = n^{n-1}$$

Mindkét oldalt leosztva n-nel $s = n^{n-2}$, vagyis a tételt bebizonyítottuk. □

11. Mycielski-konstrukció

7. definíció. *Egy gráf helyes színezésén azt értjük, hogy minden csúcsához hozzárendelünk egy színt úgy, hogy szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak.*

11. tétel. *Tetszőleges $\ell \leq 2$-re létezik olyan gráf, amiben nincs háromszög és nem színezhető ki helyesen ℓ színnel.*

Bizonyítás:

Legyen G_2 az 5 pontú kör! Könnyen ellenőrizhető, hogy teljesülnek a rá feltételek $\ell = 2$ esetén.

G_{k+1}-et rekurzívan képezzük G_k-ból. Jelöljük G_k csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$-nel. G_{k+1}-nek legyen $2n+1$ csúcsa, amiket jelöljünk a következő módon: $u_1, u_2, \ldots, u_n, w_1, w_2, \ldots, w_n, x_0$.

Az egyes csúcsokat a következő módon kössük össze egymással:

- u_i és u_j pontosan akkor legyenek szomszédosak, ha v_i és v_j szomszédosak voltak G_k-ban.
- u_i és w_j pontosan akkor legyenek szomszédosak, ha v_i és v_j szomszédosak voltak G_k-ban.
- u_i és w_i ne legyenek szomszédosak.
- u_i és x_0 ne legyenek szomszédosak.
- w_i és x_0 legyenek szomszédosak.

Máshogy megfogalmazva: rajzoljuk le G_k-t valahogyan (ezek lesznek az u_i csúcsok, más néven az 1. szint), majd minden u_i „felé” vegyünk fel egy w_i csúcsot, amit kössünk össze u_i szomszédaival. Ezután vegyünk fel egy 3. szinten egyetlen x_0 pontot, és kössük össze azt a 2. szint pontjaival.

A következőkben belátjuk, hogy ha G_k-ban nincs háromszög és nem színezhető ki helyesen k színnel, akkor G_{k+1}-ben sincs háromszög, és nem színezhető ki helyesen $k+1$ színnel.

Vizsgáljuk meg, hogy hol helyezkedhetnének el egy háromszög csúcsai G_{k+1}-ben! Az nem lehet, hogy mindhárom csúcs az első szinten legyen, mert G_k-ban nincs háromszög. A második szinten semelyik két pont nincs összekötve egymással, így a háromszög legfeljebb egy csúcsa lehet itt. Egy u_i, u_j, w_ℓ háromszög létezése esetén viszont u_i, u_j és u_ℓ is háromszöget alkotnának, ami nem lehetséges. Kizárólag az első két szint pontjainak használatával tehát nem találhatunk háromszöget. Ha bevesszük az x_0 pontot is a játékba, akkor a háromszög másik két csúcsának muszáj a 2. szinten lennie, hiszen x_0 nincs összekötve semelyik első szintbeli ponttal sem. Ez azonban lehetetlen, hiszen a 2. szintbeli pontok nincsenek összekötve egymással, így G_{k+1}-ben valóban nincs háromszög.

Tegyük fel, hogy sikerült kiszínezni G_{k+1}-et helyesen $k+1$ színnel! Megmutatjuk, hogy ekkor G_k is helyesen kiszínezhető lenne k színnel. Legyen az x_0 csúcs színe c! Amennyiben u_i színe nem c, színezzük v_i-t ugyanolyan színűre, mint u_i-t! Amennyiben u_i színe c, v_i színe legyen w_i színével megegyező. G_k csúcsainak ez a színezése csak k színt használ (hiszen a G_{k+1} színezéséhez használt $k+1$ szín közül nem használtuk c-t), és helyes: ha két szomszédos v_i ill. v_j csúcs színe megegyezne, az vagy azt jelentené, hogy u_i és u_j színe megegyezik (és c-től különböző), ami lehetetlen, hiszen szomszédosak G_{k+1} -ben; vagy azt, hogy u_i és u_j közül az egyik (mondjuk u_i) c színű, és w_i és u_j színe megegyezik, ami szintén lehetetlen, hiszen ők is szomszédosak G_{k+1}-ben. Sikerült tehát kiszíneznünk G_k-t k színnel helyesen, ami lehetetlen, tehát nem színezhettük ki G_{k+1}-et helyesen $k+1$ színnel.

Mivel $\ell = 2$-re G_2 kielégíti a tétel feltételeit, és megmutattuk, hogy ha G_k kielégíti a feltételeket $\ell = k$-ra, akkor G_{k+1} kielégíti a feltételeket $\ell = k + 1$-re, ezért kimondhatjuk, hogy tetszőleges ℓ-re G_ℓ megfelel a feladat feltételeinek.

$\square$