

Erben Péter: Egy sangaku feladat

BDG matektábor, 2013 október 9-12.

Bevezető

A foglalkozás két részében egy nevezetes sangaku feladatot néztünk meg, amire három különböző megoldást adtunk.

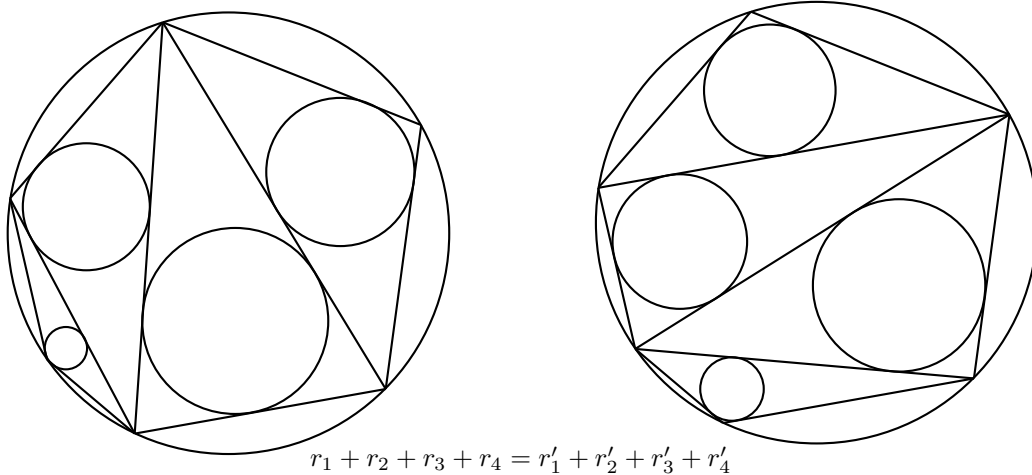
A sangaku feladatokról Szabó Péter Gábor írt a KöMaL-ban [1]:

„Az Edo korszak (1603-1867) ideje alatt Japán el volt zárva a nyugati világtól. Ebben az időszakban tanult emberek (társadalmi helyzetüktől függetlenül) számos geometriai összefüggést fedeztek fel. Az eredményeket fatáblára rajzolták, szépen kiszínezték és elhelyezték egy-egy sintoista szentélyben vagy buddhista templomban, általában a tetőről leólgatva. Az ilyen táblát hívják *sangakunak*, amely matematikai táblát jelent japánul. A fatáblák közül több van, amely olyan igényesen lett elkészítve, hogy művészi alkotásnak is tekinthető. Sok ügyes geométer ajánlott sangakut köszönetként az égieknek egy-egy újabb tétel felfedezéséért. A bizonyításokat ritkán közölték, a problémák ezért kihívások lehettek mások számára.”

A táborban megoldott példát Marshall Unger a legismertebb sangaku feladatnak nevezte [2].

Egy ismert japán tétel

Feladat: Adott egy körbe írt n oldalú konvex sokszög. A sokszöget átlóival háromszögekre bontjuk, és a kapott háromszögek beírt köreit tekintjük. A beírt körök sugarainak összege mindegyik háromszög-felbontásra azonos.



Stratégiák

A táborban két lényegesen különböző iránnyal próbálkoztunk.

Lokális stratégiának neveztük a következőt:

- i.) Bizonyítsuk be a tételt $n = 4$ esetén, vagyis húrnégyszögekre.
- ii.) Mutassuk meg, hogy ebből következik $n > 4$ -re is az állítás.

Felvetettük, hogy talán létezik egy *globális stratégia* is:

Megpróbálhatunk keresni egy olyan mennyiséget, ami a háromszög beírt és köréírt körének sugara között

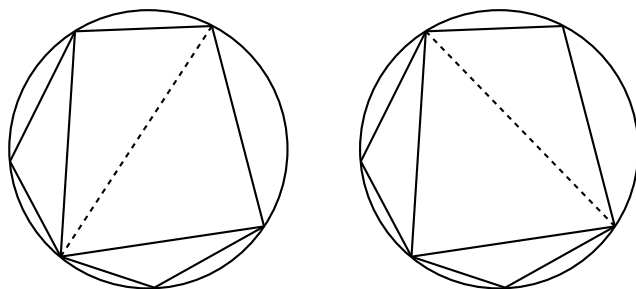
úgy teremt kapcsolatot, hogy a közös köréírt körrel rendelkező háromszögek esetében a beírt körök sugarainak összege *teleszkópos összegként* viselkedik, vagyis a „kellemetlen” részek kiesnek.

