Erben Péter: Egy sangaku feladat

BDG matektábor, 2013 október 9-12.

Bevezető

A foglalkozás két részében egy nevezetes sangaku feladatot néztünk meg, amire három különböző megoldást adtunk.

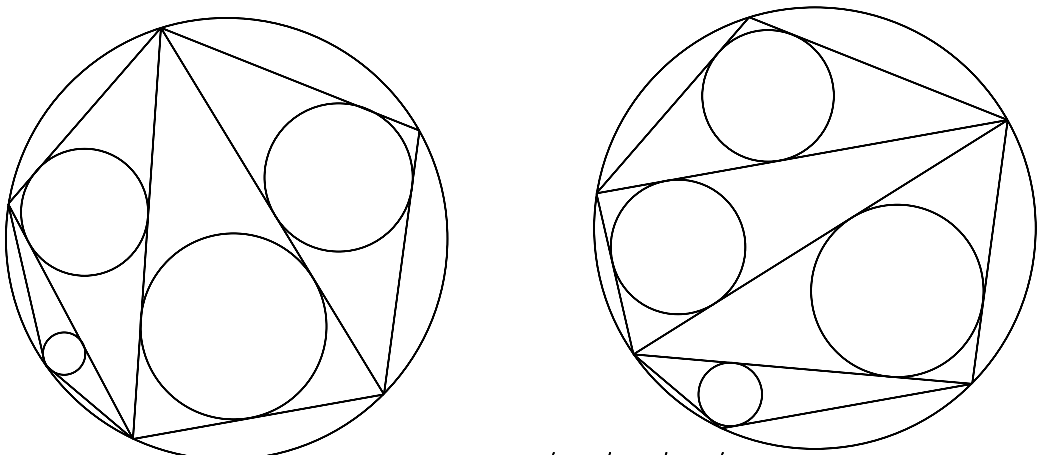
A sangaku feladatokról Szabó Péter Gábor írt a KöMaL-ban [1]:

„Az Edo korszak (1603-1867) ideje alatt Japán el volt zárva a nyugati világtól. Ebben az időszakban tanult emberek (társadalmi helyzetüktől függetlenül) számos geometriai összefüggést fedeztek fel. Az eredményeket fatáblára rajzolták, szépen kiszínezték és elhelyezték egy-egy sintoista szentélyben vagy buddhista templomban, általában a tetőről lelógatva. Az ilyen táblát hívják *sangakunak*, amely matematikai táblát jelent japánul. A fatáblák közül több van, amely olyan igényesen lett elkészítve, hogy művészi alkotásnak is tekinthető. Sok ügyes geométer ajánlott sangakut köszönetként az égieknek egy-egy újabb tétel felfedezéséért. A bizonyításokat ritkán közölték, a problémák ezért kihívások lehettek mások számára."

A táborban megoldott példát Marshall Unger a legismertebb sangaku feladatnak nevezte [2].

Egy ismert japán tétel

Feladat: Adott egy körbe írt n oldalú konvex sokszög. A sokszöget átlóival háromszögekre bontjuk, és a kapott háromszögek beírt köreit tekintjük. A beírt körök sugarainak összege mindegyik háromszögfelbontásra azonos.



$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = r_1' + r_2' + r_3' + r_4'$$

Stratégiák

A táborban két lényegesen különböző iránnyal próbálkoztunk.

Lokális stratégiának neveztük a következőt:

i.) Bizonyítsuk be a tételt $n = 4$ esetén, vagyis húrnégyszögekre.
ii.) Mutassuk meg, hogy ebből következik $n > 4$-re is az állítás.

Felvetettük, hogy talán létezik egy *globális stratégia* is:

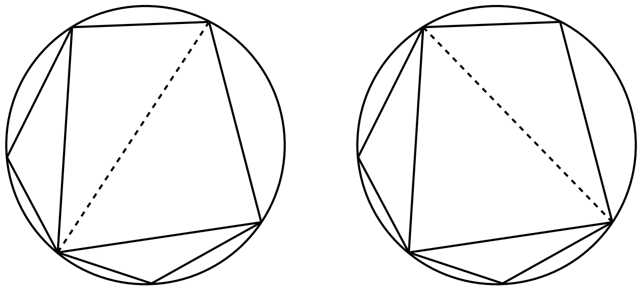
Megpróbálhatunk keresni egy olyan mennyiséget, ami a háromszög beírt és köréírt körének sugara között úgy teremt kapcsolatot, hogy a közös köréírt körrel rendelkező háromszögek esetében a beírt körök sugarainak összege *teleszkópos összegként* viselkedik, vagyis a „kellemetlen” részek kiesnek.

