Egy függvény átlagértéke

Egy számtani koncepció kiterjesztése és szokatlan területeken való alkalmazása

Jurij Ionyin, Alexander Plotkin

Az Olvasó minden bizonnyal tisztában van azzal, hogy mit jelent véges sok szám számtani közepe. Ebben a cikkben kiterjesztjük ezt a fogalmat szakaszon, körön illetve gömbön értelmezett függvényekre, és bemutatjuk ennek némiképp szokatlan alkalmazásait a geometriában. Egész pontosan: ismertetni fogjuk, hogyan mérjünk hosszúságot – azaz kerületet – úgy, hogy valójában szélességeket mérünk.

A cikk olvasásához szükséges némi vektorgeometriai ismeret. Az Olvasónak tisztában kell lenni azzal, hogyan adunk össze vektorokat és hogyan kapjuk meg hosszukat (abszolút értéküket). Fogunk továbbá foglalkozni vektor egyenesre való vetítésével, de ezt mi magunk fogjuk definiálni. Használni fogjuk az integrálszámítás fogalmait és jelöléseit, de azon olvasók is, akik semmilyen analízisbeli ismerettel nem rendelkeznek, meg fogják tudni érteni, miről van szó.

Véges halmazon

Egy bizonyos üzleti matematikai iskola szülői alap bizottságában[1] az elnök a következő szavakat intézte a hallgatósághoz: „Minden szülő szent kötelessége az átlagon felüli közreműködés!” Láthatóan az elnöknek nem volt erős oldala a matematika. Gondoljuk csak végig!

n szám, x_1, x_2, $\ldots$, x_n átlaga vagy számtani közepe a szokásos definíció szerint $A = A\,(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$, ahol

$$A\,(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{1}$$

Ha az elnök felhívásához tartják magukat, a szülők az $x_1 > A$, $x_2 > A$, $\ldots$, $x_n > A$ feltételek mindegyikét teljesítik. Ezen egyenlőtlenségeket összeadva és n-nel osztva (1)-gyel ellentmondó állítást kapunk.

Megjegyezzük a számtani közép következő tulajdonságait:

1. $A\,(x_1 + y_1;\, x_2 + y_2;\, \ldots;\, x_n + y_n) = A\,(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) + A\,(y_1;\, y_2;\, \ldots;\, y_n)$,
2. $A\,(\alpha x_1;\, \alpha x_2;\, \ldots;\, \alpha x_n) = \alpha \cdot A\,(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$,
3. $\min\,(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) \leq A\,(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) \leq \max\,(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$.

Javasoljuk az Olvasónak, hogy saját szavaival is fogalmazza meg ezeket a tulajdonságokat.

1. gyakorlat. Bizonyítsuk be a fenti 1–3. tulajdonságokat.

1. Az angol fordításban „Parents Fund Committee” – A ford.

2. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 1$ egész számra

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}$$

teljesül, ahol $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. A bizonyítás végezhető teljes indukcióval is, de használható a 3. tulajdonság is.

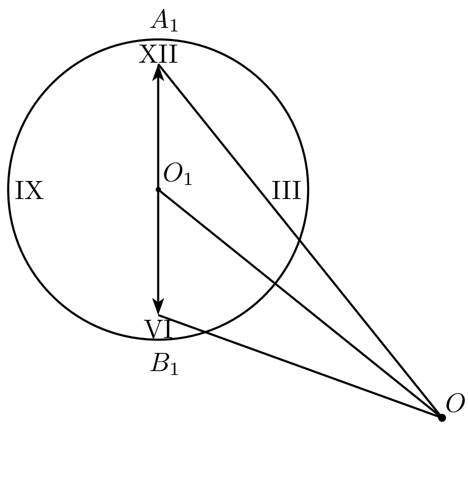
A 3. tulajdonságot gyakran használjuk annak bizonyítására, hogy az x_1, x_2, $\ldots$, x_n számok közül legalább egy nagyobb, mint egy adott d: elég megmutatni, hogy $A\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right) > d$. Nézzük például a következő feladatot.[2]

1. feladat. Ötven jól járó karóra van egy kör alakú asztalon. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pillanat, amikor a percmutatók végeinek és az asztal közepének távolságösszege nagyobb, mint az óralapok közepeinek és az asztal közepének távolságösszege.

Megoldás. Jelölje $f(t)$ az O asztalközéppont és a percmutatók végeinek távolságösszegét a t időpillanatban (órában mérve). Legyen d az óralapok közepeinek és az asztal közepének távolságösszege. Azt kell bizonyítsuk, hogy valamely t időpillanatban $f(t) > d$. Azt fogjuk megmutatni, hogy valamely t_0 időpillanatra $A\left(f\left(t_0\right); f\left(t_0 + \frac{1}{2}\right)\right) > d$, ami azt jelenti, hogy t_0 vagy $t_0 + \frac{1}{2}$ az időpillanat, aminek létezését bizonyítani akarjuk.

Jelölje O_i, A_i, B_i rendre az i-edik óra közepét, a t időpillanatban a percmutatója végét, illetve ugyanezen mutató helyzetét fél órával később (a $t + \frac{1}{2}$ időpillanatban).

Mivel az összes óra jól jár, van olyan t_0 időpillanat, amikor O, A_1 és B_1 nem esnek egy egyenesbe. Tekintsük az OA_1B_1 háromszöget és OO_1 súlyvonalát (1. ábra).



1. ábra

2. S. Fomin javasolta a 10. Összuniós Matematikai Olimpiára (Dusanbe, Tádzsikisztán, 1976). Az ötlet szintén megtalálható a Quantum 1995. november–decemberi számában az M160-as feladat megoldásában.

3. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszögben a súlyvonal rövidebb, mint a vele azonos csúcsból induló oldalak összegének fele.

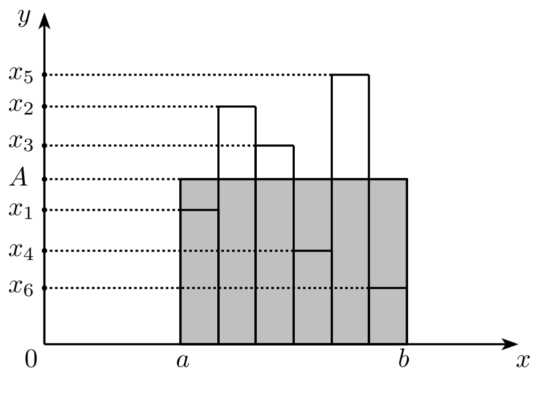
A 3. gyakorlat szerint $OO_1 < \frac{OA_1+OB_1}{2}$ a t_0 időpillanatban. Minden más karórára $OO_i \leq \frac{OA_i+OB_i}{2}$ (fontos megérteni, itt miért írtunk szigorúan kisebb helyett „$\leq$”-t[3]). Ezen 50 egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy

$$A\left(f\left(t_0\right);\, f\left(t_0+\frac{1}{2}\right)\right) > d.$$

Szakaszon

Az 1. feladatban elegendő volt *két* függvényérték számtani közepének becslése. Lehetséges-e definiálni az *összes* érték átlagát? Hogy közelebb kerüljünk egy ilyen definícióhoz, adjunk geometriai jelentést az $x_1, x_2, \ldots x_n$ számok számtani közepének.

Osszuk fel az $[a;b]$ szakaszt n egyenlő, $\frac{b-a}{n}$ hosszúságú részre, majd képezzünk „oszlopdiagramot” ezen részeket alapként, az x_1, x_2, …, x_n számokat magasságként tekintve (2. ábra).[4] Ezen diagram – azaz a kis téglalapok – összterülete $A\left(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n\right)\cdot(b-a)$. Tehát azon téglalap alapja és magassága, ami területben megegyezik a diagram területével, $(b-a)$ és $A\left(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n\right)$.



2. ábra

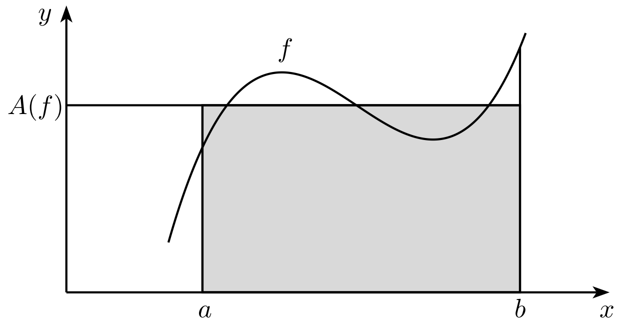
Tekintsünk egy az $[a;b]$ intervallumon folytonos, nemnegatív függvényt. A függvény $[a;b]$ intervallumon vett *átlagértéke*[5] alatt azon $[a;b]$ alapú téglalap magasságát fogjuk érteni, aminek területe egyenlő az $x=a$, $x=b$, az x-tengely és f függvény görbéje által határolt „görbe oldalú trapéz” területével (3. ábra). Ezt a területet fejezi ki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

[*Megjegyzés az integrálszámításban járatlan olvasók számára:* Azon olvasókat, akik ezen a ponton feladni készülnek, kérjük, maradjanak velünk. Ebben a cikkben az $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (ejtsd: integrál ától béig ef ix dé ix) formula értelmezhető

3. Lásd a 3. gyakorlat megoldását. – A ford.

4. Ne hagyjuk megzavarni magunkat azzal, hogy az y-tengelyen szerepelnek az x_i-k! – A ford.

5. A magyar terminológiában a *középérték* elnevezés is használatos. – A ford.



3. ábra

egyszerűen úgy, mint egy jelölés a fent említett területre, ahol az integráljel ($\int$) területet jelent, a, b és f jelölik a határokat, dx pedig az f függvény x változóját, hogy megkülönböztesse más változóktól, amiktől f értéke függhet. A tényleges integrálás akkor kezdődik, amikor ki kell számolnunk ezt a területet, de a továbbiakban mindössze egy alkalommal kell numerikus eredményt megadnunk, akkor egyszer pedig az Olvasó nyugodtan hihet majd nekünk. – *A szerk.*]

Tehát az f függvény $[a;b]$-n vett átlagértékét a következőképpen *definiáljuk:*

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(Ez a definíció jó *bármely* $[a;b]$-n értelmezett függvényre, amire a (2) egyenlet jobb oldala értelmes; ebben a cikkben csak folytonos nemnegatív függvényekkel fogunk foglalkozni, ahol pedig ez mindig fennáll.)