A folytatásban három különböző lokális stratégiát használó megoldást mutatunk be. A harmadik el fog vezetni a globális megoldáshoz is.

Megoldások lokális stratégiával

Mielőtt belekezdenénk a húrnégyszögre vonatkozó állítás különböző bizonyításainak ismertetésébe, gondoljunk végig, hogy ez a megközelítés tényleg helyes. Azt kell látni, hogy egy sokszög bármely háromszögeléséből eljuthatunk bármelyik másik háromszögeléséhez, a következő lépés ismételt végrehajtásával:

Kiválasztjuk a sokszög négy csúcsát, és tekintjük az ezek által kijelölt konvex négyszöget. Mivel az eredeti sokszöget átlókkal háromszögekre bontottuk, biztos, hogy a most kiválasztott négyszögnek pontosan az egyik átlója van behúzva. A lépés az, hogy ezt az átlót kicseréljük a négyszög másik átlójára.



Ha nem elégszünk meg, a „szemléletesen látszik” megjegyzéssel, akkor például a csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyíthatunk.

A következőkben tehát az alábbi feladat megoldására koncentrálnunk.

Feladat: Adott egy $ABCD$ húrnégyszög. Jelölje az ABC , BCD , CDA , DAB háromszögek beírt körének sugarát rendre r_D , r_A , r_B és r_C . A sugarakra teljesül a következő összefüggés:

$$r_A + r_C = r_B + r_D.$$

1. változat: területképletek és Ptolemaiosz-tételek

Czövek Márton megoldása alapján

A beírt és köréírt kör sugara között kapcsolatot teremthetünk két ismert területképlet segítségével. Ha egy háromszög oldalainak hossza a , b és c , beírt körének sugara r , köréírt körének sugara pedig R , akkora háromszög területe

$$T = rs = \frac{abc}{4R},$$

ahol s a kerület fele. Innen a beírt kör sugara kifejezhető:

$$(r) \quad r = \frac{abc}{2R(a+b+c)}.$$

Most bevezetünk néhány jelölést és visszatérünk a húrnégyszöghöz. Legyen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$ és $BD = f$. Az (r) összefüggést az összes keletkező háromszögre alkalmazva az alábbi alakra hozható bizonyítandó összefüggésünk:

$$\frac{bcf}{2R(b+c+f)} + \frac{afd}{2R(a+f+d)} = \frac{cde}{2R(c+d+e)} + \frac{abe}{2R(a+b+e)}.$$

Egyszerűsítés és összevonás után:

$$\frac{bcf(a+f+d) + afd(b+c+f)}{(b+c+f)(a+f+d)} = \frac{cde(a+b+e) + abe(c+d+e)}{(c+d+e)(a+b+e)}$$

Most egy vakmerő lépés következik: *felbontjuk a zárójeleket*. Persze rögtön csoportosítjuk is a tagokat, egymás mellé rendezzük azokat, amelyek a Ptolemaiosz-tételre emlékeztetnek. Ptolemaiosz két – húrnegyszögekre vonatkozó – tételét fogjuk használni, amelyek most használt jelöléseinkkel így írhatók:

$$(PT1) \quad ef = ac + bd$$

$$(PT2) \quad \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

$$\frac{f^2(ad + bc) + f(abc + abd + acd + bcd)}{ac + bd + ab + cd + f(a + b + c + d) + f^2} = \frac{e^2(ab + cd) + e(abc + abd + acd + bcd)}{ac + bd + ad + bc + e(a + b + c + d) + e^2}$$

Az első törtet kezdjük átalakítani:

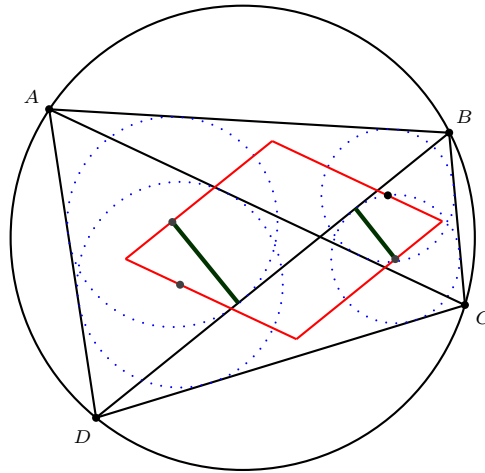
$$\begin{aligned} \frac{f^2(ad + bc) + f(abc + abd + acd + bcd)}{(ac + bd) + (ab + cd) + f(a + b + c + d) + f^2} &= \frac{f^2(ad + bc) + f(abc + abd + acd + bcd)}{ef + \frac{f}{e}(ad + bc) + f(a + b + c + d) + f^2} = \\ &= \frac{f(ad + bc) + (abc + abd + acd + bcd)}{e + \frac{1}{e}(ad + bc) + (a + b + c + d) + f} = \frac{e(ab + cd) + (abc + abd + acd + bcd)}{e + \frac{1}{e}(ad + bc) + (a + b + c + d) + f} = \\ &= \frac{e^2(ab + cd) + e(abc + abd + acd + bcd)}{e^2 + (ad + bc) + e(a + b + c + d) + ef} = \frac{e^2(ab + cd) + e(abc + abd + acd + bcd)}{e^2 + (ad + bc) + e(a + b + c + d) + ac + bd} \end{aligned}$$

Megkaptuk a jobb oldalon álló törtet.

2. változat: elemi geometriai megközelítés

Katona Máté ötlete alapján

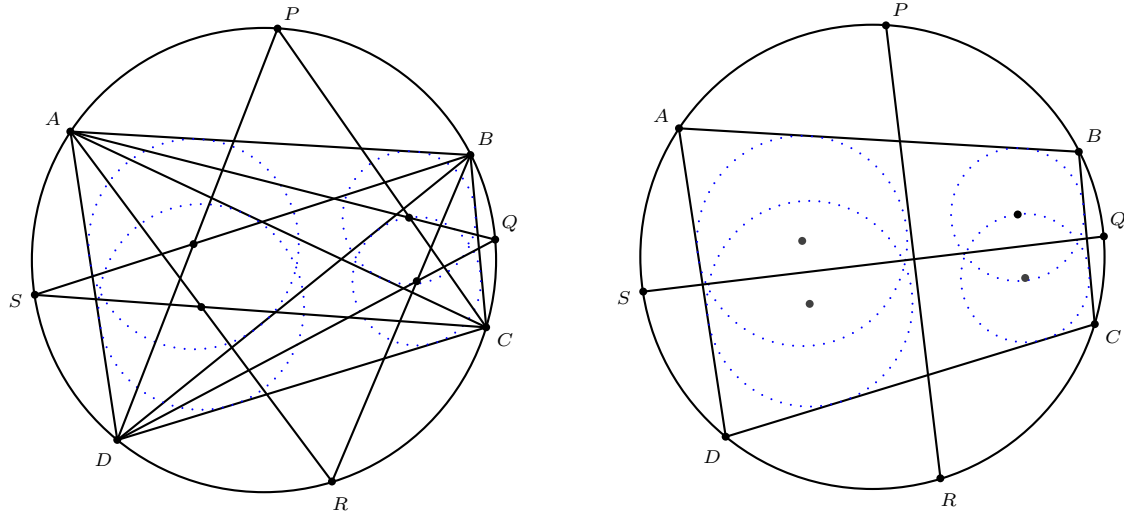
Rajzoljunk a négy beírt kör középpontján át párhuzamosokat az átlókkal, az ábra szerint.



Ha be tudnánk látni, hogy ezek a párhuzamosok egy rombuszt zárnak közre, akkor kész lennénk, hiszen a feladat állításában szereplő két sugárösszeg éppen a rombusz két (egyenlő) magasságát adja ki.

A folytatásban fel fogjuk használni a következő (ismert) állítást: az ABC háromszög A -ból induló belső szögfelezője felezi az ABC háromszög köréírt körének A -t nem tartalmazó ívét.

Ezt a segédtételt alkalmazzuk az ABC , BCD , CDA és DAB háromszögekre. Így kapjuk a P , Q , R , S pontokat.

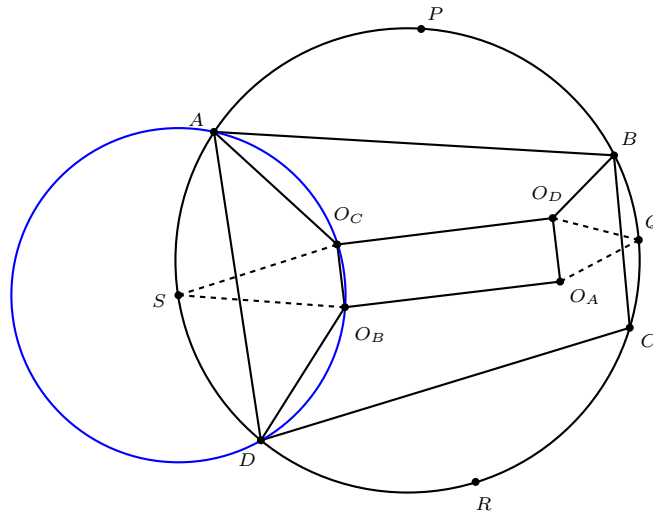


M-lemma. $PR \perp QS$

Bizonyítás: A kerületi szögek tétele alapján $\sphericalangle ARP = \frac{1}{2}\sphericalangle ARB$ és $\sphericalangle ARS = \frac{1}{2}\sphericalangle ARD$, vagyis $\sphericalangle SRP = \frac{1}{2}\sphericalangle DCB$. Hasonlóan $\sphericalangle QSR = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD$. Tehát $\sphericalangle SRP + \sphericalangle QSR = \frac{1}{2}(\sphericalangle DCB + \sphericalangle DAB) = 90^\circ$.

T-lemma. A négy beírt kör középpontja téglalapot alkot, amelynek oldalai párhuzamosak a PR és QS szakaszokkal.

Bizonyítás: (Forrás Bence megoldása alapján.) Az első fontos észrevétel, hogy az $AO_C O_B D$, $AO_C O_D B$, $BO_D O_A C$, $CO_A O_B D$ négyszögek húrnégyszögek. Az $AO_C O_B D$ négyszögben $\sphericalangle O_C A O_B = \sphericalangle O_C A D - \sphericalangle O_B A D = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAD - \sphericalangle CAD)$. Hasonlóan $\sphericalangle O_C D O_B = \sphericalangle A D O_B - \sphericalangle A D O_C = \frac{1}{2}(\sphericalangle ADC - \sphericalangle ADB)$. Innen $\sphericalangle O_C A O_B = \sphericalangle O_C D O_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sphericalangle BAD - \sphericalangle CAD) = \frac{1}{2}(\sphericalangle ADC - \sphericalangle ADB) \Leftrightarrow \sphericalangle BAD + \sphericalangle ADB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle ADC \Leftrightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$.

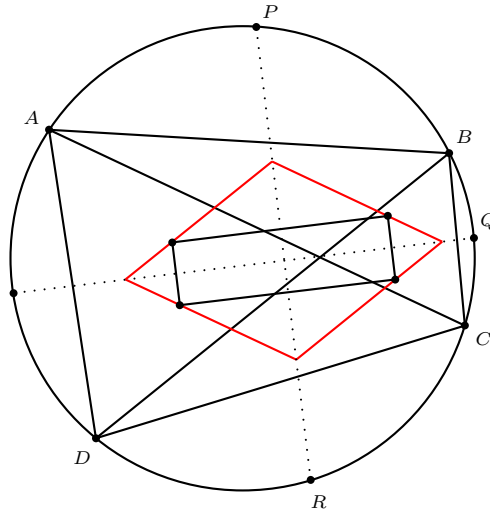


Most már egyszerű a befejezés. $\sphericalangle AO_C O_B = 180^\circ - \sphericalangle ADO_B = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ADC$ és $\sphericalangle AO_C O_D = 180^\circ - \sphericalangle ABO_D = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$, vagyis (a konvex) $\sphericalangle O_D O_C O_B = 360^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ADC) - (180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC) = 90^\circ$. Az $O_A O_B O_C O_D$ többi szögéről hasonlóan igazolható, hogy derékszög.