A folytatásban három különböző lokális stratégiát használó megoldást mutatunk be. A harmadik el fog vezetni a globális megoldáshoz is.

Megoldások lokális stratégiával

Mielőtt belekezdenénk a húrnégyszögre vonatkozó állítás különböző bizonyításainak ismertetésébe, gondoljuk végig, hogy ez a megközelítés tényleg helyes. Azt kell látni, hogy egy sokszög bármely háromszögeléséből eljuthatunk bármelyik másik háromszögeléséhez, a következő lépés ismételt végrehajtásával:

Kiválasztjuk a sokszög négy csúcsát, és tekintjük az ezek által kijelölt konvex négyszöget. Mivel az eredeti sokszöget átlókkal háromszögekre bontottuk, biztos, hogy a most kiválasztott négyszögnek pontosan az egyik átlója van behúzva. A lépés az, hogy ezt az átlót kicseréljük a négyszög másik átlójára.



Ha nem elégszünk meg, a „szemléletesen látszik” megjegyzéssel, akkor például a csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyíthatunk.

A következőkben tehát az alábbi feladat megoldására koncentrálunk.

Feladat: Adott egy $ABCD$ húrnégyszög. Jelölje az ABC, BCD, CDA, DAB háromszögek beírt körének sugarát rendre r_D, r_A, r_B és r_C. A sugarakra teljesül a következő összefüggés:

$$r_A + r_C = r_B + r_D.$$

1. változat: területképletek és Ptolemaiosz-tételek

Czövek Márton megoldása alapján

A beírt és köréírt kör sugara között kapcsolatot teremthetünk két ismert területképlet segítségével. Ha egy háromszög oldalainak hossza a, b és c, beírt körének sugara r, köréírt körének sugara pedig R, akkora háromszög területe

$$T = rs = \frac{abc}{4R},$$

ahol s a kerület fele. Innen a beírt kör sugara kifejezhető:

$$r = \frac{abc}{2R(a+b+c)}. \qquad (r)$$

Most bevezetünk néhány jelölést és visszatérünk a húrnégyszöghöz. Legyen $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e$ és $BD = f$. Az (r) összefüggést az összes keletkező háromszögre alkalmazva az alábbi alakra hozható bizonyítandó összefüggésünk:

$$\frac{bcf}{2R(b+c+f)} + \frac{afd}{2R(a+f+d)} = \frac{cde}{2R(c+d+e)} + \frac{abe}{2R(a+b+e)}.$$

Egyszerűsítés és összevonás után:

$$\frac{bcf(a+f+d)+afd(b+c+f)}{(b+c+f)(a+f+d)}=\frac{cde(a+b+e)+abe(c+d+e)}{(c+d+e)(a+b+e)}$$

Most egy vakmerő lépés következik: *felbontjuk a zárójeleket.* Persze rögtön csoportosítjuk is a tagokat, egymás mellé rendezzük azokat, amelyek a Ptolemaiosz-tételre emlékeztetnek. Ptolemaiosz két – húrnégyszögekre vonatkozó – tételét fogjuk használni, amelyek most használt jelöléseinkkel így írhatók:

$$(PT1) \qquad ef=ac+bd$$

$$(PT2) \qquad \frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

$$\frac{f^2(ad+bc)+f(abc+abd+acd+bcd)}{ac+bd+ab+cd+f(a+b+c+d)+f^2}=\frac{e^2(ab+cd)+e(abc+abd+acd+bcd)}{ac+bd+ad+bc+e(a+b+c+d)+e^2}$$

Az első törtet kezdjük átalakítani:

$$\frac{f^2(ad+bc)+f(abc+abd+acd+bcd)}{(ac+bd)+(ab+cd)+f(a+b+c+d)+f^2}=\frac{f^2(ad+bc)+f(abc+abd+acd+bcd)}{ef+\frac{f}{e}(ad+bc)+f(a+b+c+d)+f^2}=$$

$$=\frac{f(ad+bc)+(abc+abd+acd+bcd)}{e+\frac{1}{e}(ad+bc)+(a+b+c+d)+f}=\frac{e(ab+cd)+(abc+abd+acd+bcd)}{e+\frac{1}{e}(ad+bc)+(a+b+c+d)+f}=$$