Az így definiált átlagérték az 1–3.-hoz hasonló tulajdonságokkal bír:

1'. $A(f+g) = A(f) + A(g)$,

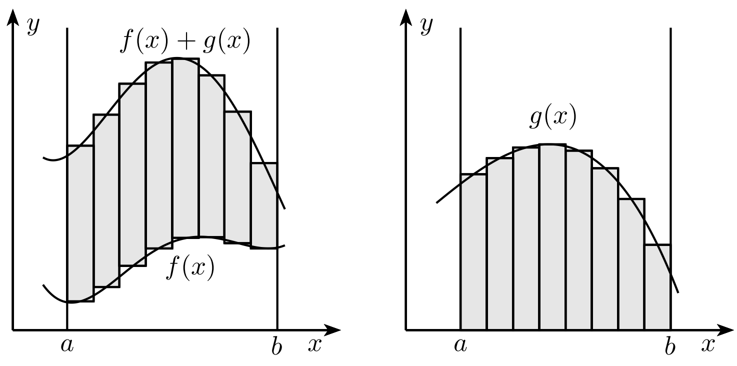
2'. $A(\alpha f) = \alpha \cdot A(f)$,

3'. $\min\limits_{a\le x\le b} f(x) \le A(f) \le \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$.

Magyarázzuk meg ezen tulajdonságok közül az elsőt a területek segítségével! (A precíz bizonyítás az integrál precíz definícióján alapul.) Tekintsük az f és $f+g$ görbéi közötti területet (mindkét függvény pozitív – lásd a 4a. ábrát). Tetszőleges pontosságig megközelíthetjük az ábrán látható téglalapokkal. Toljuk el a téglalapokat úgy, hogy alapjuk az x-tengelyre illeszkedjen (4b. ábra). Ekkor egy „oszlopdiagramot” alkotnak, ami a $g(x)$ alatti területet közelíti (hiszen magasságuk éppen az $(f(x)+g(x)) - f(x) = g(x)$ érték a megfelelő pontokban). Mivel a közelítés olyan pontossággal végezhető, amilyennel csak szeretnénk, az f és $f+g$ közötti terület nagysága megegyezik a g alatti terület nagyságával, azaz

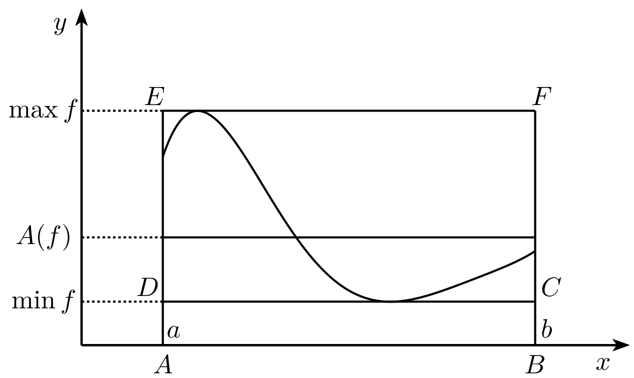
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

ami ekvivalens az 1'. tulajdonsággal.



(a) (b)

4. ábra



5. ábra

A 2'. tulajdonság hasonlóan bizonyítható. A 3'. tulajdonság pedig nyilvánvaló az 5. ábrából (az f alatti terület az $ABCD$ és az $ABFE$ téglalapok területei, azaz $(b-a)\cdot\min f$ és $(b-a)\cdot\max f$ közé esik).

4. gyakorlat. Az 1'–3'. tulajdonságok felhasználásával bizonyítsuk be a következő tulajdonságot:

4'. Ha $f(x)\le g(x)$ minden $x\in[a;b]$-re, akkor $A(f)\le A(g)$.

A következő feladatban az átlagértéket egy olyan helyzetben alkalmazzuk, aminek látszólag semmi köze nincs hozzá.

2. feladat. Az egy síkban fekvő (komplanáris) **a**, **b**, **c**, **d** vektorok összege nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|+|\mathbf{c}|+|\mathbf{d}|\ge|\mathbf{a}+\mathbf{d}|+|\mathbf{b}+\mathbf{d}|+|\mathbf{c}+\mathbf{d}|\,, \tag{3}$$

ahol $|\mathbf{a}|$ jelöli az **a** vektor hosszát (abszolút értékét).

A megoldás a feladat következő egydimenziós változatán alapul, melynek bizonyítását gyakorlatként az Olvasóra hagyjuk.

5. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b, c, d valós számokra, melyek összege 0, teljesül, hogy

$$|a|+|b|+|c|+|d|\ge|a+d|+|b+d|+|c+d|. \tag{4}$$

Megoldás a 2. feladatra. Tekintsük az **a**, **b**, **c** és **d** vektorok tetszőleges tengelyre (irányított egyenesre) vett vetületeit. Most az $\overrightarrow{AB}$ vektor t (irányított) tengelyre vett vetületét a $\pm A'B'$ számként definiáljuk, ahol A' és B' rendre A és B t-re vett vetületei, az előjel pedig attól függ, hogy az $\overrightarrow{A'B'}$ vektor t-vel megegyező $(+)$ vagy azzal ellentétes $(-)$ irányítású (6. ábra). Tehát a vetület pontosan $AB\cos\varphi$, ahol φ a tengely és $\overrightarrow{AB}$ által bezárt szög.

Az 5. gyakorlat állítása szerint szerint ha (3)-ban a vektorokat a tetszőleges tengelyre eső vetületeikre cseréljük, igaz egyenlőtlenséget kapunk, mert a vetületek összege egyenlő az összeg vetületével, ami nulla. Ez azt sugallja, hogy (3) úgy bizonyítható, hogy az adott vektorok összes lehetséges vetületét vesszük.

Vegyünk fel egy t_0 tengelyt, és tetszőleges **p** vektorra definiáljuk a $p(\alpha)$ függvényt mint **p** vetületét egy olyan t tengelyre, ami α szöget zár be t_0-lal (7. ábra).