Felhasználunk egy másik ismert tényt: az ABC háromszög beírt körének középpontja, továbbá B és C egyenlő távol vannak a köréírt kör A -t nem tartalmazó ívének felezőpontjától. Ebből következik, hogy például $AO_C O_B D$ köréírt körének középpontja éppen S , vagyis $SO_C = SO_B$. Hasonlóan $QO_D = QO_A$. Tehát az $O_C O_B$ és $O_D O_A$ szakaszok közös felezőmerőlegese tartalmazza az S és Q pontokat. Ugyanígy bizonyítható, hogy P és R a téglalap másik szimmetriatengelyére esik.

(Megjegyzés. Az **M-lemma** alapján egyszerűsíthető a levezetés, ha rögtön felhasználjuk, hogy $SO_C = SO_B$. Innen $O_C O_B \perp SQ$ és $O_D O_A \perp SQ$. Hasonlóan $O_C O_D \perp PR$ és $O_B O_A \perp PR$. SQ és PR merőlegessége miatt innen következik, hogy $O_A O_B O_C O_D$ téglalap.)

A befejezéshez a **T-lemmát** fogjuk használni.



A bizonyítás azon múlik, hogy a piros paralelogramma szomszédos oldalairól megmutatjuk, hogy egyenlő nagyságú (de ellentétes irányú) szöveget zárnak be a PR illetve SQ szakaszokkal. Ebből ugyanis következik, hogy a paralelogramma átlói éppen PR és SQ , amik ráadásul szimmetriatengelyek, tehát a piros négyszög valóban rombusz.

Elég a DB és AC átlók PR -rel bezárt szögét vizsgálni. $(DB, PR) \sphericalangle = 180^\circ - (BDR \sphericalangle + DRP \sphericalangle)$ és $(AC, PR) \sphericalangle = 180^\circ - (CAP \sphericalangle + APR \sphericalangle)$. Az kell tehát, hogy $BDR \sphericalangle + DRP \sphericalangle = CAP \sphericalangle + APR \sphericalangle$ teljesüljön.

Ez pedig igaz, mert $BDR \sphericalangle + DRP \sphericalangle = (BDC \sphericalangle + CDR \sphericalangle) + (DRA \sphericalangle + ARP \sphericalangle) = (BAC \sphericalangle + CPR \sphericalangle) + (DPA \sphericalangle + PAB \sphericalangle) = (PAB \sphericalangle + BAC \sphericalangle) + (CPR \sphericalangle + DPA \sphericalangle) = PAC \sphericalangle + (DPR \sphericalangle + DPA \sphericalangle) = PAC \sphericalangle + APR \sphericalangle$.

3. változat: trigonometria

Madarász Zénó megoldása alapján

Az első változatban használt területképletek *összeszorzásával* más irányba is indulhatunk.

$$T^2 = rs \cdot \frac{abc}{4R} = \frac{r}{R} \frac{abc(a+b+c)}{8}$$

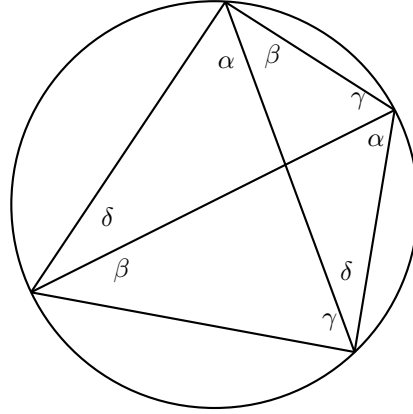
A bal oldalon megjelent a terület négyzete, amit a Héron-képlet levezetéséből esetleg ismerhetünk.

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16} &= \frac{r}{R} \frac{abc(a+b+c)}{8} \\ \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2abc} &= \frac{r}{R} \\ \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) + 2abc}{2abc} &= 1 + \frac{r}{R} \\ \frac{(-a^3 + a^2b + a^2c + ab^2 - 2abc + ac^2 - b^3 + b^2c + bc^2 - c^3) + 2abc}{2abc} &= 1 + \frac{r}{R} \\ \frac{-a^3 + a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 - b^3 + b^2c + bc^2 - c^3}{2abc} &= 1 + \frac{r}{R} \\ \frac{a \cdot (b^2 + c^2 - a^2) + b \cdot (a^2 + c^2 - b^2) + c \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} &= 1 + \frac{r}{R} \\ \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &= 1 + \frac{r}{R} \\ \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 1 + \frac{r}{R} \end{aligned}$$

Most felhasználjuk, hogy az „átló átforgatásakor” nem változik a köréírt kör sugara, ezért azt konstansnak (= 1) vesszük. A kerületi szögek tétele alapján az ábrán azonosan jelölt szögek egyenlők. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\begin{aligned} & (\cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma + \cos \delta - 1) + (\cos(\delta + \gamma) + \cos \alpha + \cos \beta - 1) = \\ & = (\cos(\alpha + \gamma) + \cos \beta + \cos \delta - 1) + (\cos(\delta + \beta) + \cos \alpha + \cos \gamma - 1), \end{aligned}$$

az $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ feltétel mellett.



Egyszerűsítés után :

$$(*) \quad \cos(\alpha + \beta) + \cos(\delta + \gamma) = \cos(\alpha + \gamma) + \cos(\delta + \beta).$$

Most felhasználjuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$, és azt, hogy $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$. Rögtön látható, hogy (*)-ban az egyenlőség mindkét oldalán nulla áll.

Globális stratégia

Lemma: Egy háromszög beírt körének sugara r , köréírt körének sugara R , a köréírt kör középpontjának oldalegyenesektől mért távolsága d_1, d_2, d_3 . Ekkor $R + r = d_1 + d_2 + d_3$.

Bizonyítás: Az előző szakaszban bizonyítottuk, hogy $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R}$.

Átrendezve: $R \cdot (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = R + r$. Végül vegyük észre, hogy $d_1 = R \cdot \cos \alpha$, $d_2 = R \cdot \cos \beta$, $d_3 = R \cdot \cos \gamma$ (előjel helyesen).

A lemma felhasználásával egy meglepően rövid megoldást adhatunk eredeti feladatunkra.

Egy tetszőleges háromszögelésben minden háromszög beírt körének sugarát kifejezzük a lemma alapján. Az i . háromszögre ez így néz ki:

$$r_i = d_{i,1} + d_{i,2} + d_{i,3} - R.$$

Az összegzésnél kétféle $d_{i,j}$ fordul elő. Vannak azok a távolságok, amelyeket a sokszögek oldalaitól mérünk. Ezek pontosan egyszer fordulnak elő, és nem függenek a választott háromszögeléstől. Vannak továbbá azok a távolságok, amelyek valamelyik átlótól mérték. Ezek viszont pontosan kétszer szerepelnek (abban a két háromszögben, amelynek az adott átló közös oldala), egyszer pozitív, egyszer pedig negatív előjellel. Tehát a háromszögeléstől függő $d_{i,j}$ -k kiesnek az összegzésnél.

Kész vagyunk:

$$\sum r_i = \text{a köréírt kör középpontjának a sokszög oldalaitól mért előjeles távolságösszege} - (n - 2)R.$$

Appendix: Sok különböző háromszögelés létezik?

Érdemes megjegyezni, hogy a feladat nagyon sok különböző felbontásra mondja ki a sugárösszeg állandóságát. Viszonylag ismert, hogy egy n -oldalú konvex sokszöget átlóival C_{n-2} -féle módon bonthatunk háromszögekre, ahol C_n az n . *Catalan-szám*: $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Aki a Catalan-számokkal szeretne ismerkedni, annak az [5] és [6] cikkeket ajánljuk.

Források

- [1] Szabó Péter Gábor, *Sangaku, matematikai fatáblák japán templomokban*
KöMaL, 2002. június
<http://www.komal.hu/cikkek/sangaku/sangaku.h.shtml>
- [2] J. Marshall Unger, *A Collection of Sangaku Problems*
Ohio State University, 2013
<http://people.cohums.ohio-state.edu/unger26/Sangaku.pdf>
- [3] R. Honsberger, *An Old Japanese Theorem*
Mathematical Gems, III, 1985, pp. 22-26.
<http://www.cut-the-knot.org/proofs/jap.shtml>
- [4] H. Fukagawa, D. Pedoe, *Japanese Temple Geometry Problems*
The Charles Babbage Research Center, Winnipeg, 1989
- [5] Csonka Dorottya, *Catalan-számok*
BDG Matektábor, 2012
- [6] R. Stanley, *Catalan addendum*
<http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>