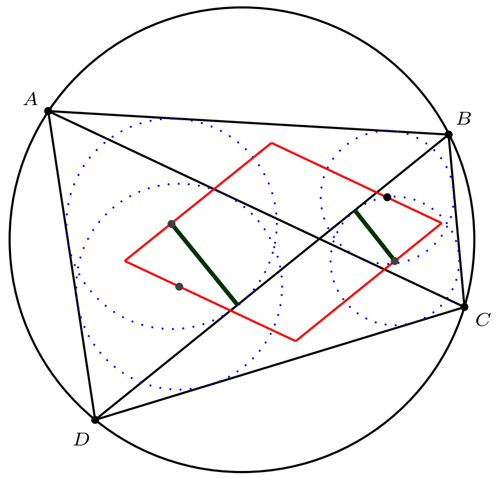
$$=\frac{e^2(ab+cd)+e(abc+abd+acd+bcd)}{e^2+(ad+bc)+e(a+b+c+d)+ef}=\frac{e^2(ab+cd)+e(abc+abd+acd+bcd)}{e^2+(ad+bc)+e(a+b+c+d)+ac+bd}$$

Megkaptuk a jobb oldalon álló törtet.

2. változat: elemi geometriai megközelítés

Katona Máté ötlete alapján

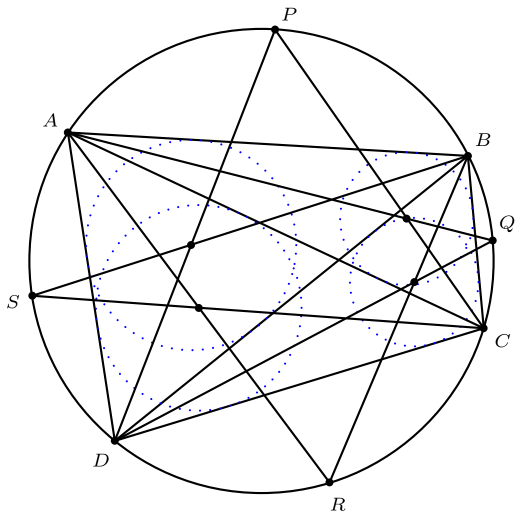
Rajzoljunk a négy beírt kör középpontján át párhuzamosokat az átlókkal, az ábra szerint.

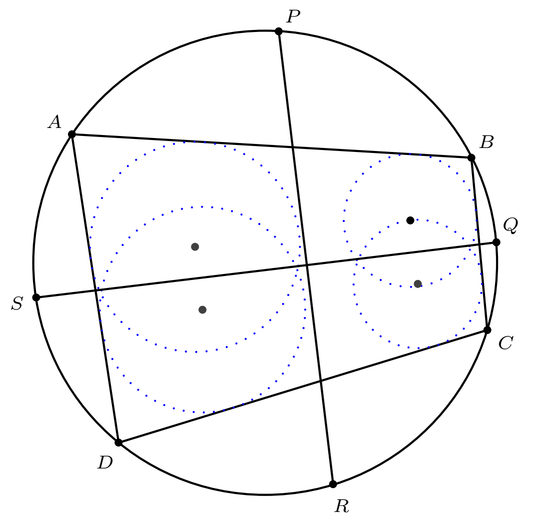


Ha be tudnánk látni, hogy ezek a párhuzamosok egy rombuszt zárnak közre, akkor kész lennénk, hiszen a feladat állításában szereplő két sugárösszeg éppen a rombusz két (egyenlő) magasságát adja ki.

A folytatásban fel fogjuk használni a következő (ismert) állítást: az ABC háromszög A-ból induló belső szögfelezője felezi az ABC háromszög köréírt körének A-t nem tartalmazó ívét.

Ezt a segédtételt alkalmazzuk az ABC, BCD, CDA és DAB háromszögekre. Így kapjuk a P, Q, R, S pontokat.