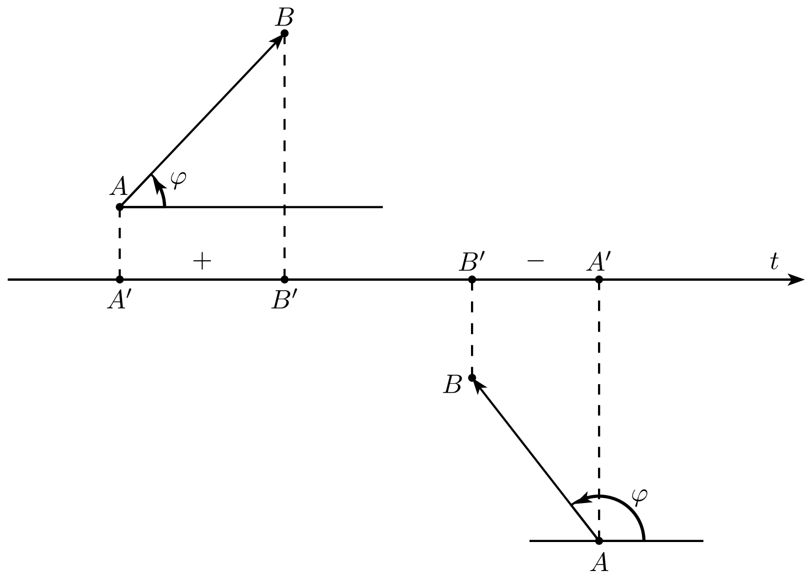
Ha t_0 és **p** között a szög φ, akkor $p(\alpha)=|\mathbf{p}|\cos(\varphi-\alpha)$.[6] Most tekintsük az $\alpha\mapsto|p(\alpha)|$ függvény $A(|p|)$ átlagértékét a $[0;2\pi]$ szakaszon. A 2'. tulajdonság szerint $A(|p|)=|\mathbf{p}|A(|\cos(\varphi-\alpha)|)$, és

$$A(|\cos(\varphi-\alpha)|)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos(\varphi-\alpha)|\,\mathrm{d}\alpha.$$

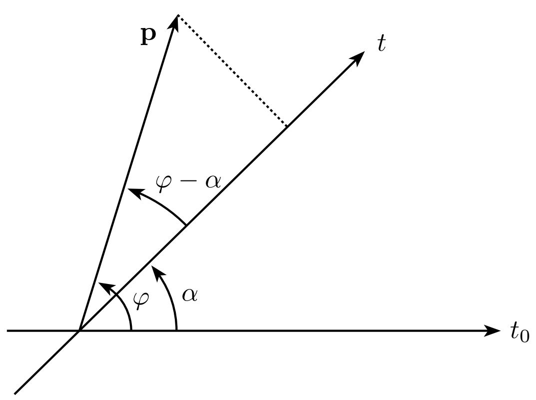
A 8. ábrán látható, hogy a $|\cos(\varphi-\alpha)|$ függvény görbéje alatti terület $[0;2\pi]$-n megegyezik a $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right|=|\sin\alpha|$ függvény görbéje alatti területtel $[0;2\pi]$-n (azaz kétszerese a normál szinuszhullám egy hullámhegye területének). Tehát

$$\begin{aligned}A(|\cos(\varphi-\alpha)|)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right|\,\mathrm{d}\alpha\\&=A(|\sin\alpha|).\end{aligned}$$

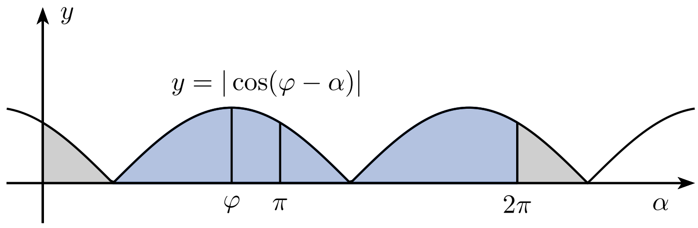
6. Irányított szögekkel dolgozunk. – A ford.



6. ábra



7. ábra



8. ábra

Integrálszámítással megkaphatjuk, hogy a terület nagysága pontosan 4, de számunkra most csupán annyi a lényeges, hogy φ-től független pozitív szám. Tehát a $p(\alpha)$ függvény átlagértéke egyenesen arányos a $\mathbf{p}$ vektor hosszával; ha k jelöli az arányossági tényezőt, akkor

$$A(|p|) = k|\mathbf{p}|. \tag{5}$$

(Az analízis eredményeit felhasználva kiszámítható, hogy $k = A(|\sin\alpha|) = \frac{2}{\pi}$.) A levezetésben a függvény azon alapvető tulajdonságát használtuk fel, hogy a $[0; 2\pi]$ szakasz, ami felett az átlagértékét vettük, egy periódusa.[7]

Most már készen állunk a megoldás befejezésére.

Amint azt már említettük, bármely $\alpha \in [0; 2\pi]$-re $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$ és $d(\alpha)$ összege nulla. Az 5. gyakorlat szerint ebből következik, hogy

$$|a(\alpha)| + |b(\alpha)| + |c(\alpha)| + |d(\alpha)| \geq |a(\alpha) + d(\alpha)| + |b(\alpha) + d(\alpha)| + |c(\alpha) + d(\alpha)|.$$

Az 1'. és 4'. tulajdonságok és (5) felhasználásával vehetjük mindkét oldal átlagértékét:

$$k|\mathbf{a}| + k|\mathbf{b}| + k|\mathbf{c}| + k|\mathbf{d}| \geq k|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + k|\mathbf{b} + \mathbf{d}| + k|\mathbf{c} + \mathbf{d}|.$$

Csupán annyi van hátra, hogy osszunk a pozitív k tényezővel.

