A felszín definíciójának keresése

Hol látod, hol meg nem

Vlagyimir Dubrovszkij

A fordítás eredetije az 1991. március–áprilisi Quantumban jelent meg In search of a definition of surface area címmel. Az angol cikk alapját Vlagyimir Dubrovszkij a Kvant folyóiratban megjelent 1978. májusi és 1979. áprilisi cikkei jelentették. Jelen fordításban nem szerepel az angol nyelvű cikk összes ábrája; a megértést segítheti az orosz nyelvű cikkek ábráinak tanulmányozása.

Tudod, mekkora a gömb felszíne? Valószínűleg igen. Ha mégsem, csak csapj fel egy tankönyvet, és megtudod, hogy $4\pi R^2$, ahol R a gömb sugara. Most viszont be fogom bizonyítani, hogy a felszín valójából $\pi^2 R^2$.

Amit látsz, azt el is hiszed

Vegyünk egy félgömböt, mondjuk az északi féltekét. Osszuk fel az Egyenlítőt n részre az A_1, A_2, …, A_n pontokkal, és kössük össze ezeket a pontokat az Északisark S pontjával a hosszúsági körök ívei mentén. Most képzeljük el, hogy az $A_1A_2 \ldots A_n$ n-szög az Egyenlítő fölé emelkedik, párhuzamos maradva az Egyenlítő síkjával, miközben csúcsai a hosszúsági körökön haladnak (ábra). Oldalai mint egy zárt virág fedik le a felszínt. Ha a virág kinyílik, n háromszöget kapunk. Legyen ezen háromszögek alapja $a_n = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_nA_1$, magassága m_n. Ekkor a háromszögek összterülete $na_nm_n/2$. Világos, hogy ahogy n nő, a virág összterülete a félgömb felszínéhez tart, míg a sokszög kerülete az Egyenlítő hosszához, $2\pi R$-hez, a magasság pedig $\pi R/2$-höz tart (egy hosszúsági kör negyedrésze). Tehát a félgömb felszíne, azaz a virág területének határértéke $2\pi R \cdot (\pi R/2)/2 = \pi^2 R^2/2$, tehát a gömb felszíne $\pi^2 R^2$.

Itt valami nincs rendjén: mégsem mondhatjuk, hogy a világ összes geometriakönyve téved. A paradoxont közelítsük meg messziről, kezdve a probléma eredeténél: mit jelent egy felület felszíne?

Az első kísérlet: kiterítés

> Sir, I admit your general rule,
> That every poet is a fool:
> But you yourself may serve to show it,
> That every fool is not a poet.[1]
>
> Matthew Prior

1. Nyersfordítás: Uram, elfogadom ökölszabályodat, Hogy minden költő bolond, De magad is beláthatod, Hogy nem minden bolond költő.

A legegyszerűbb feladat a henger és a kúp felszínének meghatározása: egy egyenes vonallal felvágás után ki lehet őket teríteni; előbbinél téglalapot, utóbbinál körcikket kapunk. Területük egyszerűen kiszámítható a síkgeometriából jól ismert képletekkel. Az előbbi virág szirmainak területét szintén kiterítéssel számoltuk ki. Habár ez talán a legegyszerűbb módja a felszínszámításnak, sajnos csak kevés felület teríthető ki.[2] Példának okáért mindenki, aki már próbált egy almát, narancsot vagy egy görögdinnyét papírba csomagolni, tudja, hogy lehetetlen elkerülni a ráncokat és gyűrődéseket. Mondhatni józan ésszel látható, hogy a gyakorlatban lehetetlen akár egy olyan egyszerű felület létrehozása is, mint a gömb. De hogy bizonyítsuk ezt be?

Először is meg kell értenünk, mit jelent a kiterítés, és hogy mi a különbség egy gumilap és egy papírlap között – hiszen gumilappal könnyen be lehet csomagolni bármit gyűrődés nélkül. Nos, a gumi tud nyúlni és összehúzódni, míg erre a papír nem képes. A kiterítés lényege, hogy minden görbe hossza állandó marad.

Most képzeljük el, hogy egy gömböt szétvágunk olyan részekre, amiket ezen tulajdonság fennállásával ki tudunk teríteni a síkon. Vegyünk fel az egyik rész belsejében egy A pontot, és vegyünk fel egy A középpontú k kört, ami teljes egészében ezen részben van. A szimmetriából következik, hogy ez a kör azon X pontok mértani helye (a gömbön), amiknek az A ponttól vett $d(X;A)$ gömbön mért távolságuk állandó. (A gömbön mért távolság a gömbön futó legrövidebb, a két pontot összekötő görbe hossza. Bebizonyítható, hogy egy ilyen távolsággörbe egy ún. gömbi főkör íve – a főkör a gömb és egy olyan sík metszete, ami tartalmazza a gömb középpontját, erre mindazonáltal nem lesz szükségünk.) Ez a gömbi kör természetesen tekinthető síkbeli körnek is. Ekkor középpontja az O pont, melyet úgy kapunk, hogy a kör bármely X pontját az A ponthoz tartozó gömbsugárra vetítjük. A síkbeli kör sugara $r = OX$, így kerülete $2r\pi$ (ábra). A kiterítés után a k kör azon pontok mértani helye (a síkban), amik távolsága az A ponttól R – azaz a kör középpontja A, sugara pedig R. Ennek a körnek a kerülete $2R\pi$. De $r = OX < AX < d(A;X) = R$, ugyanis az AX szakasz rövidebb, mint bármely görbe, ami A-t és X-et összeköti. Tehát a kör kerülete a kiterítés során megnő, ami a kiterítés legfőbb tulajdonságának mond ellent.

1. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy annak ellenére, hogy a gömb kiteríthetetlen, létezik olyan leképezés, ami

a) egy félgömböt képez le a síkra úgy, hogy a gömbön való legrövidebb utakat a síkon való legrövidebb utakká alakítja.

b) területtartóan képez le egy gömböt a síkra. (Tanács: lásd a 6. gyakorlatot.)

Hogy megcáfoljunk egy általános szabályt, elegendő egyetlen ellenpéldát mutatni (lásd a szakasz eleji idézetet.) Most tehát megmutattuk, hogy a kiterítés nem lesz hasznunkra a felszín általános definíciójának keresésében.

A második kísérlet: közelítés poliéderekkel

Olvasd el újra a Prior-idézetet!

2. A kiteríthetetlen felületekkel foglalkozik Dimitrij Fuksz „Bend This Sheet” című cikke a Quantum legelső számában.

A fentiek ellenére bizonyos típusú felületekkel semmi gondunk nincs. Különösen egyszerű poliéderek felszínét kiszámolni – azaz olyan felületekét, amik síkbeli sokszögekből állnak.

Éppen ezért természetes, hogy egy $\mathcal{F}$ felület felszínét egy $\mathcal{P}$ poliéder felszínével közelítsük. Minél jobban követi $\mathcal{P}$ $\mathcal{F}$ felszínét, annál pontosabb lesz a közelítés, így határértékként eljuthatunk $\mathcal{F}$ felszínéhez. Az ívhossz hasonló módon van definiálva: a görbét töröttvonallal közelítjük. De vigyázat: nem engedhetjük meg magunknak, hogy figyelmetlenek legyünk, mert tetszőleges, a görbét közelítő töröttvonalak kellemetlen meglepetésekhez vezethetnek, ahogy a következő példa mutatja.

2. gyakorlat. Az ábra egy töröttvonal-sorozatot mutat, ami egy 1 egység hosszú szakaszhoz „konvergál”, holott a sorozat minden tagja $\sqrt{2}$ hosszú. Az n-edik töröttvonal pontjai és a szakasz közötti távolság nem nagyobb, mint $\frac{1}{2^n}$. Mutassunk példát olyan egységszakaszhoz konvergáló töröttvonal-sorozatra, amiben a töröttvonalak hossza

a) tetszőleges $\ell > 1$ számhoz konvergál.

b) nem korlátos.

c) korlátos, de nem konvergens.

Minden rendben megy azonban, ha megköveteljük, hogy a görbét közelítő töröttvonal a görbébe legyen írva, azaz csúcsai a görbére illeszkedjenek. Legyen tehát egy hasonló feltételünk a felületekhez konvergáló poliéderekre, és így próbáljuk meg meghatározni a henger felületét.

Osszuk fel a henger m magasságát k egyenlő részre, és rajzoljunk köröket a felszínen ilyen módon létrejött osztópontokon keresztül. Írjunk ezekbe a körökbe szabályos n-szögeket úgy, hogy mindegyik a szomszédosakhoz (azaz az alatta és felette levőkhöz) képest $\frac{\pi}{n}$ szöggel el legyen forgatva (ábra[3]). Az ábrán látható módon kössük össze ezen n-szögek csúcsait. Kapunk egy a hengerbe írt $\mathcal{P}(n;k)$ poliédert, ami $2nk$ darab egybevágó háromszögből áll. Ha ezt felülről nézzük, azt látjuk, hogy az eredeti henger és a poliéder vízszintes éleit belülről érintő henger közötti d_n távolság nullához tart, ahogy n nő. Tehát $\mathcal{P}(n;k)$ a hengerhez „tart”, ha $n \to \infty$, függetlenül a részek k számától. De mi történik az $A(n;k)$ felszínnel?

A $\mathcal{P}(n;k)$-t alkotó háromszögek alapja legyen a_n, magassága legyen $m_{n,k}$ (az alap hossza nem függ k-tól). Ekkor

$$A(n;k) = 2nk \cdot a_n \cdot \frac{m_{n,k}}{2} = K_n \cdot km_{n,k},$$

ahol $K_n = na_n$ a poliéder alapjának kerülete. Nyilvánvalóan ahogy n nő, a K_n kerület a henger alapkörének kerületéhez, $2\pi r$-hez tart, ahol r ezen kör sugara. A másik tényező, $km_{n,k}$ viselkedése azonban k-tól is függ. Ha rögzítjük $k = 1$-et, akkor $km_{n,k} = m_{n,1}$, ami $n \to \infty$ mellett egyértelműen m-hez tart, és ebből következően $A(n;1) \to 2\pi rm$. Ez valóban a hengerpalást területe. Bármely állandó k-ra ugyanez a helyzet. De ha k n-nel (az egy rétegben lévő háromszöglapok számával) együtt nő, akkor az $A(n;k)$ felület határértéke más is lehet. A részletek

3. A csoport munkájának részeként közzétett programok egyike, a `matektabor3.jar` szintén ezt a konstrukciót szemlélteti. – A ford.

kiderülnek majd a 3. gyakorlatból, most mindössze egy példát mutatunk. Válasszuk meg úgy a k_n sorozatot, hogy $k_n d_n$ minden határon túl növekedjen – például úgy, hogy $k_n > n/d_n$ legyen (emlékezzünk, hogy d_n a $\mathcal{P}(n;k)$ poliéderbe és köré írt hengerek távolsága. Látható, hogy $d_n = r(1 - \cos\frac{\pi}{n})$.) Ekkor

$$A\,(n;k_n) = K_n \cdot k_n d_n \cdot \frac{m_{n,k_n}}{d_n} > K_n \cdot k_n d_n > K_n n \to \infty$$

(nyilvánvalóan $m_{n,k} > d_n$ bármely n-re és k-ra, mert m/k, d_n és $m_{n,k}$ derékszögű háromszöget alkotnak, amiben $m_{n,k}$ az átfogó). Tehát az $A\,(n;k_n)$ felszín minden határon túl nő annak ellenére, hogy a $\mathcal{P}\,(n;k_n)$ poliéder a henger felületéhez tart. Ezen elképesztő jelenség oka az, hogy ahogy n nő, $\mathcal{P}\,(n;k_n)$ oldalai növekvő szögeket zárnak be a hengerrel (emlékezzünk a k_n-re adott feltételre), és a poliéder felszíne ezek miatt a redők miatt nő.[4]

Ezt a konstrukciót 1890-ben alkotta meg H. A. Schwarz (1843–1921.). A matematikai folklórban Schwarz csizmája néven ismeretes.[5] A példa megmutatta, hogy a felszínre imént adott definíciónk nem működik. Valójából a definíció pontosítást igényel: annak fogalma, hogy a poliéder mennyire követi a felületet, nem csupán azon múlik, hogy a poliéder csúcsai a felületen vannak, hanem azon is, hogy a lapok mekkora szöget zárnak be a felülettel. Ez azonban túl bonyolulttá teszi a definíciót – a gömb felszínének kiszámításához használni legalábbis oktalan lenne.

3. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy Schwarz csizmájának felszíne

$$A\,(n;k_n) = K_n m \sqrt{1 + \left(\frac{4r^2}{m^2}\right) k^2 \sin^4\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Ha ismert a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

azonosság, próbálj meg bármilyen $B \geq 2\pi rm$-hez olyan k_n sorozatot találni, hogy $A\,(n;k_n)$ ehhez a számhoz konvergáljon.

A Minkowski-féle definíció

Az út hossza egyenlő területének és szélességének arányával.

Egy középiskolai előadásból

Körülbelül száz évvel ezelőtt Hermann Minkowski (1864–1909.) kiemelkedő német matematikus és fizikus új megközelítést javasolt a felszíndefinícióhoz. Kidolgozott egy módszert, amely a felszín kiszámítását a térfogat kiszámítására vezeti vissza.

Képzeld el, hogy le kell festened egy nagyon bonyolult formájú háztetőt. Mennyi festékre lesz szükséged? A válasz egyszerű: a festék V térfogata közelítőleg Ah, ahol A a tető felszíne, h pedig a festékréteg vastagsága. Így a tető

4. Megjegyezzük ugyanakkor azt is, hogy már egészen kis n-re is hatalmas k értékek kellenek, hogy ez teljesüljön, mert d_n nagyon gyorsan tart nullához. – A ford.

5. A Quantum ezen számának végén a Toy Store rovatban bemutatjuk, hogyan készíthető el Schwarz csizmájának papírmodellje.

felszíne közelítőleg V/h. Minél vékonyabb a festékréteg, annál pontosabb a közelítés. Mivel nem minden felületnek van két oldala,[6] ez esetben célszerű mindkét oldalt „befesteni", majd a felhasznált „festék" térfogatát osztani a réteg vastagságának kétszeresével.

Az állandó h vastagságú réteg matematikai megfelelője az $\mathcal{F}$ felület h sugarú környezete ($\mathcal{F}_h$). Ez azon pontok halmaza a térben, amik a felülettől legfeljebb h távolságra vannak. Másképp fogalmazva $\mathcal{F}_h$ azon X pontokból áll, amik mint középpont köré felvett bármilyen h-nál nagyobb sugarú gömb metszi $\mathcal{F}$-et. A síkbeli megfelelőt hasonlóképpen lehet definiálni.

4. gyakorlat. Határozzuk meg egy szakasz síkbeli és térbeli h sugarú környezetét. Bizonyítsuk be, hogy ezek területe ill. térfogata rendre $2\pi hd + \pi h^2$ ill. $\pi h^2 d + \frac{4}{3}\pi h^3$, ahol d a szakasz hossza.

5. gyakorlat. Oldjuk meg a következő terület- illetve felszínszámítási feladatokat!

a) Határozzuk meg egy szabályos hatszög térbeli h sugarú környezetét. Jelöljük ennek térfogatát $V(h)$-val, és mutassuk meg, hogy $\frac{V(h)}{2h}$ a hatszög területéhez tart, ahogy $h \to 0$.

b) Bizonyítsuk be, hogy egy konvex sokszög h sugarú környezetének térfogata $2hT + \pi h^2 s + \frac{4}{3}\pi h^3$, ahol T a sokszög területe és s a félkerülete.

Most térjünk át a precíz meggondolásokra.

Definíció. Legyen $V(\mathcal{F}_h)$ az $\mathcal{F}$ felület h sugarú környezetének térfogata. $\mathcal{F}$ felszíne
$$\lim_{h\to 0} \frac{V(\mathcal{F}_h)}{2h}.$$

Természetesen a felszín ezzel a definícióval való kiszámítása csak a legegyszerűbb esetekben lehetséges, ráadásul legalább minimális analízistudást igényel, azaz bizonyos – egyszerű – határértékeket ki kell tudni számolni (látni fogjuk, hogy ezek a számítások a legtöbb esetben triviálisak). A bonyolultabb esetekre is le lehet vezetni (integrálást használó) képleteket akár a Minkowski-féle, akár más definíciók alapján. Következzék néhány példa.

Gömb. Azon pontok halmaza, amik r sugarú $\mathcal{G}$ gömbtől legfeljebb h távolságra vannak ($h < r$), a $\mathcal{G}$-vel koncentrikus $r+h$ és $r-h$ sugarú gömbök közötti pontok (ábra). Így a $\mathcal{G}_h$ környezet térfogata az $r+h$ és $r-h$ sugarú gömbök térfogatkülönbsége. (Egy r sugarú gömb térfogata $\frac{4}{3}\pi r^3$.) Tehát
$$\begin{aligned}\frac{V(\mathcal{G}_h)}{2h} &= \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{(r+h)^3-(r-h)^3}{2h}\\ &= \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{6r^2h+2h^3}{2h}\\ &= \frac{4\pi}{3}\cdot\left(3r^2+h^2\right)\\ &= 4\pi r^2 + \frac{4\pi h^2}{3}.\end{aligned}$$

6. Az egyoldalú felületekről szól A. Veszelov „Flexible in the Face of Adversity" című cikke a Quantum 1990. szeptember–októberi számában.

Ahogy h nullához tart, a második tag kiesik, így megkapjuk az eredményt: $4\pi r^2$. („És mi a helyzet a $\pi^2 r^2$-tel, amit a cikk elején a helyesként próbáltál ránk sózni?" – kérdezheti a hiszékeny, de résen lévő olvasó. Kitartás, még a cikk vége előtt visszatérünk rá.)

Henger. Az ábra bal oldalának jobb szélén látható egy r sugarú, m magasságú $\mathcal{H}$ henger palástjának h sugarú környezetének keresztmetszete (egész pontosan annak csak a fele). Ez egy lekerekített sarkú téglalap; az íves részhez azok a pontok tartoznak, amik a henger éleitől vannak legfeljebb h távolságra. Ezek a részek megbonyolítják a térfogatszámítást. Szerencsére azonban – amint látni is fogjuk – az ezen ívekhez tartozó térfogat olyan kicsi, hogy nem befolyásolja az eredményt, így egyszerűen levághatjuk őket (lásd az ábra jobb oldalát). Most tehát egy olyan test térfogatát kell meghatároznunk, amit úgy kapunk, hogy egy $2h \times m$-es téglalapot forgatunk egy tengely körül, aminek a hosszabb m oldaltól való távolsága r. Ez a térfogat megkapható az m magasságú, $r + h$ és $r - h$ sugarú hengerek térfogatainak különbségeként:

$$\pi m \left((r+h)^2 - (r-h)^2\right) = 2\pi r m \cdot 2h. \tag{1}$$

A $2h$-val való osztás után kapjuk, hogy a hengerpalást felszíne $2\pi r m$.

Térjünk vissza az ívekre. Saját térfogatuk helyett a befoglaló $2h \times h$-s téglalap tengely körüli megfogatásával keletkező gyűrű alakú forgástest térfogatát számítjuk ki (1)-hez hasonló módon:

$$\pi h \left((r+h)^2 - (r-h)^2\right) = 2\pi r h \cdot 2h,$$

azaz a $2h$-val való osztás után a felszínre $2\pi r h$-t kapunk, ami $h \to 0$ mellett nullához konvergál.[7]

6. gyakorlat. A gömbcikk (gömbből olyan kúppal kivágott rész, aminek csúcsa a gömb középpontjában van) térfogata $\frac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos\alpha)$, ahol r a gömb sugara, és α a kúp tengelye és palástja által bezárt szög. Ezen képlet felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy gömböt két párhuzamos síkkal metszünk, a gömb síkok közé eső részének (gömböv) felszíne csak a síkok H távolságától függ, és ez a térfogat $2\pi r H$.[8]

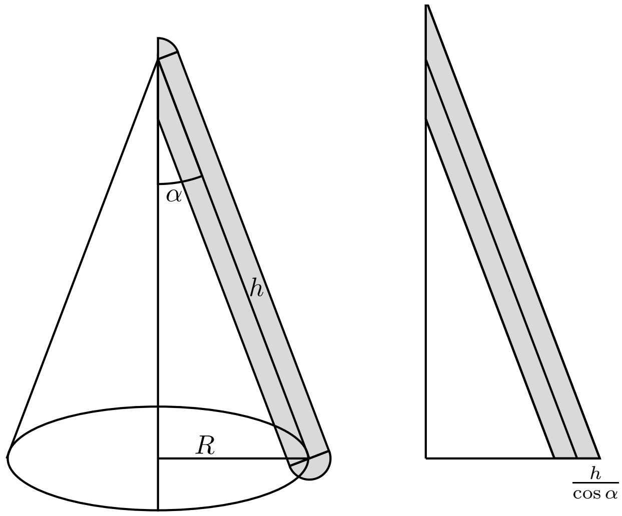
7. gyakorlat. Az 1. ábra felhasználásával bizonyítsuk be, hogy az r sugarú, l alkotóhosszú kúp palástjának felszíne $\pi r l$.

Lássunk egy újabb példát!

Kör. „De hát a kör nem is felület!" – lehetne mondani. Természetesen nem az, de Minkowski ötletét használhatjuk hosszúságok kiszámítására is. Egy síkbeli $\mathcal{G}$ görbe hosszának meghatározásához a térbeli h sugarú környezet térfogata helyett síkbeli h sugarú környezet területére van szükség. Esetünkben egy r sugarú kör h sugarú környezete ($h < r$) az $r + h$ és $r - h$ körök közötti körgyűrű. Ennek területe $\pi\left((r+h)^2 - (r-h)^2\right) = 2\pi r \cdot 2h$. A $2h$-val való osztás után kapjuk a kör kerületének jól ismert képletét: $2\pi r$. Egy másik lehetőség a Minkowski-féle

7. A felső és alsó ívek az egész hengerre vonatkoztatva egy tóruszt adnak, aminek térfogata esetünkben $2\pi^2 r h^2$; lásd a 8. gyakorlatot. – A ford.

8. Lásd a 9. Matektábor 10. évfolyamának előadásának vonatkozó is. – A ford.



1. ábra

definíció számlálóját változatlanul hagyni (azaz hogy továbbra is térbeli környezetről legyen szó), a nevezőt pedig πh^2-re változtatni: egy görbe térbeli h sugarú környezete egy „cső”, aminek térfogata közelítőleg egyenlő hosszának és keresztmetszete (egy h sugarú kör – lásd a 4. és a 8. gyakorlatokat) területének szorzatával. A definíció ezen változata nem síkbeli görbékre is érvényes.

Most tehát már ismersz három definíciót, melyek egy közös ötleten alapulnak; feltehetően megértetted, hogy a definíciók ezen sora a mérendő test és a körülvevő tér dimenziójához igazítva folytatható. Két további példát találsz a 9. gyakorlatban, de a további általánosítás ezen cikk keretein kívül esik.

8. gyakorlat. Egy kör egy azt nem metsző tengely körüli forgatásával kapott test a tórusz. Térfogatát a $2\pi^2 Rr^2$ képlet adja meg, ahol r a kör sugara, R pedig annak távolsága a forgástengelytől. Mutassuk meg, hogy egy kör térbeli h sugarú környezete tórusz, majd vezessük le még egyszer a kör kerületének képletét. (Lásd a 2. ábrát.)

9. gyakorlat. Milyen $\mathcal{F}$ halmazra lesz a következő hányadosok $h \to 0$ melletti határértéke pozitív és véges:

$$a)\ \frac{V(\mathcal{F}_h)}{1}; \quad b)\ \frac{V(\mathcal{F}_h)}{\frac{4}{3}\pi h^3}?$$

Mi ezen a határértékek geometriai jelentése?

Amit látsz, azt el is hiszed?

Eljött az idő, hogy bocsánatot kérjek a cikk elején használt kis csalásért. Rájöttél már, mi volt az? A titok nagyon egyszerű: miután a kiterítés megtörtént, a virág szirmai görbe oldalú háromszögek, nem pedig a megszokott típusúak. Könnyű

2. ábra. Mozgatható ábra a 8. gyakorlathoz.

belátni, hogy a háromszögek csúcsainál lévő szögek összege 2π-nél kevesebb, így ha virággá hajtanánk össze őket, lyukas felületet kapnánk. Természetesen így kisebb felszínt kapunk, mint a gömbé valójában. Ha ez a trükk rávett, hogy végigolvasd ezt a cikket, akkor elérte célját.

Megoldások

Ezen fordításban csupán az egyik gyakorlat megoldását közöljük.

5. gyakorlat. Valójából mindkét részben ugyanazt kell csinálni.

a) Legyen a hatszög oldala a, ekkor területe $T = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. A h sugarú környezet áll egy hatszög alapú hasábból, 6 félhengerből, továbbá a csúcsoknál lévő részek együtt egy gömböt adnak ki. Így a térfogat

$$V(h) = T \cdot 2h + \frac{6}{2}\pi a h^2 + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

Elvégezve a $2h$-val való szorzást és 0-ban határértéket véve:

$$\lim_{h \to 0} \frac{T \cdot 2h + 3\pi a h^2 + \frac{4}{3}\pi h^3}{2h} = \lim_{h \to 0} \left(T + \frac{3\pi a h}{2} + \frac{2\pi h^2}{3} \right) = T.$$

b) A h sugarú környezet áll egy sokszög alapú hasábból, az oldalakhoz tartozó félhengerekből, valamint a csúcsoknál lévő, az eddigiekben nem szereplő részekből egy gömb áll össze. (Itt használjuk ki, hogy a sokszög konvex.) Így a térfogat

$$V(h) = T \cdot 2h + \pi s h^2 + \frac{4}{3}\pi h^3.$$