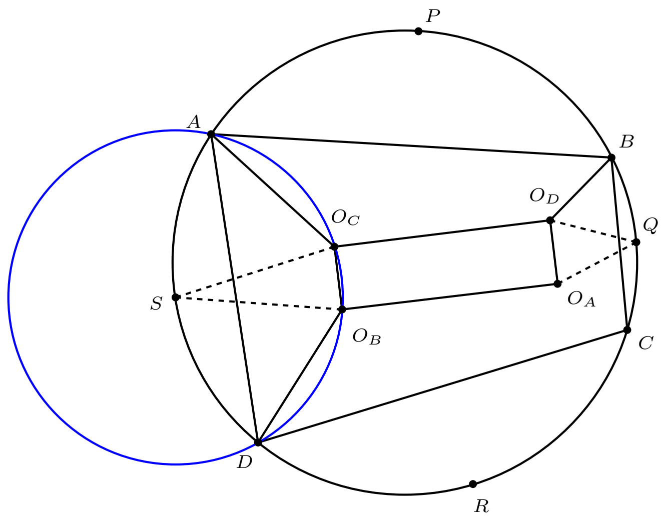


M-lemma. $PR \perp QS$

Bizonyítás: A kerületi szögek tétele alapján $ARP\sphericalangle = \frac{1}{2}ARB\sphericalangle$ és $ARS\sphericalangle = \frac{1}{2}ARD\sphericalangle$, vagyis $SRP\sphericalangle = \frac{1}{2}DCB\sphericalangle$. Hasonlóan $QSR\sphericalangle = \frac{1}{2}BAD\sphericalangle$. Tehát $SRP\sphericalangle + QSR\sphericalangle = \frac{1}{2}\left(DCB\sphericalangle + \frac{1}{2}DAB\sphericalangle\right) = 90°$.

T-lemma. A négy beírt kör középpontja téglalapot alkot, amelynek oldalai párhuzamosak a PR és QS szakaszokkal.

Bizonyítás: (*Forrás Bence megoldása alapján.*) Az első fontos észrevétel, hogy az AO_CO_BD, AO_CO_DB, BO_DO_AC, CO_AO_BD négyszögek húrnégyszögek. Az AO_CO_BD négyszögben $O_CAO_B\sphericalangle = O_CAD\sphericalangle - O_BAD\sphericalangle = \frac{1}{2}(BAD\sphericalangle - CAD\sphericalangle)$. Hasonlóan $O_CDO_B\sphericalangle = ADO_B\sphericalangle - ADO_C\sphericalangle = \frac{1}{2}(ADC\sphericalangle - ADB\sphericalangle)$. Innen $O_CAO_B\sphericalangle = O_CDO_B\sphericalangle \Leftrightarrow \frac{1}{2}(BAD\sphericalangle - CAD\sphericalangle) = \frac{1}{2}(ADC\sphericalangle - ADB\sphericalangle) \Leftrightarrow BAD\sphericalangle + ADB\sphericalangle = CAD\sphericalangle + ADC\sphericalangle \Leftrightarrow ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$.

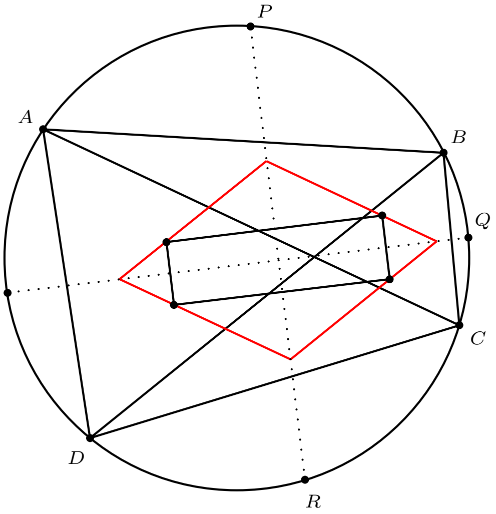


Most már egyszerű a befejezés. $AO_CO_B\sphericalangle = 180° - ADO_B = 180° - \frac{1}{2}ADC\sphericalangle$ és $AO_CO_D\sphericalangle = 180° - ABO_D = 180° - \frac{1}{2}ABC\sphericalangle$, vagyis (a konvex) $O_DO_CO_B\sphericalangle = 306° - (180° - \frac{1}{2}ADC\sphericalangle) - (180° - \frac{1}{2}ABC\sphericalangle) = 90°$. Az $O_AO_BO_CO_D$ többi szögéről hasonlóan igazolható, hogy derékszög.

