

A felszín definíciójának keresése

Hol látod, hol meg nem

Vlagyimir Dubrovskij

A fordítás eredetije az 1991. március-áprilisi Quantumban jelent meg In search of a definition of surface area címmel. Az angol cikk alapját Vlagyimir Dubrovskij a Kvant folyóiratban megjelent 1978. májusi és 1979. áprilisi cikkei jelentették. Jelen fordításban nem szerepel az angol nyelvű cikk összes ábrája; a megértést segítheti az orosz nyelvű cikkek ábráinak tanulmányozása.

Tudod, mekkora a gömb felszíne? Valószínűleg igen. Ha mégsem, csak csapj fel egy tankönyvet, és megtudod, hogy $4\pi R^2$, ahol R a gömb sugara. Most viszont be fogom bizonyítani, hogy a felszín valójából $\pi^2 R^2$.

Amit látsz, azt el is hiszed

Vegyünk egy félgömböt, mondjuk az északi féltekét. Osszuk fel az Egyenlítőt n részre az A_1, A_2, \dots, A_n pontokkal, és kössük össze ezeket a pontokat az Északi-sark S pontjával a hosszúsági körök ívei mentén. Most képzeljük el, hogy az $A_1 A_2 \dots A_n$ n -szög az Egyenlítő fölé emelkedik, párhuzamos maradván az Egyenlítő síkjával, miközben csúcsai a hosszúsági körökön haladnak (ábra). Oldalai mint egy zárt virág fedik le a felszínt. Ha a virág kinyílik, n háromszöget kapunk. Legyen ezen háromszögek alapja $a_n = A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_n A_1$, magassága m_n . Ekkor a háromszögek összterülete $na_n m_n / 2$. Világos, hogy ahogy n nő, a virág összterülete a félgömb felszínéhez tart, míg a sokszög kerülete az Egyenlítő hosszához, $2\pi R$ -hez, a magasság pedig $\pi R / 2$ -höz tart (egy hosszúsági kör negyedrésze). Tehát a félgömb felszíne, azaz a virág területének határértéke $2\pi R \cdot (\pi R / 2) / 2 = \pi^2 R^2 / 2$, tehát a gömb felszíne $\pi^2 R^2$.

Itt valami nincs rendjén: mégsem mondhatjuk, hogy a világ összes geometriakönyve téved. A paradoxont közelítsük meg messziről, kezdve a probléma eredeténél: mit jelent egy felület felszíne?

Az első kísérlet: kiterítés

Sir, I admit your general rule,
That every poet is a fool:
But you yourself may serve to show it,
That every fool is not a poet.¹

Matthew Prior

1. Nyersfordítás: Uram, elfogadom ökölszabályodat, Hogy minden költő bolond, De magad is beláthatod, Hogy nem minden bolond költő.

A legegyszerűbb feladat a henger és a kúp felszínének meghatározása: egy egyenes vonallal felvágás után ki lehet őket teríteni; előbbinél téglalapot, utóbbinál körcikket kapunk. Területük egyszerűen kiszámítható a síkgeometriából jól ismert képletekkel. Az előbbi virág szirmainak területét szintén kiterítéssel számoltuk ki. Habár ez talán a legegyszerűbb módja a felszínszámításnak, sajnos csak kevés felület teríthető ki.² Példának okáért mindenki, aki már próbált egy almát, narancsot vagy egy görögdinnyét papírba csomagolni, tudja, hogy lehetetlen elkerülni a ráncokat és gyűrődéseket. Mondhatni józan ésszel látható, hogy a gyakorlatban lehetetlen akár egy olyan egyszerű felület létrehozása is, mint a gömb. De hogy bizonyítsuk ezt be?

Először is meg kell értenünk, mit jelent a kiterítés, és hogy mi a különbség egy gumilap és egy papírlap között – hiszen gumilappal könnyen be lehet csomagolni bármit gyűrődés nélkül. Nos, a gumi tud nyúlni és összehúzódni, míg erre a papír nem képes. A kiterítés lényege, hogy minden görbe hossza állandó marad.

Most képzeljük el, hogy egy gömböt szétvágunk olyan részekre, amiket ezen tulajdonság fennállásával ki tudunk teríteni a síkon. Vegyünk fel az egyik rész belsejében egy A pontot, és vegyünk fel egy A középpontú k kört, ami teljes egészében ezen részben van. A szimmetriából következik, hogy ez a kör azon X pontok mértani helye (a gömbön), amiknek az A ponttól vett $d(X; A)$ gömbön mért távolságuk állandó. (A gömbön mért távolság a gömbön futó legrövidebb, a két pontot összekötő görbe hossza. Bebizonyítható, hogy egy ilyen távolság-görbe egy ún. gömbi főkör íve – a főkör a gömb és egy olyan sík metszete, ami tartalmazza a gömb középpontját, erre mindazonáltal nem lesz szükségünk.) Ez a gömbi kör természetesen tekinthető síkbeli körnek is. Ekkor középpontja az O pont, melyet úgy kapunk, hogy a kör bármely X pontját az A ponthoz tartozó gömbsugárra vetítjük. A síkbeli kör sugara $r = OX$, így kerülete $2r\pi$ (ábra). A kiterítés után a k kör azon pontok mértani helye (a síkban), amik távolsága az A ponttól R – azaz a kör középpontja A , sugara pedig R . Ennek a körnek a kerülete $2R\pi$. De $r = OX < AX < d(A; X) = R$, ugyanis az AX szakasz rövidebb, mint bármely görbe, ami A -t és X -et összeköti. Tehát a kör kerülete a kiterítés során megnő, ami a kiterítés legfőbb tulajdonságának mond ellent.

1. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy annak ellenére, hogy a gömb kiteríthetetlen, létezik olyan leképezés, ami

- a) egy félgömböt képez le a síkra úgy, hogy a gömbön való legrövidebb utakat a síkon való legrövidebb utakká alakítja.
- b) területtartóan képez le egy gömböt a síkra. (Tanács: lásd a 6. gyakorlatot.)

Hogy megcáfoljunk egy általános szabályt, elegendő egyetlen ellenpéldát mutatni (lásd a szakasz eleji idézetet.) Most tehát megmutattuk, hogy a kiterítés nem lesz hasznunkra a felszín általános definíciójának keresésében.

A második kísérlet: közelítés poliéderekkel

Olvasd el újra a Prior-idézetet!

2. A kiteríthetetlen felületekkel foglalkozik Dimitrij Fuksz „Bend This Sheet” című cikke a Quantum legelső számában.

A fentiek ellenére bizonyos típusú felületekkel semmi gondunk nincs. Különösen egyszerű poliéderek felszínét kiszámolni – azaz olyan felületekét, amik síkbeli sokszögekből állnak.

Éppen ezért természetes, hogy egy \mathcal{F} felület felszínét egy \mathcal{P} poliéder felszínével közelítsük. Minél jobban követi \mathcal{P} \mathcal{F} felszínét, annál pontosabb lesz a közelítés, így határértékként eljuthatunk \mathcal{F} felszínéhez. Az ívhossz hasonló módon van definiálva: a görbét töröttvonalal közelítjük. De vigyázat: nem engedhetjük meg magunknak, hogy figyelmetlenek legyünk, mert tetszőleges, a görbét közelítő töröttvonalak kellemetlen meglepetésekhez vezethetnek, ahogy a következő példa mutatja.

2. gyakorlat. Az [ábra](#) egy töröttvonal-sorozatot mutat, ami egy 1 egység hosszú szakaszhoz „konvergál”, holott a sorozat minden tagja $\sqrt{2}$ hosszú. Az n -edik töröttvonal pontjai és a szakasz közötti távolság nem nagyobb, mint $\frac{1}{2^n}$. Mutassunk példát olyan egységszakaszhoz konvergáló töröttvonal-sorozatra, amiben a töröttvonalak hossza

- a) tetszőleges $\ell > 1$ számhoz konvergál.
- b) nem korlátos.
- c) korlátos, de nem konvergens.

Minden rendben megy azonban, ha megköveteljük, hogy a görbét közelítő töröttvonal a görbébe legyen írva, azaz csúcsai a görbére illeszkedjenek. Legyen tehát egy hasonló feltételünk a felületekhez konvergáló poliéderekre, és így próbáljuk meg meghatározni a henger felületét.

Osszuk fel a henger m magasságát k egyenlő részre, és rajzoljunk köröket a felszínen ilyen módon létrejött osztópontokon keresztül. Írjunk ezekbe a körökbe szabályos n -szögeket úgy, hogy mindegyik a szomszédosakhoz (azaz az alatta és felette levőkhöz) képest $\frac{\pi}{n}$ szöggel el legyen forgatva ([ábra](#)³). Az ábrán látható módon kössük össze ezen n -szögek csúcsait. Kapunk egy a hengerbe írt $\mathcal{P}(n; k)$ poliédert, ami $2nk$ darab egybevágó háromszögből áll. Ha ezt felülről nézzük, azt látjuk, hogy az eredeti henger és a poliéder vízszintes éleit belülről érintő henger közötti d_n távolság nullához tart, ahogy n nő. Tehát $\mathcal{P}(n; k)$ a hengerhez „tart”, ha $n \rightarrow \infty$, függetlenül a részek k számától. De mi történik az $A(n; k)$ felszínnel?

A $\mathcal{P}(n; k)$ -t alkotó háromszögek alapja legyen a_n , magassága legyen $m_{n,k}$ (az alap hossza nem függ k -től). Ekkor

$$A(n; k) = 2nk \cdot a_n \cdot \frac{m_{n,k}}{2} = K_n \cdot km_{n,k},$$

ahol $K_n = na_n$ a poliéder alapjának kerülete. Nyilvánvalóan ahogy n nő, a K_n kerület a henger alapkörének kerületéhez, $2\pi r$ -hez tart, ahol r ezen kör sugara. A másik tényező, $km_{n,k}$ viselkedése azonban k -től is függ. Ha rögzítjük $k = 1$ -et, akkor $km_{n,k} = m_{n,1}$, ami $n \rightarrow \infty$ mellett egyértelműen m -hez tart, és ebből következően $A(n; 1) \rightarrow 2\pi rm$. Ez valóban a hengerpalást területe. Bármely állandó k -ra ugyanez a helyzet. De ha k n -nel (az egy rétegben lévő háromszöglapok számával) együtt nő, akkor az $A(n; k)$ felület határértéke más is lehet. A részletek

3. A csoport munkájának részeként közzétett [programok](#) egyike, a `matektabor3.jar` szintén ezt a konstrukciót szemlélteti. – A ford.

kiderülnek majd a 3. gyakorlatból, most mindössze egy példát mutatunk. Válasszuk meg úgy a k_n sorozatot, hogy $k_n d_n$ minden határon túl növekedjen – például úgy, hogy $k_n > n/d_n$ legyen (emlékezzünk, hogy d_n a $\mathcal{P}(n; k)$ poliéderbe és köré írt hengerek távolsága. Látható, hogy $d_n = r(1 - \cos \frac{\pi}{n})$.) Ekkor

$$A(n; k_n) = K_n \cdot k_n d_n \cdot \frac{m_{n,k_n}}{d_n} > K_n \cdot k_n d_n > K_n n \rightarrow \infty$$

(nyilvánvalóan $m_{n,k} > d_n$ bármely n -re és k -ra, mert m/k , d_n és $m_{n,k}$ derékszögű háromszöget alkotnak, amiben $m_{n,k}$ az átfogó). Tehát az $A(n; k_n)$ felszín minden határon túl nő annak ellenére, hogy a $\mathcal{P}(n; k_n)$ poliéder a henger felületéhez tart. Ezen elképesztő jelenség oka az, hogy ahogy n nő, $\mathcal{P}(n; k_n)$ oldalai növekvő szögeket zárnak be a hengerrel (emlékezzünk a k_n -re adott feltételre), és a poliéder felszíne ezek miatt a redők miatt nő.⁴

Ezt a konstrukciót 1890-ben alkotta meg H. A. Schwarz (1843–1921.). A matematikai folklórban Schwarz csizmája néven ismeretes.⁵ A példa megmutatta, hogy a felszínre imént adott definíciónk nem működik. Valójából a definíció pontosítást igényel: annak fogalma, hogy a poliéder mennyire követi a felületet, nem csupán azon múlik, hogy a poliéder csúcsai a felületen vannak, hanem azon is, hogy a lapok mekkora szöget zárnak be a felülettel. Ez azonban túl bonyolulttá teszi a definíciót – a gömb felszínének kiszámításához használni legalábbis oktalan lenne.

3. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy Schwarz csizmájának felszíne

$$A(n; k_n) = K_n m \sqrt{1 + \left(\frac{4r^2}{m^2}\right) k^2 \sin^4\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Ha ismert a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

azonosság, próbálj meg bármilyen $B \geq 2\pi r m$ -hez olyan k_n sorozatot találni, hogy $A(n; k_n)$ ehhez a számhoz konvergáljon.

A Minkowski-féle definíció

Az út hossza egyenlő területének és szélességének arányával.

Egy középiskolai előadásból

Körülbelül száz évvel ezelőtt Hermann Minkowski (1864–1909.) kiemelkedő német matematikus és fizikus új megközelítést javasolt a felszíndefinícióhoz. Kidolgozott egy módszert, amely a felszín kiszámítását a térfogat kiszámítására vezeti vissza.

Képzeld el, hogy le kell festened egy nagyon bonyolult formájú háztetőt. Mennyi festékre lesz szükséged? A válasz egyszerű: a festék V térfogata közelítőleg Ah , ahol A a tető felszíne, h pedig a festékréteg vastagsága. Így a tető

4. Megjegyezzük ugyanakkor azt is, hogy már egészen kis n -re is hatalmas k értékek keltenek, hogy ez teljesüljön, mert d_n nagyon gyorsan tart nullához. – A ford.

5. A Quantum ezen számának végén a Toy Store rovatban bemutatjuk, hogyan készíthető el Schwarz csizmájának papírmodellje.

felszíne közelítőleg V/h . Minél vékonyabb a festékréteg, annál pontosabb a közelítés. Mivel nem minden felületnek van két oldala,⁶ ez esetben célszerű mindkét oldalt „befesteni”, majd a felhasznált „festék” térfogatát osztani a réteg vastagságának kétszeresével.

Az állandó h vastagságú réteg matematikai megfelelője az \mathcal{F} felület h sugarú környezete (\mathcal{F}_h). Ez azon pontok halmaza a térben, amik a felülettől legfeljebb h távolságra vannak. Másképp fogalmazva \mathcal{F}_h azon X pontokból áll, amik mint középpont köré felvett bármilyen h -nál nagyobb sugarú gömb metszi \mathcal{F} -et. A síkbeli megfelelőt hasonlóképpen lehet definiálni.

4. gyakorlat. Határozzuk meg egy szakasz síkbeli és térbeli h sugarú környezetét. Bizonyítsuk be, hogy ezek területe ill. térfogata rendre $2\pi h d + \pi h^2$ ill. $\pi h^2 d + \frac{4}{3}\pi h^3$, ahol d a szakasz hossza.

5. gyakorlat. Oldjuk meg a következő terület- illetve felszínszámítási feladatokat!

- Határozzuk meg egy szabályos hatszög térbeli h sugarú környezetét. Jelöljük ennek térfogatát $V(h)$ -val, és mutassuk meg, hogy $\frac{V(h)}{2h}$ a hatszög területéhez tart, ahogy $h \rightarrow 0$.
- Bizonyítsuk be, hogy egy konvex sokszög h sugarú környezetének térfogata $2hT + \pi h^2 s + \frac{4}{3}\pi h^3$, ahol T a sokszög területe és s a félkerülete.

Most térjünk át a precíz megfontolásokra.

Definíció. Legyen $V(\mathcal{F}_h)$ az \mathcal{F} felület h sugarú környezetének térfogata. \mathcal{F} felszíne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(\mathcal{F}_h)}{2h}.$$

Természetesen a felszín ezzel a definícióval való kiszámítása csak a legegyszerűbb esetekben lehetséges, ráadásul legalább minimális analízistudást igényel, azaz bizonyos – egyszerű – határértékeket ki kell tudni számolni (látni fogjuk, hogy ezek a számítások a legtöbb esetben triviálisak). A bonyolultabb esetekre is le lehet vezetni (integrálást használó) képleteket akár a Minkowski-féle, akár más definíciók alapján. Következzék néhány példa.

Gömb. Azon pontok halmaza, amik r sugarú \mathcal{G} gömbtől legfeljebb h távolságra vannak ($h < r$), a \mathcal{G} -vel koncentrikus $r+h$ és $r-h$ sugarú gömbök közötti pontok (ábra). Így a \mathcal{G}_h környezet térfogata az $r+h$ és $r-h$ sugarú gömbök térfogatkülönbsége. (Egy r sugarú gömb térfogata $\frac{4}{3}\pi r^3$.) Tehát

$$\begin{aligned} \frac{V(\mathcal{G}_h)}{2h} &= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(r+h)^3 - (r-h)^3}{2h} \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{6r^2h + 2h^3}{2h} \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot (3r^2 + h^2) \\ &= 4\pi r^2 + \frac{4\pi h^2}{3}. \end{aligned}$$

6. Az egyoldalú felületekről szól A. Veszelyov „Flexible in the Face of Adversity” című cikke a Quantum 1990. szeptember-októberi számában.

Ahogy h nullához tart, a második tag kiesik, így megkapjuk az eredményt: $4\pi r^2$. („És mi a helyzet a $\pi^2 r^2$ -tel, amit a cikk elején a helyesként próbáltál ránk sózni?” – kérdezheti a hiszékeny, de résen lévő olvasó. Kitartás, még a cikk vége előtt visszatérünk rá.)

Henger. Az [ábra](#) bal oldalának jobb szélén látható egy r sugarú, m magasságú \mathcal{H} henger palástjának h sugarú környezetének keresztmetszete (egész pontosan annak csak a fele). Ez egy lekerekített sarkú téglalap; az íves részhez azok a pontok tartoznak, amik a henger éleitől vannak legfeljebb h távolságra. Ezek a részek megbonyolítják a térfogatszámítást. Szerencsére azonban – amint látni is fogjuk – az ezen ívekhez tartozó térfogat olyan kicsi, hogy nem befolyásolja az eredményt, így egyszerűen levághatjuk őket (lásd az [ábra](#) jobb oldalát). Most tehát egy olyan test térfogatát kell meghatároznunk, amit úgy kapunk, hogy egy $2h \times m$ -es téglalapot forgatunk egy tengely körül, aminek a hosszabb m oldaltól való távolsága r . Ez a térfogat megkapható az m magasságú, $r + h$ és $r - h$ sugarú hengerek térfogatainak különbségéeként:

$$\pi m ((r + h)^2 - (r - h)^2) = 2\pi r m \cdot 2h. \quad (1)$$

A $2h$ -val való osztás után kapjuk, hogy a hengerpalást felszíne $2\pi r m$.

Térjünk vissza az ívekre. Saját térfogatuk helyett a befoglaló $2h \times h$ -s téglalap tengely körüli megfogatásával keletkező gyűrű alakú forgástest térfogatát számítjuk ki (1)-hez hasonló módon:

$$\pi h ((r + h)^2 - (r - h)^2) = 2\pi r h \cdot 2h,$$

azaz a $2h$ -val való osztás után a felszínre $2\pi r h$ -t kapunk, ami $h \rightarrow 0$ mellett nullához konvergál.⁷

6. gyakorlat. A gömbcikk (gömbből olyan kúppal kivágott rész, aminek csúcsa a gömb középpontjában van) térfogata $\frac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos \alpha)$, ahol r a gömb sugara, és α a kúp tengelye és palástja által bezárt szög. Ezen képlet felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy gömböt két párhuzamos síkkal metszünk, a gömb síkok közé eső részének (gömböv) felszíne csak a síkok H távolságától függ, és ez a térfogat $2\pi r H$.⁸

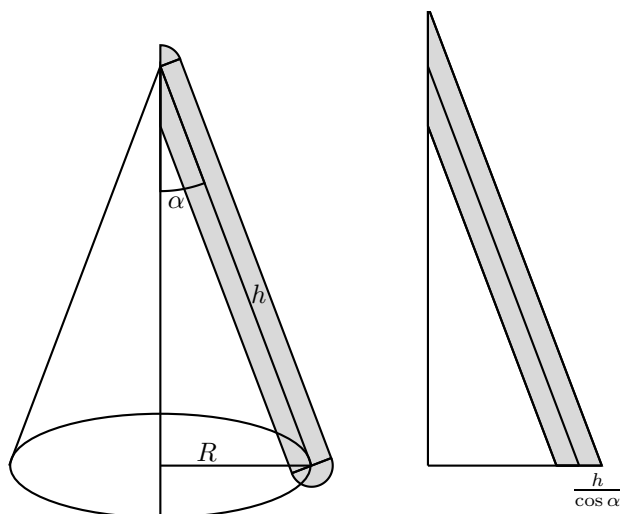
7. gyakorlat. Az 1. [ábra](#) felhasználásával bizonyítsuk be, hogy az r sugarú, l alkotóhosszú kúp palástjának felszíne $\pi r l$.

Lássunk egy újabb példát!

Kör. „De hát a kör nem is felület!” – lehetne mondani. Természetesen nem az, de Minkowski ötletét használhatjuk hosszúságok kiszámítására is. Egy síkbeli \mathcal{G} görbe hosszának meghatározásához a térbeli h sugarú környezet térfogata helyett síkbeli h sugarú környezet területére van szükség. Esetünkben egy r sugarú kör h sugarú környezete ($h < r$) az $r + h$ és $r - h$ körök közötti körgyűrű. Ennek területe $\pi((r + h)^2 - (r - h)^2) = 2\pi r \cdot 2h$. A $2h$ -val való osztás után kapjuk a kör kerületének jól ismert képletét: $2\pi r$. Egy másik lehetőség a Minkowski-féle

⁷ A felső és alsó ívek az egész hengerre vonatkoztatva egy tóruszt adnak, aminek térfogata esetünkben $2\pi^2 r h^2$; lásd a 8. gyakorlatot. – A ford.

⁸ Lásd a 9. Matektábor 10. évfolyamának előadásának vonatkozó is. – A ford.



1. ábra

definíció számlálóját változatlanul hagyni (azaz hogy továbbra is térbeli környezetről legyen szó), a nevezőt pedig πh^2 -re változtatni: egy görbe térbeli h sugarú környezete egy „cső”, aminek térfogata közelítőleg egyenlő hosszának és keresztmetszete (egy h sugarú kör – lásd a 4. és a 8. gyakorlatokat) területének szorzatával. A definíció ezen változata nem síkbeli görbékre is érvényes.

Most tehát már ismersz három definíciót, melyek egy közös ötleten alapulnak; feltehetően megértetted, hogy a definíciók ezen sora a mérendő test és a körülvevő tér dimenziójához igazítva folytatható. Két további példát találsz a 9. gyakorlatban, de a további általánosítás ezen cikk keretein kívül esik.

8. gyakorlat. Egy kör egy azt nem metsző tengely körüli forgatásával kapott test a tórusz. Térfogatát a $2\pi^2 Rr^2$ képlet adja meg, ahol r a kör sugara, R pedig annak távolsága a forgástengelytől. Mutassuk meg, hogy egy kör térbeli h sugarú környezete tórusz, majd vezessük le még egyszer a kör kerületének képletét. (Lásd a 2. ábrát.)

9. gyakorlat. Milyen \mathcal{F} halmazra lesz a következő hányadosok $h \rightarrow 0$ melletti határértéke pozitív és véges:

$$a) \frac{V(\mathcal{F}_h)}{1}; \quad b) \frac{V(\mathcal{F}_h)}{\frac{4}{3}\pi h^3}?$$

Mi ezen a határértékek geometriai jelentése?

Amit látsz, azt el is hiszed?

Eljött az idő, hogy bocsánatot kérjek a cikk elején használt kis csalásért. Rájöttél már, mi volt az? A titok nagyon egyszerű: miután a kiterítés megtörtént, a virág szirmai görbe oldalú háromszögek, nem pedig a megszokott típusúak. Könnyű

2. ábra. Mozgatható ábra a 8. gyakorlathoz.

belátni, hogy a háromszögek csúcsainál lévő szögek összege 2π -nél kevesebb, így ha virággá hajtánánk össze őket, lyukas felületet kapnánk. Természetesen így kisebb felszín kapunk, mint a gömbé valójában. Ha ez a trükk rávett, hogy végigolvasd ezt a cikket, akkor elérte célját.

Megoldások

Ezen fordításban csupán az egyik gyakorlat megoldását közöljük.

5. gyakorlat. Valójából mindkét részben ugyanazt kell csinálni.

- a) Legyen a hatszög oldala a , ekkor területe $T = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. A h sugarú környezet áll egy hatszög alapú hasázból, 6 félhengerből, továbbá a csúcsoknál lévő részek együtt egy gömböt adnak ki. Így a térfogat

$$V(h) = T \cdot 2h + \frac{6}{2}\pi ah^2 + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

Elvégezve a $2h$ -val való szorzást és 0-ban határértéket véve:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T \cdot 2h + 3\pi ah^2 + \frac{4}{3}\pi h^3}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(T + \frac{3\pi ah}{2} + \frac{2\pi h^2}{3} \right) = T.$$

- b) A h sugarú környezet áll egy sokszög alapú hasázból, az oldalakhoz tartozó félhengerekből, valamint a csúcsoknál lévő, az eddigiekben nem szereplő részekből egy gömb áll össze. (Itt használjuk ki, hogy a sokszög konvex.) Így a térfogat

$$V(h) = T \cdot 2h + \pi sh^2 + \frac{4}{3}\pi h^3.$$