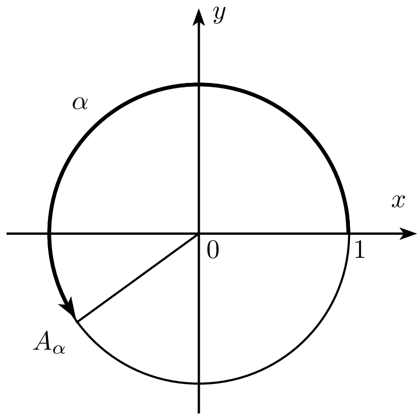
Körön és gömbön

3. feladat. Bizonyítsuk be a (3) egyenlőtlenséget bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ térbeli vektorokra, melyeknek összege nullvektor.

Jó lenne, ha a síkban alkalmazott meggondolásokat tudnánk valami módon kiterjeszteni a térbe. Ehhez definiálnunk kell a vektorok bármely irányú térbeli tengelyre eső vetületeinek abszolút értékének átlagértékét. A továbbiakban látni fogjuk, hogy ez a függvény gömbön vett átlagolásához fog vezetni. Kezdjük egy egyszerűbb, de hasonló függvénnyel az egységkörön (egységsugarú körön).

Legyen az f függvény értelmezési tartománya az egységkör pontjai, értékkészlete a valós számok egy részhalmaza. Definiáljuk valós α-ra az $\overline{f}(\alpha) = f(A_\alpha)$ függvényt, ahol A_α az egységkör azon pontja, amit az $E(1; 0)$ pont origó körüli α radiános elforgatással kapunk (9. ábra). Ilyen módon tetszőleges, az egységkörön értelmezett f függvényt kiterjeszthetünk az egész valós tengelyen értelmezett $\overline{f}$

7. Valójából a függvény π szerint is periodikus. – A ford.



9. ábra

függvénnyé. Nyilvánvalóan $\overline{f}$ periodikus 2π szerint. Definiáljuk *az f függvény egységkörön vett átlagértékét* az $\overline{f}$ függvény $[0; 2\pi]$ szakaszon vett átlagértékeként. Emlékezzünk, hogy a 2. feladat megoldásában a kritikus pont az volt, hogy $A(|p|)$ nem függ a $\mathbf{p}$ vektor irányától. Ez a függetlenség speciális esete az egységkörön értelmezett függvények következő tulajdonságának.

5'. Legyenek f és g az egységkörön értelmezett, egymástól egy φ forgatás erejéig eltérő függvények, tehát legyen az egységkör tetszőleges P pontjára $g(P) = f\left(r^{\varphi}(P)\right)$, ahol r^{φ} ez a forgatás. Ekkor $A(f) = A(g)$.

6. gyakorlat. Bizonyítsuk be ezt a tulajdonságot.

Továbbmenve a 3. feladathoz, tekintsük az origó (O) középpontú egységgömböt. Lehetséges úgy definiálni az ezen a gömbön értelmezett függvények átlagértékét, hogy az 1'–5'. tulajdonságok teljesüljenek. (Természetesen r^{φ} most az egységgömb adott, O-n áthaladó tengely körüli φ szöggel való forgatásaként értendő.) Ehelyütt nem adhatunk pontos magyarázatot a definiálás mikéntjére, mert az a gömbön való integrálást használja.

Feltételezzük mindazonáltal, hogy a függvény $A(f)$ átlagértéke definiálva van és igazak rá az 1'–5'. tulajdonságok – azaz az adott tulajdonságokkal bíró $A(f)$ átlagérték létezését *axiómának* tekintjük. Valójában még az is igaz, hogy az 1'–5'. tulajdonságok egyértelműen meghatározzák az átlagérték definícióját.

Vegyük az egységgömb egy R pontját. Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{p}$ vektort és definiáljuk a gömbön a $p(R)$ segédfüggvényt mint $\mathbf{p}$ vetületét az $\overrightarrow{OR}$ vektorral azonos irányítású OR tengelyre. Ekkor a gömbön értelmezett $R \mapsto |p(R)|$ függvény $A(|p|)$ átlagértéke kielégíti az (5) egyenletet valamely nem nulla k-ra. Ennek bizonyításához elegendő megmutatni, hogy $A(|p|) = A(|q|)$, bármely megegyező abszolút értékű $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorokra.

7. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy ez valóban elegendő. (Használjuk fel a 2'. tulajdonságot.)

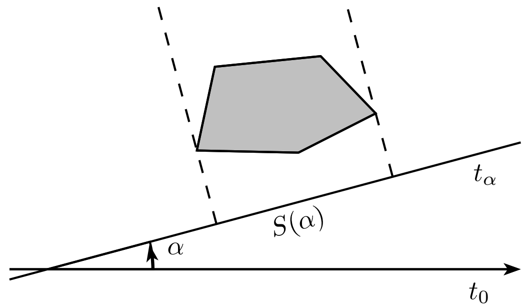
Tegyük fel, hogy $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$. Ekkor létezik valamely O-n áthaladó tengely körül olyan r forgatás, ami az OQ sugarat, ahol $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$, az OP sugárba viszi, ahol $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$. Nyilvánvaló, hogy $q(R) = p(r(R))$ a gömb minden R pontjára. Ekkor viszont az 5'. tulajdonság szerint $A(|p|) = A(|q|)$.

Ekkor a 3. feladat megoldása a 2. feladat fenti megoldási lépéseinek ismétlésével fejezhető be.

Hossz a szélességgel kifejezve

Ugyanezen ötlet felhasználásával megadhatjuk egy síkbeli konvex sokszög kerületét is.

Legyenek a sokszög oldalai ebben a sorrendben $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Rögzítsünk egy t_0 tengelyt. Legyen $S(\alpha)$ a sokszög t_α tengely irányába eső „szélessége", ahol t_α az a tengely, ami t_0-lal α szöget zár be (10. ábra). Ha ezt a szélességet minden irányban ismerjük – azaz ki tudjuk számolni az $\alpha \mapsto S(\alpha)$ függvény értékeit –, akkor meg tudjuk határozni a sokszög K kerületét. Lássuk, hogyan is lehetséges ez.



10. ábra

Jelölje $a_i(\alpha)$ az a_i oldal t_α tengelyre eső vetületének hosszát.[8]

8. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy $S(\alpha) = \frac{1}{2}\left(a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha)\right)$.

A 2. feladat megoldásában megmutattuk, hogy az $\alpha \mapsto a_i(\alpha)$ függvény átlagértéke az a_i oldal $|a_i|$ hosszával arányos. Azt is említettük, hogy az arányossági tényező $k = \frac{2}{\pi}$. A 8. gyakorlatból és az 1'. és 2'. tulajdonságokból következik, hogy az $A(S)$ átlagérték fele az $\alpha \mapsto a_i(\alpha)$ függvények átlagértékeinek összegének. Tehát

$$\begin{aligned} A(S) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}|a_1| + \frac{2}{\pi}|a_2| + \ldots + \frac{2}{\pi}|a_n|\right) \\ &= \frac{1}{\pi}K. \end{aligned}$$

Visszaemlékezve az átlagérték (2)-ben megadott definíciójára felírható, hogy

$$\begin{aligned} K = \pi \cdot A(S) &= \pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} S(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

8. Itt nem előjeles távolságról van szó. – A ford.

Így hát a sokszög oldalai alkotta töröttvonal hossza felírható az S szélességfüggvény értékei alapján.

9. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalai és átlói d-nél rövidebbek, akkor kerülete kisebb, mint πd.

Az imént levezetett képlet érvényes minden síkbeli zárt görbére. A fent leírt módszer a minden irányú szélesség alapján a hossz kiszámítására a híres H. Steinhaus lengyel matematikus ötlete volt 1930-ban.

Az összeg hossza

4. feladat. A síkbeli $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok hosszainak összege 1. Bizonyítsuk be, hogy közülük kiválasztható néhány úgy, hogy összegük hossza legalább $\frac{1}{\pi}$.

A problémát a következőkben adott tervet követve oldjuk meg!

Definiáljuk a $\mathbf{p}$ vektor t tengelyre vett *pszeudoprojekcióját*[9] a vektor tengelyre vett korábbiakban definiált vetületeként, ha bezárt szögük hegyesszög, különben legyen értéke nulla. Rögzítsünk egy t_0 tengelyt. Ha $\mathbf{p}$ és t_0 között a szög φ, akkor $\mathbf{p}$ pszeudoprojekciója azon t_α tengelyre, ami t_0-lal α szöget zár be, $|\mathbf{p}|g(\varphi - \alpha)$-ként írható, ahol

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } \cos x > 0; \\ 0, & \text{ha } \cos x \leq 0. \end{cases}$$

10. gyakorlat. (Azon olvasók számára, akik rendelkeznek némi analízisbeli ismerettel.) Bizonyítsuk be, hogy bármely φ-re

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi - \alpha)\,\mathrm{d}\alpha = 2.$$

(Azon olvasók, akik nem tudják a fenti egyenlőséget belátni, feltételezhetik igazságát a következő gyakorlatok megoldása során.)

Jelölje $f(\alpha)$ az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok t_α tengelyre vett pszeudoprojekcióinak összegét.

11. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy f-nek a $[0, 2\pi]$ intervallumon vett átlagértéke $\frac{1}{\pi}$.

12. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy van olyan t_α tengely, amire az adott vektorok pszeudoprojekcióinak összege legalább $\frac{1}{\pi}$.

13. gyakorlat. Bizonyítsuk be a 4. feladat állítását.

A 4. feladatban az $\frac{1}{\pi}$ konstans helyett nem írhatunk nagyobb számot. Ez akkor válik világossá, ha megfelelően nagy n-hez tartozó szabályos n-szög oldalvektorait tekintjük.[10]

Térbeli vektorokra az állítás $\frac{1}{\pi}$ helyett $\frac{1}{4}$-del is igaz.

---

9. Habár a magyar terminológiában a projekció helyett általában a vetítés használatos, ebben az esetben mégis az említett kifejezést javasoljuk, tekintve, hogy a pszeudovetítés meglehetősen erőltetetten hangzik. – A ford.

10. Lásd a gyakorlatok megoldása után! – A ford.

Megoldások[11]

1. gyakorlat. Az *1. tulajdonság* bizonyításához írjuk fel a számtani közép definícióját!

$$\begin{aligned}A\left(x_1+y_1;\, x_2+y_2;\, \ldots;\, x_n+y_n\right) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+y_i\right)}{n}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i+\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\\ &= A\left(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n\right)+A\left(y_1;\, y_2;\, \ldots;\, y_n\right)\end{aligned}$$

A *2. tulajdonság* bizonyításához írjuk fel a számtani közép definícióját!

$$\begin{aligned}A\left(\alpha x_1;\, \alpha x_2;\, \ldots;\, \alpha x_n\right) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i}{n}\\ &= \frac{\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\\ &= \alpha \cdot A\left(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n\right)\end{aligned}$$

A *3. tulajdonság* teljes indukcióval bizonyítható. Most csak a minimumra vonatkozó részét bizonyítjuk, a másik ugyanilyen módszerrel igazolható. Az egyenlőtlenség $n=1$-re triviálisan igaz; $n=2$-re ha $x_1 \geq x_2$, akkor $x_2 \leq \frac{x_1+x_2}{2}$, hiszen utóbbi egyenlőtlenséget 2-vel szorozva és mindkét oldalról x_2-t kivonva épp a feltételt kapjuk. Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re; meg fogjuk mutatni, hogy igaz $n+1$-re is. Feltehetjük, hogy $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1}$. Legyen $s=A\left(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n\right)$. Ekkor az átlag:

$$A\left(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n;\, x_{n+1}\right)=\frac{n \cdot s+x_{n+1}}{n+1},$$

azaz n darab s és x_{n+1} átlaga. Az indukciós feltevés szerint $s \geq x_n$, ezért $s \geq x_{n+1}$. Ebből az $n=2$ esethez hasonlóan következik, hogy

$$\frac{n \cdot s+x_{n+1}}{n+1} \geq x_{n+1}.$$

2. gyakorlat. *I. megoldás:* Ismert, hogy $\binom{2n}{n}$ a Pascal-háromszög $2n$-edik sorának legnagyobb eleme. A $2n$-edik sorban a tagok összege éppen 2^{2n}, így átlaguk

$$\frac{2^{2n}}{2n}=\frac{2^{2n-1}}{n}.$$

Mivel $n>1$-re a sor nem minden eleme egyezik meg, a 3. tulajdonságot használva következik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

II. megoldás: A binomiális együttható kiírása után az állítás a következő:

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}>\frac{2^{2n-1}}{n}.$$

11. A megoldások a csoport tagjaitól vagy a Quantum-cikkhez csatolt megoldásokból származnak.

Szorzunk n-nel:

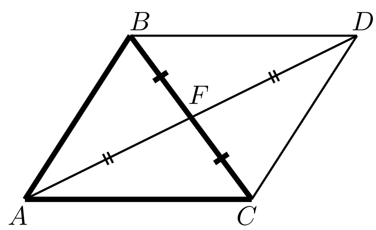
$$\frac{(2n)!}{n! \cdot (n-1)!} > 2^{2n-1}.$$

Bontsuk ki a bal oldalon a faktoriálisokat!

$$\frac{2n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{2n-2}{n-1} \cdot \frac{2n-3}{n-2} \cdot \frac{2n-4}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot 1$$

Az első $2n-1$ tényező mindegyike legalább 2, és van olyan, amelyik nagyobb, mint 2, tehát szorzatuk nagyobb, mint 2^{2n-1}.

3. gyakorlat. *I. megoldás.* Legyen AF a háromszög súlyvonala. Tükrözzük az ABC háromszöget az F pontra, így kapjuk a D pontot (lásd a 11. ábrát). Az ABD háromszögre felírva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $2AD = AM < AB+BD = AB+AC$, amit bizonyítani kellett. Ha a háromszög elfajuló, azaz $B \equiv F \equiv C$, akkor $AB = AF = AC$, azaz egyenlőség áll fenn.



11. ábra

II. megoldás. Legyen a két oldal hossza a és b, közbezárt szögük γ, a közös csúcs C. A háromszöget tükrözzük a C-vel szemközti oldal felezőpontjára, az így kapott paralelogramma C-ből induló átlója épp kétszer olyan hosszú, mint a súlyvonal. A paralelogramma átlója a koszinusztétel szerint

$$2s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \gamma)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}.$$

Adott a-ra és b-re ez a kifejezés akkor a legnagyobb, ha $\cos\gamma$ maximális, azaz $\gamma = 0$ (most megengedjük az elfajuló háromszöget is). Ekkor a súlyvonal hossza

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{a+b}{2},$$

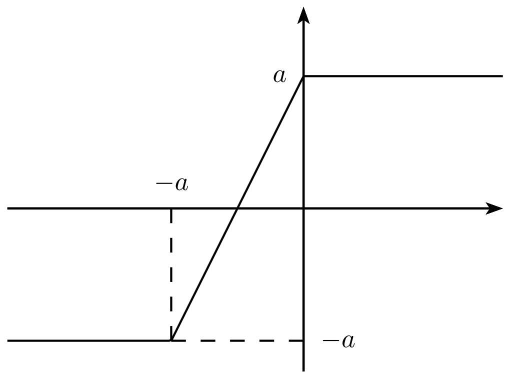
amit bizonyítani kellett.

4. gyakorlat. Az 1'. tulajdonság szerint $A(g) = A(f) + A(g-f)$. Mivel minden $x \in [a;b]$-re $f(x) \le g(x)$, így $0 \le g(x) - f(x)$. Ezért $\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$, hiszen egy nemnegatív folytonos függvény görbéje alatti területről van szó. Ebből következően $A(g-f) \ge 0$, és így $A(f) \le A(g)$.

5. gyakorlat. Annak ellenére, hogy első ránézésre d kitüntetett szerepben van, megmutatható, hogy ez nem igaz – ha elvégezzük a $|b+d| = |a+c|$ és $|c+d| = |a+b|$ helyettesítést, a jobb oldalon a van olyan helyzetben, mint eredetileg d.

Ha a négy szám közül bármelyik nulla, a bizonyítás könnyű – sőt, az egyenlőtlenség helyett az egyenlőség is igaz (a négy szám azonos szerepe miatt elegendő a $d = 0$ esetet vizsgálni, amikor az $|a| + |b| + |c| + |0| = |a + 0| + |b + 0| + |c + 0|$ egyenlőséget kapjuk). Tegyük fel, hogy egyik sem nulla. Ekkor az a, b, c számok közül legalább kettő – legyenek ezek a és b – azonos előjelű. Feltehetjük, hogy ez az előjel pozitív – ha nem így van, egyszerűen mindegyik szám ellentettjét vesszük. Behelyettesítve $d = -(a + b + c)$-t kapjuk, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség $|c| + |a + b + c| \geq |b + c| + |a + c|$, azaz

$$|a + (b + c)| - |b + c| \geq |a + c| - |c|.$$



12. ábra

Tekintsük az $f(x) = |a + x| - |x|$ függvényt. Grafikonjának felrajzolása után (12. ábra) látjuk, hogy f nemcsökkenő. Mivel $b + c \geq c$, $f(b + c) \geq f(c)$, ez pedig pont a bizonyítandó egyenlőtlenség fenti alakja.

6. gyakorlat. A tulajdonság következik a forgatásból – a helyzet ugyanaz, mint a $|\cos(\varphi - \alpha)|$ függvénynél.

7. gyakorlat. Legyen a $\mathbf{p}$ irányú egységvektor $\mathbf{v}$. Ekkor $\mathbf{p} = |\mathbf{p}| \cdot \mathbf{v}$. Ezt a $\mathbf{p}$ vektor vetítésekor is elmondhatjuk, ezért

$$A(p) = |\mathbf{p}| \cdot A(|v|).$$

Ez tetszőleges $\mathbf{p}$ vektorra elmondható. Tehát ha az a célunk, hogy azt bizonyítsuk, hogy a p átlagértéke a vektor hosszának konstansszorosa, azt kell megmutatnunk, hogy $A(|u|) = A(|v|)$, ahol $\mathbf{u}$ az egységgömb egy tetszőleges pontjába mutató vektor. A cikkben pedig ezt bizonyítjuk a gyakorlat utáni részben, csak ott egységvektorok helyett egyenlő hosszú vektorokról van szó.

8. gyakorlat. Ha az oldalak vetületei mentén végigmegyünk, pont az $S(\alpha)$ szakaszon haladunk végig oda és vissza.

9. gyakorlat. Könnyen látható, hogy az $S(\alpha)$ szélességfüggvény értéke mindig valamelyik oldal vagy átló hossza. Mivel ezek mind kisebbek d-nél, így a függvény átlagértéke is kisebb d-nél a 3'. tulajdonság szerint. Felhasználjuk az előbb levezetett képletet: $P = \pi \cdot A(S) < \pi d$.

10. gyakorlat. A függvénygrafikont felrajzolva jól látható, hogy az integrál értéke

$$\int_0^\pi \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha = [-\cos\alpha]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

11. gyakorlat. Felhasználjuk a definíciókat, az 1'. tulajdonságot és azt, hogy a hosszak összege 1. Jelölje φ_i az $\mathbf{a_i}$ vektor és a t_0 tengely által bezárt szöget.

$$\begin{aligned}
A(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{2\pi} |\mathbf{a}_i|\, g(\varphi_i-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{a}_i|\int_0^{2\pi} g(\varphi_i-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}2\,|\mathbf{a}_i| = \frac{1}{2\pi}\cdot 2 = \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

12. gyakorlat. A pszeudoprojekciók összegének $(f(\alpha))$ átlagértéke $\frac{1}{\pi}$, tehát a 3'. tulajdonság szerint létezik olyan t_α, amire az összeg legalább ekkora.

13. gyakorlat. Tekintsünk egy olyan t_α tengelyt, amire $f(\alpha)$ legalább $\frac{1}{\pi}$, ilyen a 12. gyakorlat szerint létezik. Tekintsük azokat a vektorokat, amiknek erre a tengelyre vett pszeudoprojekciói pozitívok. Képezzük ezen vektorok $\mathbf{b}$ összegvektorát! A pszeudoprojekció definíciójából következik, hogy $\mathbf{b}$ pszeudoprojekciója $f(\alpha)$, ugyanis mivel az összeadandó vektorok pszeudoprojekciója pozitív, a tengely mentén végig azonos irányba haladunk. Egy vektor pszeudoprojekciója pedig legfeljebb akkora, mint maga a vektor, ezért $\mathbf{b}$ hossza legalább $\frac{1}{\pi}$, amit bizonyítani kellett.

Kiegészítés. Szabályos n-szög esetén akkor kapjuk a legnagyobb hosszat, ha $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ egymást követő oldalvektort adunk össze (páratlanok esetében ugyanakkora hosszt kapunk $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ és $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$) esetén). Az egyszerűség kedvéért foglalkozzunk csak páros n-ekkel. Itt a legnagyobb elérhető hossz a köré írt kör d átmérője, ami a sugár (R) kétszerese:

$$d = 2R = \frac{\frac{1}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

ahol α a sokszög szöge: $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{2n}$, $\frac{1}{n}$ pedig a sokszög oldalhossza, hiszen az oldalak hosszösszege 1.

Vegyük d határértékét, ahogy $n\to\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^{-1}\pi\sin\frac{\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Ha $n \to \infty$, akkor $\frac{\pi}{n} \to 0$. Legyen $z = \frac{\pi}{n}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\pi \sin z} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{\sin z}{z}} = \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Látjuk tehát, hogy $\frac{1}{\pi}$-nél nagyobb értékre a 4. feladat állítása valóban nem lehet igaz.