Felhasználunk egy másik ismert tényt: az ABC háromszög beírt körének középpontja, továbbá B és C egyenlő távol vannak a köréírt kör A-t nem tartalmazó ívének felezőpontjától. Ebből következik, hogy például AO_CO_BD köréírt körének középpontja éppen S, vagyis $SO_C = SO_B$. Hasonlóan $QO_D = QO_A$. Tehát az O_CO_B és O_DO_A szakaszok közös felezőmerőlegese tartalmazza az S és Q pontokat. Ugyanígy bizonyítható, hogy P és R a téglalap másik szimmetriatengelyére esik.

(*Megjegyzés.* Az **M-lemma** alapján egyszerűsíthető a levezetés, ha rögtön felhasználjuk, hogy $SO_C = SO_B$. Innen $O_CO_B \perp SQ$ és $O_DO_A \perp SQ$. Hasonlóan $O_CO_D \perp PR$ és $O_BO_A \perp PR$. SQ és PR merőlegessége miatt innen következik, hogy $O_AO_BO_CO_D$ téglalap.)

A befejezéshez a **T-lemmát** fogjuk használni.



A bizonyítás azon múlik, hogy a piros paralelogramma szomszédos oldalairól megmutatjuk, hogy egyenlő nagyságú (de ellentétes irányú) szöget zárnak be a PR illetve SQ szakaszokkal. Ebből ugyanis következik, hogy a paralelogramma átlói éppen PR és SQ, amik ráadásul szimmetriatengelyek, tehát a piros négyszög valóban rombusz.

Elég a DB és AC átlók PR-rel bezárt szögét vizsgálni. $(DB, PR)\sphericalangle = 180° - (BDR\sphericalangle + DRP\sphericalangle)$ és $(AC, PR)\sphericalangle = 180° - (CAP\sphericalangle + APR\sphericalangle)$. Az kell tehát, hogy $BDR\sphericalangle + DRP\sphericalangle = CAP\sphericalangle + APR\sphericalangle$ teljesüljön.

Ez pedig igaz, mert $BDR\sphericalangle + DRP\sphericalangle = (BDC\sphericalangle + CDR\sphericalangle) + (DRA\sphericalangle + ARP\sphericalangle) = (BAC\sphericalangle + CPR\sphericalangle) + (DPA\sphericalangle + PAB\sphericalangle) = (PAB\sphericalangle + BAC\sphericalangle) + (CPR\sphericalangle + DPA\sphericalangle) = PAC\sphericalangle + (DPR\sphericalangle + DPA\sphericalangle) = PAC\sphericalangle + APR\sphericalangle)$.

3. változat: trigonometria

Madarász Zénó megoldása alapján

Az első változatban használt területképletek *összeszorzásával* más irányba is indulhatunk.

$$T^2 = rs \cdot \frac{abc}{4R} = \frac{r}{R}\frac{abc(a+b+c)}{8}$$

A bal oldalon megjelent a terület négyzete, amit a Héron-képlet levezetéséből esetleg ismerhetünk.

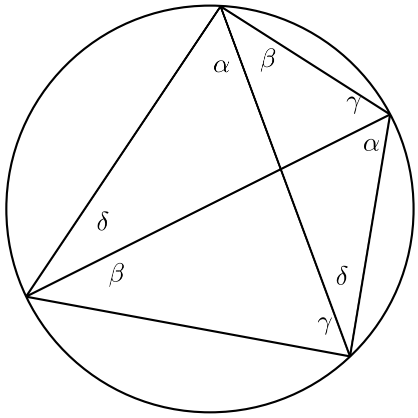
$$\begin{aligned}
\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16} &= \frac{r}{R}\frac{abc(a+b+c)}{8} \\
\frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2abc} &= \frac{r}{R} \\
\frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)+2abc}{2abc} &= 1+\frac{r}{R} \\
\frac{(-a^3+a^2b+a^2c+ab^2-2abc+ac^2-b^3+b^2c+bc^2-c^3)+2abc}{2abc} &= 1+\frac{r}{R} \\
\frac{-a^3+a^2b+a^2c+ab^2+ac^2-b^3+b^2c+bc^2-c^3}{2abc} &= 1+\frac{r}{R} \\
\frac{a\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)+c\cdot\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2abc} &= 1+\frac{r}{R} \\
\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} &= 1+\frac{r}{R} \\
\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &= 1+\frac{r}{R}
\end{aligned}$$

