Berzsenyi Dániel Gimnázium Matematika tábora – 2006
Csonka Dorottya : 7-8 osztály

A 7-8-os csoportnak tartott két foglakozás a kalózok és az általuk elrabolt gépek történetére épült fel. Vegyesen geometriai szerkesztéseket, logikai és valószínűségszámításos feladatokat, valamint kombinatorikus problémákat tartalmazott. A nagyon könnyű feladattól az egészen nehézig mindenki találhatott magának valót. A feladatok többségénél nem csak egy jó megoldás képzelhető el, nem maradt senki sikerélmény nélkül. Az órák anyagát olyan bontásban és formánban írtam le, mint ahogy azok elhangoztak. Így ha egyszerre több kérdés merült fel, azok megoldásai >> jel után szerepelnek – többnyire vázlatosan. Ha valaki hamarabb készen volt, mint a többiek, akkor külön lekötő feladatokat kapott.

Első foglalkozás:

Az alábbi levélre és térképre bukkantunk egy palackpostában:

Kedves Barátom!

Nagy veszélyben érezvén magunkat, s főképp legkedvesebb és legnagyobb becsben tartott Rendkívül Csodálatos Gépünket, ezért elrejtettük az gonosz emberek elől. Megtalálni csak az tudja majd, ki arra érdemes, s megfejti rejtekhelyét. A versike álljon itt, hogy próbára tegye mindazon tiszta lelkeket, kik a Rendkívül Csodálatos Gép keresésére indulnak:

Keresd a Golf Island legkisebb szigetét.
Nézz dél felé, merre az Island of Skye szigetei terülnek,
de ne kívánj sokat, ne menj messze, legyen az a sziget, amit keresel a legkisebb.
A rejtek e két apró szigettől egyenlő távol van.
Míg e két sziget közt hajózol, pont a Northsouth-egyenes útján mész,
mely nevében hordozza alakját s irányát.
Állítsd ehhez iránytűdet,
később még jól jöhet!

Hajózz el a Fiztroy szigetekig, de ne köss ki a legnagyobbra!
Legdélebben a legkisebb sziget vezet majd nyomra.
Port Suareztől északra, a Florida Keys szigetek
Rejtik a következő, ugyancsak nem nagy szigetet.
E két sziget a Skeleton egyenesre esik,
melytől a rejtek nincsen messzebb, se közelebb,

mint a már bejárt Northsouth-egyenes úttól.

Jól jegyezd ezt meg, és rajzold térképre
Ki jól fejti meg, megleli helyét a gépnek!

Mauser Parte

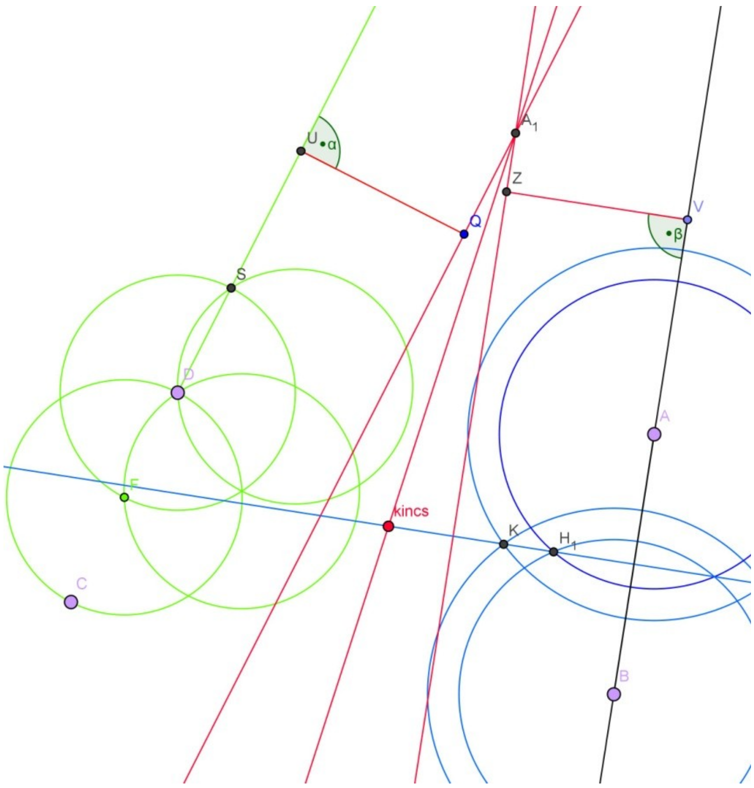
1754, augusztus 4.

>> A baloldali ábrán pirossal beszíneztük és betűvel megjelöltük rendre a szövegben kódolt szigeteket. Fordítsuk le a teendőket, és vegyük figyelembe, hogy a térkép nem teljes, a szakadások és lyukak megnehezítik a szokásos szerkesztési lépések elvégzését:

- Az AB szakasz felezőmerőlegesét kell úgy megszerkesztenünk, hogy csak a szakasz egyik oldalán van „elég hely”.
- A CD egyenesre szükségünk van, de nem fektethetjük le a vonalzónkat a térképre, mert a két pont között kiégett a papír és emiatt nem egyenletesen sima.
- Az AB és CD egyenesek által meghatározott szög szögfelezőjét kellene megszerkesztenünk, de a szög csúcsa nincs rajta a térképen.

Részletezés nélkül egy lehetséges szerkesztést mutatunk a mellékelt ábrán.

Szinte nem volt két azonos szerkesztés. A néhány téves elképzelés rávilágított a rutinná váló szerkesztési lépéseknél ki hol nem érti, mi is történik valójában. Így – ha néhányan segítséggel is – de végül mindenki eljutott a „Rendkívül Csodálatos Gép” rejtekhelyéhez.



Ezt a gépet nem véletlenül hívjuk „Rendkívül Csodálatos Gépnek”, hiszen minden eldöntendő kérdésre helyesen válaszol. A gépen csak két lámpa van: egy piros és egy zöld. Az egyik az igen, a másik a nem válaszok esetén világít. Ilyen gépeket vagy Kínában, vagy Japánban gyártanak. (Sajnos több is van belőlük, de attól még igen értékesek…) Az egyik országban összeszerelt gépek zölddel jelzik az igent, és pirossal a nemet, a másik országban gyártott gépek viszont fordítva: zölddel a nemet, és pirossal az igent jelzik. Nem tudjuk milyen országban gyártott gépet találtunk.

a. Döntsük el egyetlen kérdéssel, hogy melyik színnel válaszol a gépünk igennel!

   >> Tetszőleges igaz állításra kérdezzünk rá. Például: „2+2=4?” Amelyik színnel világít, azzal jelöli az igent.

Egyetlen egy kérdéssel – és az előző információkat most nem használva – kideríthetőek-e az alábbiak a megtalált gépről?

b. Döntsük el a gépünkről, hogy Kínában vagy Japánban készítették!
c. Döntsük el a gépünkről, hogy kínai vagy japán gépek válaszolnak zölddel igent (és most mindegy, hogy a mi gépünk hol készült, mi csak erre az információra vagyunk kíváncsiak.).
d. Most az se érdekel, hogy Kínában vagy Japánban gyártották, és hogy igennel vagy nemmel válaszol, csak azt szeretnénk elérni, hogy mindenképp pirossal világítson a feltett kérdésünkre. Mit kérdeznél?

   >> b. Például: „A kínai gépek zölddel válaszolnak igent?” Ha zölddel világít, akkor kínai, ha pirossal, akkor japán gépünk van.
   >>c. Például : „Te Kínában készültél?” Ha zölddel világít, akkor a kínai; ha pirossal, akkor a japán gépek felelnek zölddel igent.
   >>d. Például: „A piros válasz igent jelent?”
   A kérdések helyességének részletesebb igazolását az olvasóra bízzuk.

e. Most bizonyítsd be, hogy nincs ilyen gép! Azaz keressünk olyan kérdést, amivel a gép se zölddel se pirossal nem tud felelni!

   >>Például: „Az a szín, amivel erre a kérdéssel felelsz, nemet jelent?”

Második foglalkozás

Bevezetésként ismerkedjünk meg egy, a kalózok idejében uralkodott szultánnal. A Szultán növelni szerette volna népszerűségét és olyan születésszabályozó rendeletet hozott, hogy a családok addig vállalhatnak további gyermeket, amíg fiúk nem születik. Nem titkolt célja az volt, hogy ezáltal olyan családok legyenek ahol egy, két, három, négy …stb lány mellett csak egy fiú van. Így ha ez a generáció felnő, egy fiúra több lány jut, és ezért a többnejűség kérdése megnyugtatóan megoldódik: biztos mindenkinek lehet több felesége. Így a férfiak boldogak lesznek, és támogatni fogják Őt, az uralkodása biztosított lesz. (Feltételezzük, hogy a fiú és a lány gyermek születésének valószínűsége 50-50%)

f. Hol a hiba a Szultán gondolatmenetében?

   >>Vajában ekkor is körülbelül ugyanannyi fiú, mint lány születne. Az első gyermek az *n* pár felében fiú, felében lány (azaz $\frac{n}{2}$ fiú ill. lány). Csak $\frac{n}{2}$ család vállalhat újabb gyereket, ahol hasonlóan a fele fiú. Azaz eddig $\frac{n}{2}+\frac{n}{4}$ fiú és ugyanannyi lány van. És így tovább.

Itt az ideje, hogy jobban megismerkedjünk a kalózainkkal: a vérszomjuknál csak a kapzsiságuk nagyobb. Természetesen meghalni egyikőjük se szeretne. Egy érdekes rendszert találtak ki a zsákmány szétosztására. Vérszomjassági sorrendbe állnak. A legvérszomjasabb kalóz ajánlatot tesz az aranyak szétosztására. Ha a kalózok legalább 50%-a elfogadja az ajánlatot, akkor szétosztják a pénzt eszerint és mennek tovább rabolni. Ha kevesebb, mint a kalózok fele nem szavazott a szétosztásra, akkor a legvérszomjasabb kalózt vízbe lökik, és kezdődik minden elölről. Újra vérszomjassági sorrendbe állnak, és a most legvérszomjasabbá avanzsált kalóz ad szétosztási javaslatot. Ezt addig folyatják, amíg meg nem egyeznek a szétosztásról.

g. Öt aranyat raboltak. Hány kalóz van, ha a legvérszomjasabbnak három aranya van?

   >>Hat kalóz van. A szétosztás: 3-0-1-0-1-0.

   Itt egy kicsit leálltunk. Az egész feladatkör gyenge pontja, hogy feltételezzük, hogy minden kalóz ugyanúgy gondolkodik, és ugyanazt teszi minden helyzetben, illetve átlátja az eseményeket, akár a jövőbeniket is, és számol velük.
   Öt arany és egyre növekvő kalóz szám esetén nézzük meg, hogy mely szétosztásnál marad életben a legvérszomjasabb kalóz. Állítsuk őket vérszomjassági sorrendbe. A táblázat alján szerepeljenek a legkevésbé vérszomjasak. A kalózok vérszomjasságánál csak a kapzsiságuk nagyobb. Tehát ha most kap akár egy aranyat, akkor már biztosan a legvérszomjasabbra szavaz.

Kalózok száma:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Szétosztás:						3
					3	0
				4	0	1
			4	0	1	0
		5	0	1	0	1
	5	0	1	0	1	0
Szavazat:	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**

Most tíz kalóz van. A legvérszomjasabbnak 18 aranya van, és elfogadták az ajánlatát. Mennyit raboltak?

   >>22 aranyat. A szétosztás: 18-0-1-0-1-0-1-0-1-0.

h. 100 aranyat raboltak. A legvérszomjasabbnak 96 aranya van. Hány kalóz lehetett?

   >> 10 kalóz: a legvérszomjasabb; négy kalóz, akik 1 aranyat kaptak és öt akik semmit. Ez öt szavazat.

i. Jó kegyetlennek lenni? Hány kalóz esetén nem jó? (Azaz hány kalóz esetén nem tud megfelelő ajánlatot tenni a legvérszomjasabb, és ezért biztosan halál vár rá?)

   >> 200 kalóz esetén 100-an kapnak egy aranyat, és 100-an nem kapnak semmit. De életben marad a 201. kalóz is, mert a 201. (a legvérszomjasabb) bár nem oszt magának aranyat, de nem akar meghalni, ezért magára szavaz. Ezért a 100-szor 1 aranyhoz tartozó szavazat mellett az ő szavazata több mint a szavazatok fele. Tehát Ő is életben marad. Hasonló oknál fogva a 202. legvérszomjasabb kalóz is életben marad 101 szavazattal. A 203-nak lenni

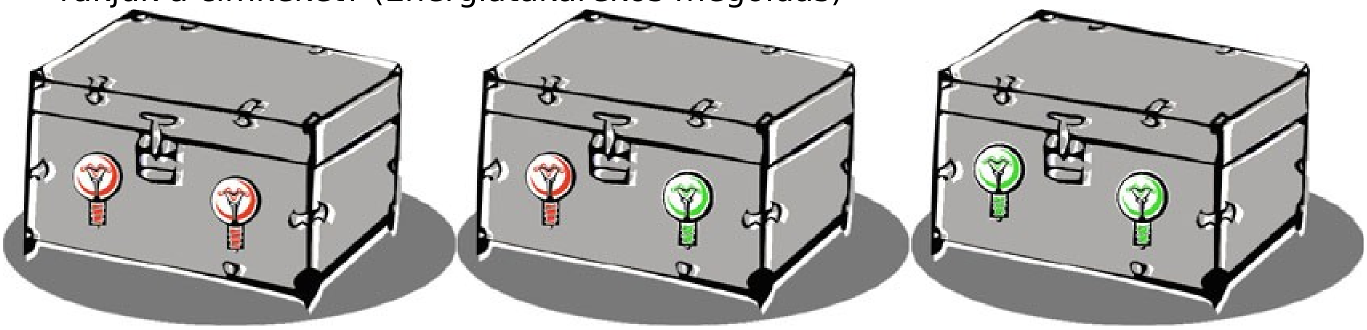
nem kifizetődő, mert Ő nem tud csak 101 szavazatot összegyűjteni. És itt gondolhatnánk, hogy a szavazatok nem nőnek, marad mindig 101 szavazat, így efelett nem érdemes legvérszomjasabbnak lenni. De mi történik a 204. kalózzal? Ki szavaz rá? Rá fog szavazni a 100 egy aranyat kapott kalóz, önmaga, és a 203. kalóz is, mert tudja, ha nem szavaz rá, akkor a következő szavazásnál biztosan meghal. Azaz van 102 szavazata, megvan az 50%! Életben fog maradni!
Hasonló gondolatmenettel beláthatjuk, hogy 200 kalóz feletti létszámnál minden $200+2^n, n\in \mathbb{N}$ kalózszám esetén életben marad a legvérszomjasabb. Ennek belátását már az olvasóra bízzuk.

Érdeklődők továbbgondolhatják, hogy mikor érdemes legvérszomjasabb kalóznak lenni, ha $\frac{2}{3}$–os, $\frac{3}{4}-es, \frac{n}{k}-as$ többség kell a szavazatszámlálásnál!

A következő problémákat egyszerre kapták meg a diákok gondolkodásra:

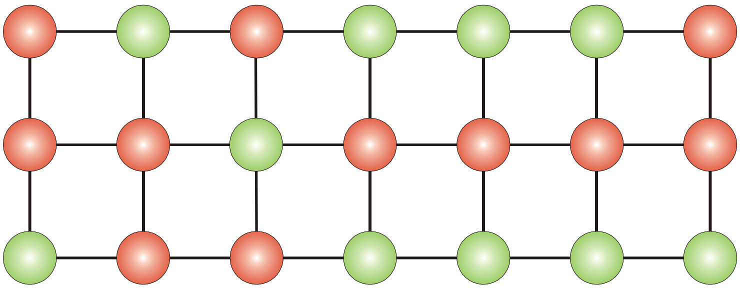
j. Három „Rendkívül Csodálatos Gép” közül az egyik sajnos rossz és véletlenszerűen válaszol zölddel vagy pirossal. Válasszuk ki egyetlen kérdéssel az egyik helyesen működő gépet!

k. Három dobozban alkatrészeket tárolunk. Az egyik dobozban két piros pótlámpa, a másikban két zöld pótlámpa, a harmadikban pedig egy piros és egy zöld pótlámpa található. A dobozon kívülről címkék jelzik a doboz tartalmát. Sajnos semelyik dobozra se a jó címke került. Hogyan érhető el minél kevesebb doboz kinyitásával, és abból minél kevesebb égő megtekintésével az, hogy a helyükre rakjuk a címkéket? (Energiatakarékos megoldás)



l. Mivel bebizonyítottuk, hogy ilyen „Rendkívül Csodálatos Gép” nem létezik, ezért valami hasonlót próbáltak gyártani a matematikusok. Azt találták ki, hogy egy szobába három égőt szerelnek fel: egy zöldet, ami az „igen” válaszok esetén világít, egy pirosat, ami a „nem” válaszok esetén világít és egy sárgát, ami a „nem tudom” válaszok esetén világít. Majd egy mikrofont beszerelve a legokosabb embert szerették volna beültetni a másik szobába. A terv az volt, hogy Ő meghallgatva a kérdést, és a kapcsolók segítségével felgyújtja a megfelelő válaszhoz tartozó lámpát. Ahhoz, hogy kiválasszák a legokosabb embert próba elé állították a jelentkezőket. A szabályok a következők voltak: tetszőleges ideig lehetett a jelentkező a kapcsolók szobájában, és azt tehetett a szobában, amit csak akart (de semmi más nem volt a szobában, csak a 3 kapcsoló és a kivezető ajtó) Ezután amikor átment a másik szobába meg kellett mondania, hogy melyik kapcsoló melyik lámpát irányítja. Te mit tennél, hogy elnyerd az állást?

m. A „Rendkívül Csodálatos Gép”-et kiállító múzeumban a dekoráció egy 3x7-es rács rácscsúcsaiba csavart lámpa-kompozíció. Helyezz el ebben 11 piros és 10 zöld lámpákat úgy, hogy ne legyen piros színű csúcsokkal rendelkező rácstéglalap!



>>k. Ez a kérdés sok fejtörést okozott a rajta gondolkodóknak. Kérdezzük meg az első gépet, hogy „ha megkérdezem, hogy a második gép jó-e, akkor zölddel válaszolsz?”. Ha a gép zölddel válaszol, akkor a második, ha pirossal, akkor a harmadik gép helyesen működik.
A megoldás átgondolását az olvasóra bízzuk.

>>l. Elég egy húzás. Abból a dobozból kell egyet kihúzni, amelyiken a piros-zöld címke van. Bármit húzunk – legyen mondjuk piros -, a mellette lévő is ugyanolyan színű. Ekkor a zöld-zöld címkéjű dobozban csak piros-zöld, a piros-piros címkéjűben zöld-zöld lámpák lesznek.

>>m. A kapcsolóknak csak két állása van, ezért a látványon kívül még egy tulajdonságot is fel kell használni. A három kapcsoló közül kapcsoljunk fel egyet és égessük a neki megfelelő lámpát sokáig, míg a másik kettő csukott állapotban van. Majd kapcsoljuk fel az egyik lámpát és menjünk át. A sokáig égetett lámpa forró, a most felkapcsolt még nem, a harmadik pedig nincs felkapcsolva.

>> n. Vizsgáljuk csak a piros lámpákat. Ha egy oszlopban 3 piros lámpa van, a többi oszlopban már csak 1-1 lámpa lehet. Így viszont csak 9 lámpát használtunk fel, bárhova helyezünk be további egy lámpát már lesz piros téglalap.
Ha minden oszlopban legfeljebb kettő lámpa lehet az azt jelenti, hogy 4 oszlopban van 2, és a többiben egy lámpa. De 2 lámpát csak 3 féleképpen helyezhetünk el a 3 sorban (lásd ábra első 3 oszlopa). Skatulya elv szerint lesz két azonos oszlop, tehát lesz téglalap. Ebből az is következik, hogy 10 lámpa elhelyezhető. Ha valaki nem boldogult az ereseti feladat bizonyításával, akkor előbb arra kértem 10 lámpával próbálkozzon.

Irodalomjegyzék:

[1] A „Rendkívül Csodálatos Gép” feladataira (a..e,k) Raymond Smullyan : Seherezádé rejtélye, *Typotex Kiadó 1999*., 18. fejezetében találtam rá.
[2] A vérszomjas kalózos történet (g..j) Jakab Tamás egy Kőszegen elhangzott órája alapján született meg.
[3] A kapcsolós feladatot (m) Pósa Lajostól hallottam.
[4] A 11 piros lámpás feladat (n) 1. Bergengóc példatárban *Typotex Elektronikus Kiadó, 2002*
a 25. feladatának átdolgozása.