Most felhasználjuk, hogy az „átló átforgatásakor” nem változik a köréírt kör sugara, ezért azt konstansnak (= 1) vesszük. A kerületi szögek tétele alapján az ábrán azonosan jelölt szögek egyenlők. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$(\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma+\cos\delta-1)+(\cos(\delta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta-1)=$$

$$=(\cos(\alpha+\gamma)+\cos\beta+\cos\delta-1)+(\cos(\delta+\beta)+\cos\alpha+\cos\gamma-1),$$

az $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$ feltétel mellett.



Egyszerűsítés után :

$$(*)\qquad \cos(\alpha+\beta)+\cos(\delta+\gamma)=\cos(\alpha+\gamma)+\cos(\delta+\beta).$$

Most felhasználjuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$, és azt, hogy $\cos\alpha=-\cos(180°-\alpha)$. Rögtön látható, hogy (*)-ban az egyenlőség mindkét oldalán nulla áll.

Globális stratégia

Lemma: Egy háromszög beírt körének sugara r, köréírt körének sugara R, a köréírt kör középpontjának oldalegyenesektől mért távolsága d_1, d_2, d_3. Ekkor $R+r=d_1+d_2+d_3$.

Bizonyítás: Az előző szakaszban bizonyítottuk, hogy $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}$.

Átrendezve: $R\cdot(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=R+r$. Végül vegyük észre, hogy $d_1=R\cdot\cos\alpha$, $d_2=R\cdot\cos\beta$, $d_3=R\cdot\cos\gamma$ (előjel helyesen).

A lemma felhasználásával egy meglepően rövid megoldást adhatunk eredeti feladatunkra.

Egy tetszőleges háromszögelésben minden háromszög beírt körének sugarát kifejezzük a lemma alapján. Az i. háromszögre ez így néz ki:

$$r_i=d_{i,1}+d_{i,2}+d_{i,3}-R.$$

Az összegzésnél kétféle $d_{i,j}$ fordul elő. Vannak azok a távolságok, amelyeket a sokszögek oldalitól mérünk. Ezek pontosan egyszer fordulnak elő, és nem függenek a választott háromszögeléstől. Vannak továbbá azok a távolságok, amelyek valamelyik átlótól mértek. Ezek viszont pontosan kétszer szerepelnek (abban a két háromszögben, amelynek az adott átló közös oldala), egyszer pozitív, egyszer pedig negatív előjellel. Tehát a háromszögeléstől függő $d_{i,j}$-k kiesnek az összegzésnél.

Kész vagyunk:

$$\sum r_i = \text{a köréírt kör középpontjának a sokszög oldalaitól mért előjeles távolságösszege} - (n-2)R.$$

Appendix: Sok különböző háromszögelés létezik?

Érdemes megjegyezni, hogy a feladat nagyon sok különböző felbontásra mondja ki a sugárösszeg állandóságát. Viszonylag ismert, hogy egy n-oldalú konvex sokszöget átlóival C_{n-2}-féle módon bonthatunk háromszögekre, ahol C_n az n. *Catalan-szám*: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Aki a Catalan-számokkal szeretne ismerkedni, annak az [5] és [6] cikkeket ajánljuk.

Források

[1] Szabó Péter Gábor, *Sangaku, matematikai fatáblák japán templomokban*
KöMaL, 2002. június
`http://www.komal.hu/cikkek/sangaku/sangaku.h.shtml`

[2] J. Marshall Unger, *A Collection of Sangaku Problems*
Ohio State University, 2013
`http://people.cohums.ohio-state.edu/unger26/Sangaku.pdf`

[3] R. Honsberger, *An Old Japanese Theorem*
Mathematical Gems, III, 1985, pp. 22-26.
`http://www.cut-the-knot.org/proofs/jap.shtml`

[4] H. Fukagawa, D. Pedoe, *Japanese Temple Geometry Problems*
The Charles Babbage Research Center, Winnipeg, 1989

[5] Csonka Dorottya, *Catalan-számok*
BDG Matektábor, 2012

[6] R. Stanley, *Catalan addendum*
`http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf`