Átlagérték

12. évfolyam

10. Matektábor

2013. október

Tartalom

Tartalom

Tartalom

Tartalom

Az átlag

Definíció

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *valós számok számtani közepe (átlaga):*

$$A\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Tulajdonságok

Tulajdonság

Összegek átlaga az átlagok összege:

$$A\left(x_1 + y_1;\ x_2 + y_2;\ \ldots;\ x_n + y_n\right) =$$
$$= A\left(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\right) + A\left(y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n\right)$$

Tulajdonságok

Tulajdonság

Konstans szorzót ki lehet emelni:

$$A\left(\alpha x_1;\ \alpha x_2;\ \ldots;\ \alpha x_n\right) = \alpha \cdot A\left(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\right)$$

Tulajdonságok

Tulajdonság

Az átlag a legnagyobb és legkisebb elem közé esik:

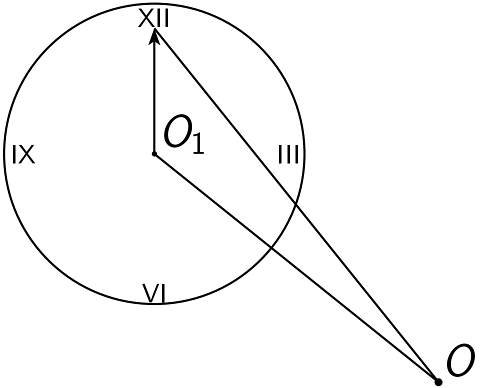
$$\min\left(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n\right) \leq A\left(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n\right) \leq$$
$$\leq \max\left(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n\right)$$

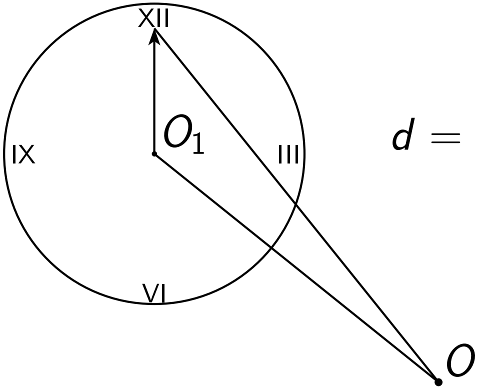
1. feladat

Feladat

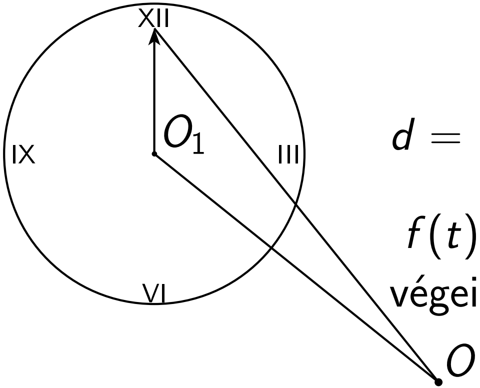
Adott n darab jól járó karóra egy kör alakú asztalon ($n > 1$). Bizonyítsuk be, hogy van olyan pillanat, amikor a percmutatók végeinek és az asztal közepének távolságösszege nagyobb, mint az óralapok közepeinek és az asztal közepének távolságösszege.

Program


XII
IX
III
VI
O_1
O

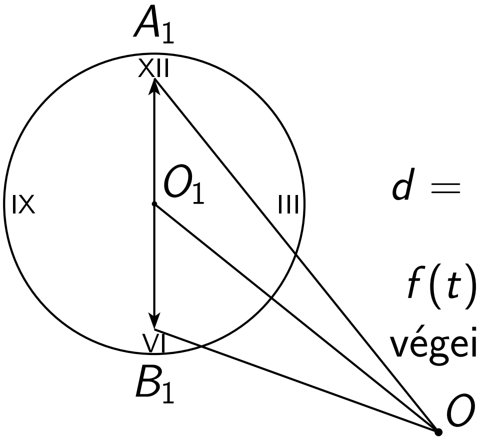


$$d = OO_1 + OO_2 + \ldots + OO_n$$



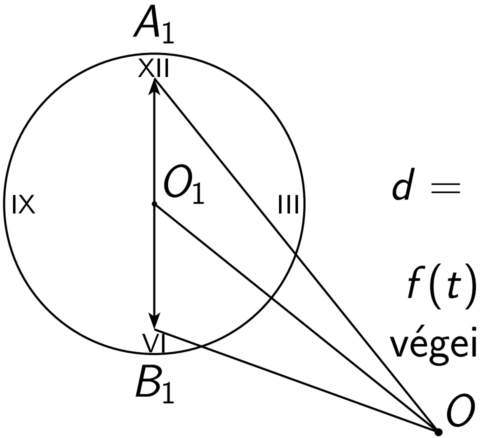
$$d = OO_1 + OO_2 + \ldots + OO_n$$

$f(t)$: O és a percmutatók végeinek távolságösszege



$$d = OO_1 + OO_2 + \ldots + OO_n$$

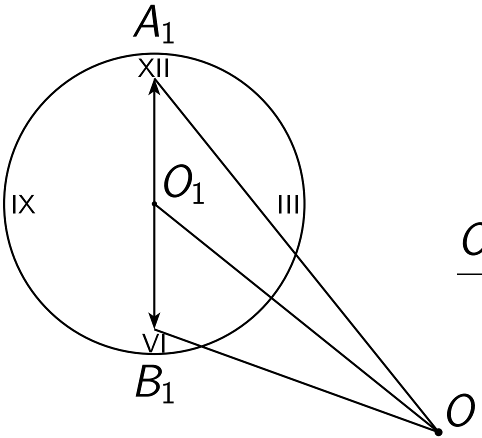
$f(t)$: O és a percmutatók végeinek távolságösszege



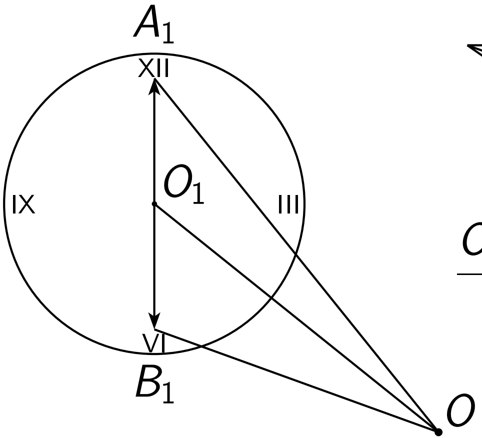
$$d = OO_1 + OO_2 + \ldots + OO_n$$

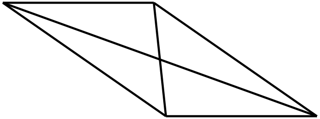
$f(t)$: O és a percmutatók végeinek távolságösszege

Állítás: $A\left(f\left(t_0\right);\ f\left(t_0+\frac{1}{2}\right)\right) > d$

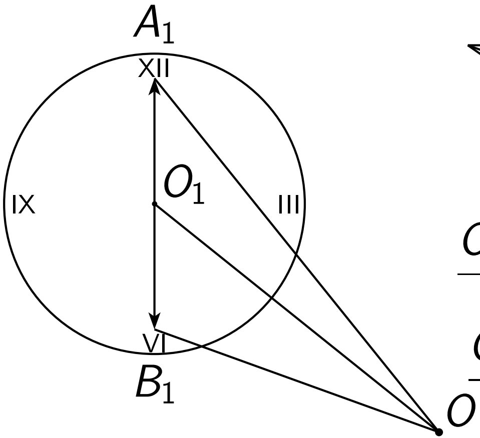


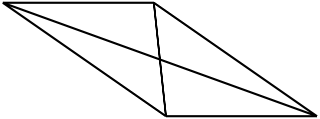
$$\frac{OA_1 + OB_1}{2} > OO_1$$





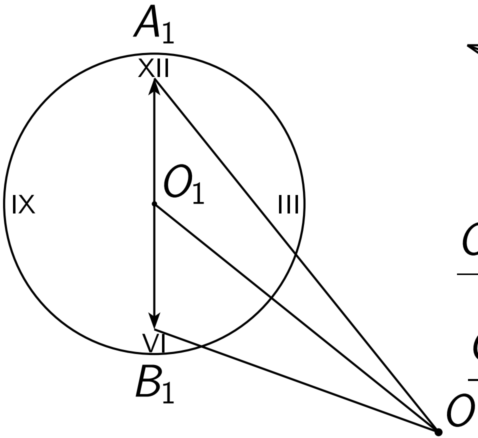
$$\frac{OA_1 + OB_1}{2} > OO_1$$

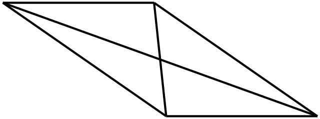




$$\frac{OA_1 + OB_1}{2} > OO_1$$

$$\frac{OA_i + OB_i}{2} \geq OO_i$$





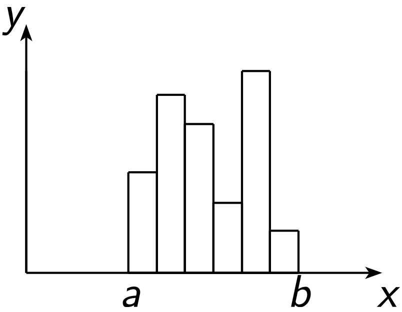
$$\frac{OA_1 + OB_1}{2} > OO_1$$

$$\frac{OA_i + OB_i}{2} \geq OO_i$$

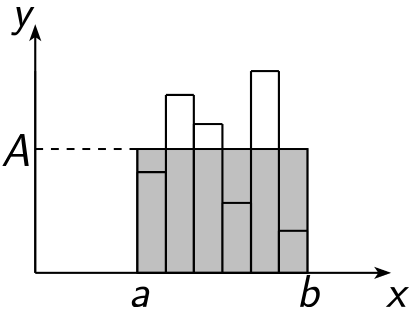
$$A\left(f\left(t_0\right);\ f\left(t_0 + \tfrac{1}{2}\right)\right) > d \Rightarrow t_0 \text{ vagy } t_0 + \tfrac{1}{2} \text{ jó}$$

Kiterjesztés folytonosra

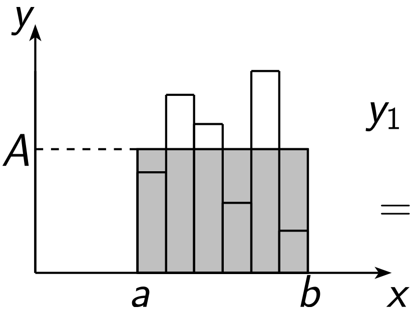
Kiterjesztés folytonosra



Kiterjesztés folytonosra

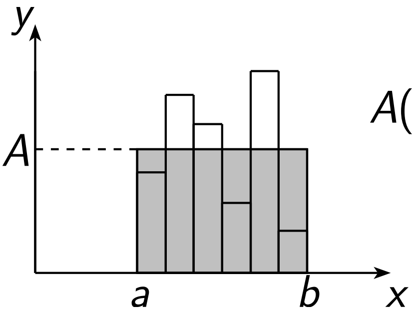


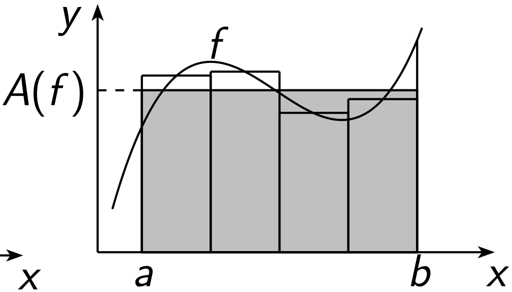
Kiterjesztés folytonosra



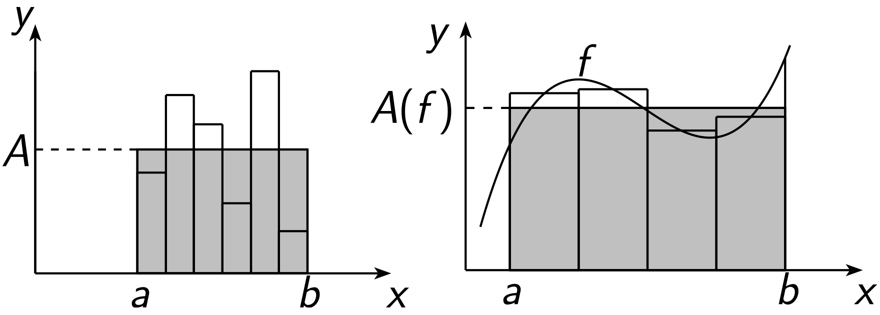
$$y_1 \cdot \frac{b-a}{n} + \ldots + y_n \cdot \frac{b-a}{n}$$
$$= (b-a) \cdot \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$$

Kiterjesztés folytonosra





Kiterjesztés folytonosra



$$f(x) \text{ átlagértéke } [a;b]\text{-n: } A(f) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

Tulajdonságok

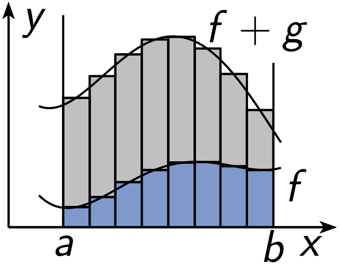
Tulajdonság

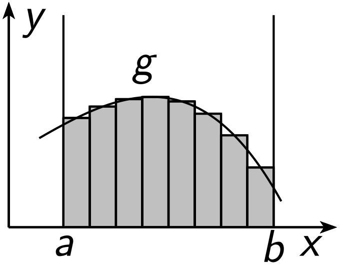
Összegfüggvény átlagértéke a tagok átlagértékeinek összege: $A(f+g)=A(f)+A(g)$

Tulajdonságok

Tulajdonság

Összegfüggvény átlagértéke a tagok átlagértékeinek összege: $A(f+g) = A(f) + A(g)$





Tulajdonságok

Tulajdonság

Konstans szorzót ki lehet emelni:

$$A(\alpha f) = \alpha \cdot A(f)$$

Tulajdonságok

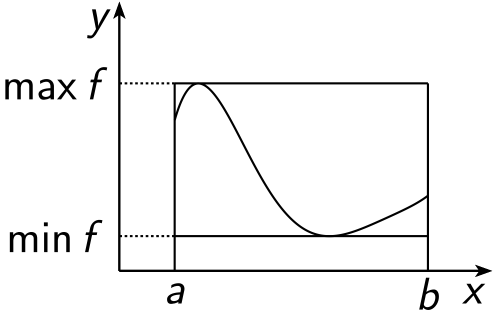
Tulajdonság

Az átlagérték a legnagyobb és legkisebb érték közé esik: $\min\limits_{a \le x \le b} f(x) \le A(f) \le \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$

Tulajdonságok

Tulajdonság

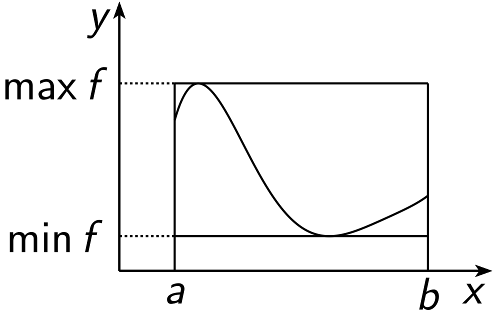
Az átlagérték a legnagyobb és legkisebb érték közé esik: $\min_{a \le x \le b} f(x) \le A(f) \le \max_{a \le x \le b} f(x)$



Tulajdonságok

Tulajdonság

Az átlagérték a legnagyobb és legkisebb érték közé esik: $\min_{a \le x \le b} f(x) \le A(f) \le \max_{a \le x \le b} f(x)$



$$(b-a) \cdot \min f$$
$$\le (b-a) \cdot A(f)$$
$$\le (b-a) \cdot \max f$$

Példa

Példa

Számítsuk ki $|\sin x|$ *átlagértékét* $[0; 2\pi]$*-n!*

Példa

Példa

Számítsuk ki $|\sin x|$ *átlagértékét* $[0; 2\pi]$*-n!*

$$A(|\sin x|) =$$

Példa

Példa

Számítsuk ki $|\sin x|$ *átlagértékét* $[0; 2\pi]$*-n!*

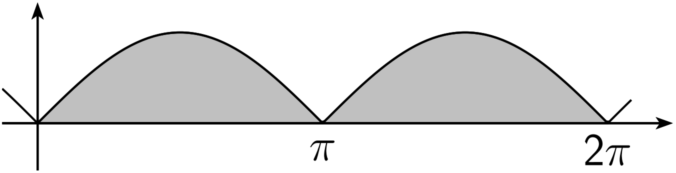
$$A(|\sin x|) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x =$$

Példa

Példa

Számítsuk ki $|\sin x|$ *átlagértékét* $[0;2\pi]$*-n!*

$$A(|\sin x|) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |\sin x| \, \mathrm{d}x =$$

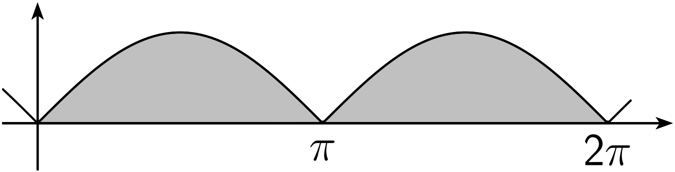


Példa

Példa

Számítsuk ki $|\sin x|$ *átlagértékét* $[0; 2\pi]$*-n!*

$$A(|\sin x|) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$$



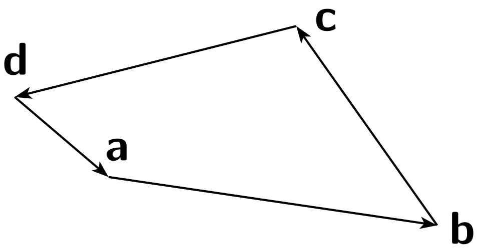
2. feladat

Feladat

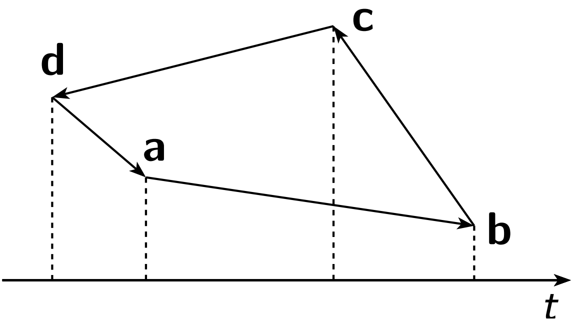
Az egy síkban lévő **a**, **b**, **c**, **d** *vektorok összege nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy*

$$|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|+|\mathbf{c}|+|\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a}+\mathbf{d}|+|\mathbf{b}+\mathbf{d}|+|\mathbf{c}+\mathbf{d}| .$$

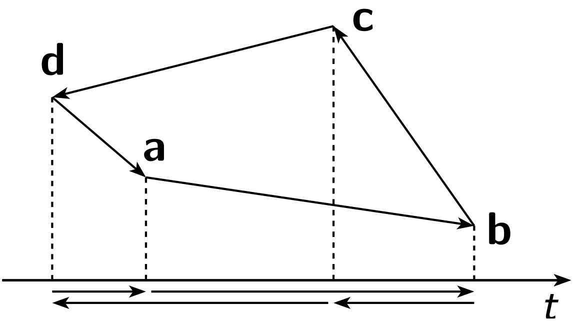
$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|$$



$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|$$



$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|$$



Vetületek előjeles összege 0 $\rightarrow$ egydimenziós eset

Lemma

Ha $a + b + c + d = 0$, *akkor teljesül, hogy* $|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a + d| + |b + d| + |c + d|$.

Lemma

Ha $a + b + c + d = 0$, *akkor teljesül, hogy*
$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a + d| + |b + d| + |c + d|.$

Átírás: $|b + d| = |a + c|$, $|c + d| = |a + b|$

Lemma

Ha $a + b + c + d = 0$, akkor teljesül, hogy
$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a + d| + |b + d| + |c + d|$.

Átírás: $|b + d| = |a + c|$, $|c + d| = |a + b|$
d nem kitüntetett szerepű:

$$|a+d|+|b+d|+|c+d| = |a+d|+|a+c|+|a+b|$$

Lemma

Ha $a+b+c+d=0$, *akkor teljesül, hogy* $|a|+|b|+|c|+|d| \geq |a+d|+|b+d|+|c+d|$.

Átírás: $|b+d| = |a+c|$, $|c+d| = |a+b|$

d nem kitüntetett szerepű:

$$|a+d|+|b+d|+|c+d| = |a+d|+|a+c|+|a+b|$$

Ha valamelyik szám nulla $\Rightarrow$ egyenlőség:

$$|a|+|b|+|c|+|0| = |a+0|+|b+0|+|c+0|$$

Tfh. $a,\ b,\ c,\ d \neq 0$.

$$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a + d| + |b + d| + |c + d|$$

Tfh. a, b, c, $d \neq 0$.
Tfh. a és b azonos (pozitív) előjelű

$$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a + d| + |b + d| + |c + d|$$

Tfh. a, b, c, $d \neq 0$.
Tfh. a és b azonos (pozitív) előjelű

$$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a + d| + |b + d| + |c + d|$$
$$a + b + |c| + |d| \geq |a + d| + |b + d| + a + b$$

Tfh. a, b, c, $d \neq 0$.
Tfh. a és b azonos (pozitív) előjelű

$$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a+d| + |b+d| + |c+d|$$
$$a + b + |c| + |d| \geq |a+d| + |b+d| + a + b$$
$$|c| + |a+b+c| \geq |b+c| + |a+c|$$

Tfh. a, b, c, $d \neq 0$.
Tfh. a és b azonos (pozitív) előjelű

$$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a+d| + |b+d| + |c+d|$$
$$a + b + |c| + |d| \geq |a+d| + |b+d| + a + b$$
$$|c| + |a+b+c| \geq |b+c| + |a+c|$$

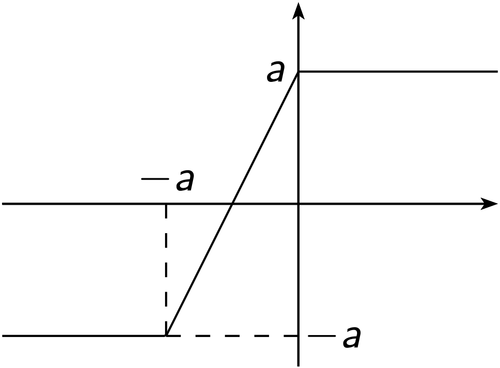
$$\iff |a+(b+c)| - |b+c| \geq |a+c| - |c|$$

$$|a+(b+c)|-|b+c| \geq |a+c|-|c|$$

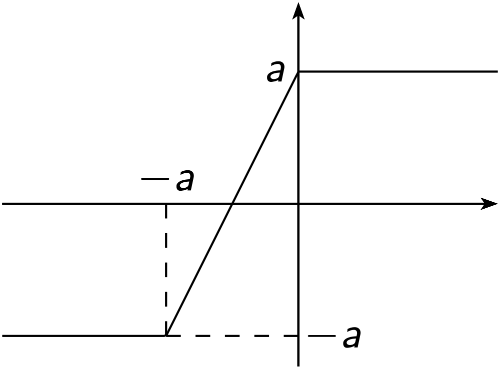
$$|a + (b + c)| - |b + c| \geq |a + c| - |c|$$
$$f(x) = |a + x| - |x|$$

$$|a+(b+c)|-|b+c| \geq |a+c|-|c|$$

$$f(x)=|a+x|-|x|$$

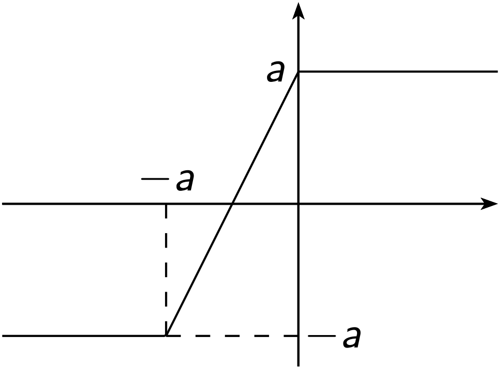


$$|a + (b + c)| - |b + c| \geq |a + c| - |c|$$
$$f(x) = |a + x| - |x|$$



f nemcsökkenő

$$|a + (b + c)| - |b + c| \geq |a + c| - |c|$$
$$f(x) = |a + x| - |x|$$

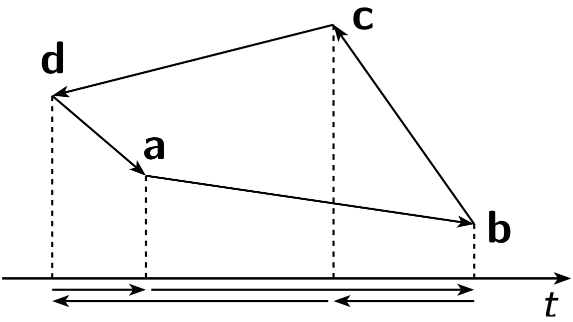


f nemcsökkenő

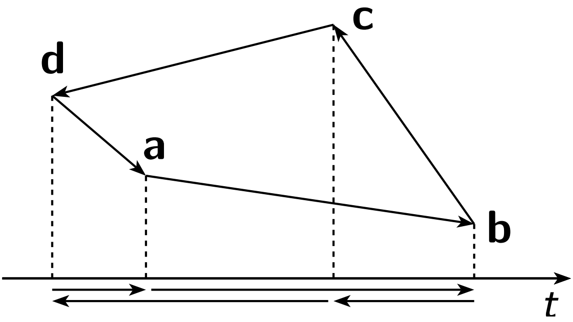
$b + c > c \Rightarrow$

$f(b + c) \geq f(c)$

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|$$

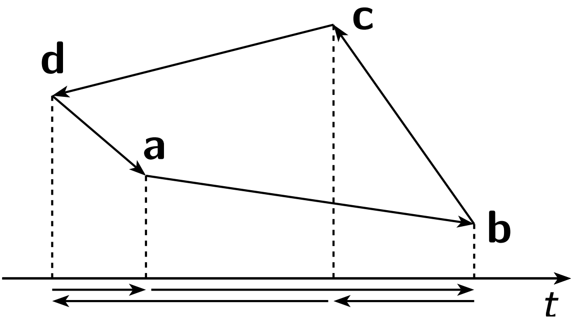


$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|$$



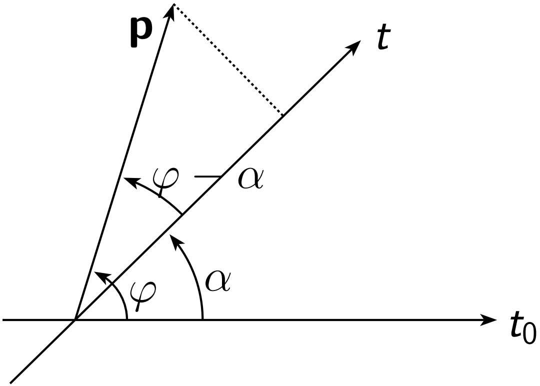
A vetítést csak egy irányban csináltuk $\to$ nem jó

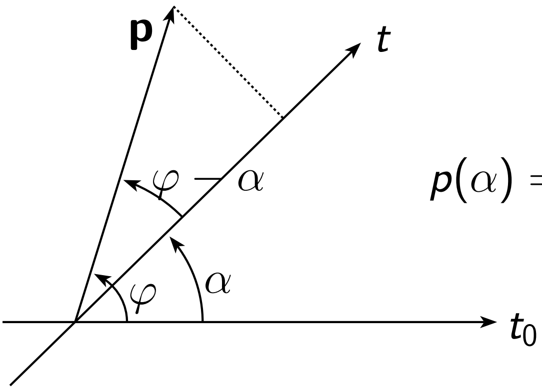
$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|$$



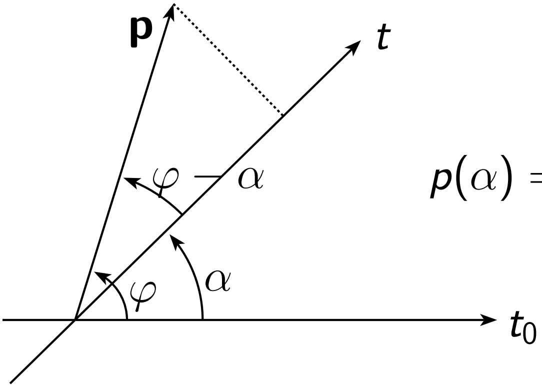
A vetítést csak egy irányban csináltuk $\rightarrow$ nem jó

$\Rightarrow$ Vetítsünk minden irányba!

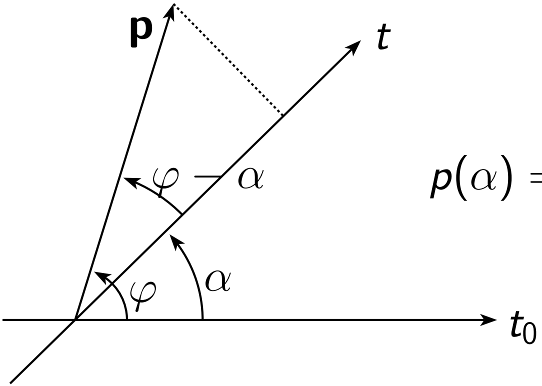

p
t
φ − α
φ
α
t0



$$p(\alpha) = |\mathbf{p}| \cos(\varphi - \alpha)$$



$$p(\alpha) = |\mathbf{p}| \cos(\varphi - \alpha)$$



$$p(\alpha) = |\mathbf{p}| \cos(\varphi - \alpha)$$

$\rightarrow$ $|p(\alpha)|$ átlagértéke $[0; 2\pi]$-n

$p(\alpha) = |\mathbf{p}| \cos(\varphi - \alpha)$ átlagértéke $[0; 2\pi]$-n:

$$A(|p|) =$$

$p(\alpha) = |\mathbf{p}| \cos(\varphi - \alpha)$ átlagértéke $[0; 2\pi]$-n:

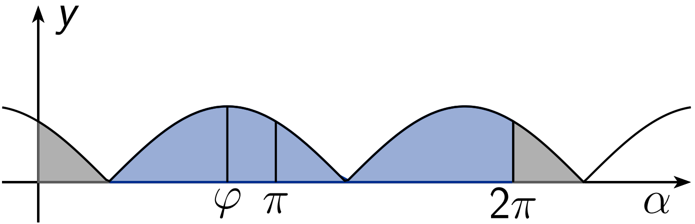
$$A\left(|p|\right) = |\mathbf{p}| \cdot A\left(|\cos(\varphi - \alpha)|\right)$$

$p(\alpha) = |\mathbf{p}| \cos(\varphi - \alpha)$ átlagértéke $[0; 2\pi]$-n:

$$\begin{aligned} A\left(|p|\right) &= |\mathbf{p}| \cdot A\left(|\cos(\varphi - \alpha)|\right) \\ &= |\mathbf{p}| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \alpha)| \, \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

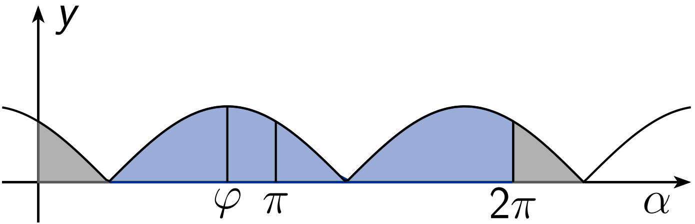
$p(\alpha) = |\mathbf{p}| \cos(\varphi - \alpha)$ átlagértéke $[0; 2\pi]$-n:

$$A(|p|) = |\mathbf{p}| \cdot A(|\cos(\varphi - \alpha)|)$$
$$= |\mathbf{p}| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \alpha)| \, \mathrm{d}\alpha$$



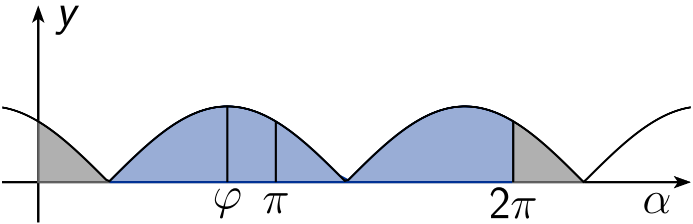
$p(\alpha) = |\mathbf{p}| \cos(\varphi - \alpha)$ átlagértéke $[0; 2\pi]$-n:

$$\begin{aligned} A\left(|p|\right) &= |\mathbf{p}| \cdot A\left(|\cos(\varphi - \alpha)|\right) \\ &= |\mathbf{p}| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \alpha)| \, d\alpha \\ &= |\mathbf{p}| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \alpha| \, d\alpha \end{aligned}$$



$p(\alpha) = |\mathbf{p}| \cos(\varphi - \alpha)$ átlagértéke $[0; 2\pi]$-n:

$$
\begin{aligned}
A\left(|p|\right) &= |\mathbf{p}| \cdot A\left(|\cos(\varphi - \alpha)|\right) \\
&= |\mathbf{p}| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \alpha)| \, \mathrm{d}\alpha \\
&= |\mathbf{p}| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \alpha| \, \mathrm{d}\alpha = |\mathbf{p}| \cdot \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$



Az átlagérték független φ-től: $A(|p|) = \frac{2}{\pi} \cdot |\mathbf{p}|$

Az átlagérték független φ-től: $A(|p|) = \frac{2}{\pi} \cdot |\mathbf{p}|$
A vetületek előjeles összege nulla (egydimenziós eset):

$$|a(\alpha)| + |b(\alpha)| + |c(\alpha)| + |d(\alpha)| \geq$$
$$|a(\alpha) + d(\alpha)| + |b(\alpha) + d(\alpha)| + |c(\alpha) + d(\alpha)|$$

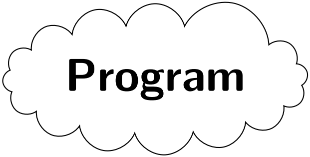
Az átlagérték független φ-től: $A(|p|) = \frac{2}{\pi} \cdot |\mathbf{p}|$
A vetületek előjeles összege nulla (egydimenziós eset):

$$|a(\alpha)| + |b(\alpha)| + |c(\alpha)| + |d(\alpha)| \geq$$
$$|a(\alpha) + d(\alpha)| + |b(\alpha) + d(\alpha)| + |c(\alpha) + d(\alpha)|$$

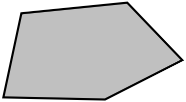
Átlagértéket véve:

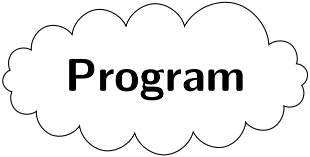
$$\frac{2}{\pi}|\mathbf{a}| + \frac{2}{\pi}|\mathbf{b}| + \frac{2}{\pi}|\mathbf{c}| + \frac{2}{\pi}|\mathbf{d}| \geq$$
$$\frac{2}{\pi}|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + \frac{2}{\pi}|\mathbf{b} + \mathbf{d}| + \frac{2}{\pi}|\mathbf{c} + \mathbf{d}|$$

Kerületmérés szélesség alapján



Kerületmérés szélesség alapján

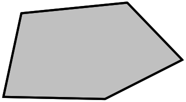


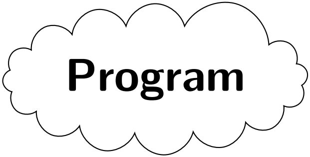


Cél: „szélesség" alapján kerület

Konvex sokszög, oldalai $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Kerületmérés szélesség alapján



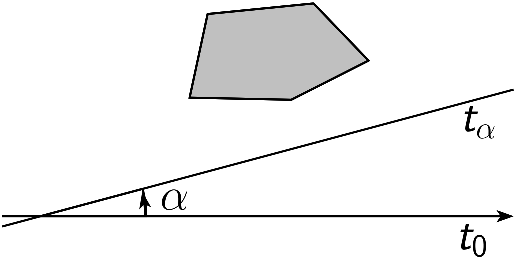


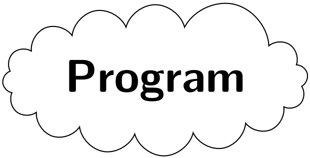
Cél: „szélesség”
alapján kerület

t_0

Konvex sokszög, oldalai $a_1, a_2, \dots, a_n$

Kerületmérés szélesség alapján

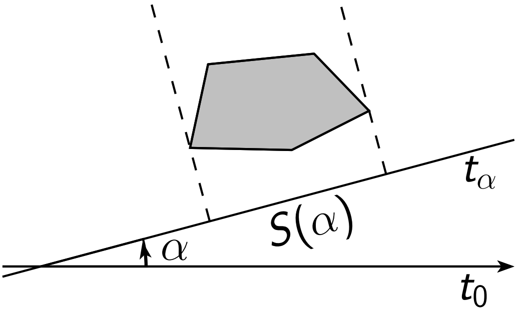


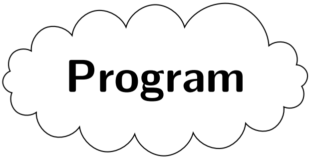


Cél: „szélesség” alapján kerület

Konvex sokszög, oldalai $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Kerületmérés szélesség alapján



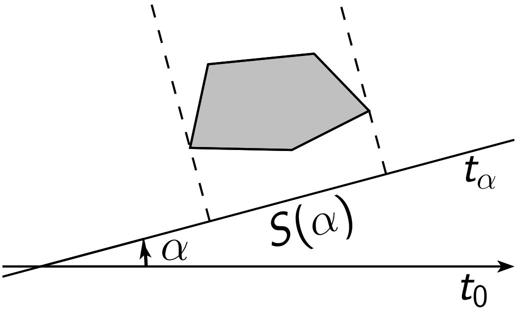


Cél: „szélesség" alapján kerület

Konvex sokszög, oldalai $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$a_i(\alpha)$: a_i t_α-ra vett $\perp$ vetülete

Kerületmérés szélesség alapján



Program

Cél: „szélesség" alapján kerület

$a_i(\alpha)$: a_i t_α-ra vett $\perp$ vetülete

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha))$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha))$$

$$A(a_i) = \frac{2}{\pi} |a_i|$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha))$$

$$A(a_i) = \frac{2}{\pi} |a_i|$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha))$$

$$A(S) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi} |a_1| + \frac{2}{\pi} |a_2| + \ldots + \frac{2}{\pi} |a_n| \right)$$

$$A(a_i) = \frac{2}{\pi}\left|a_i\right|$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha))$$

$$A(S) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\left|a_1\right| + \frac{2}{\pi}\left|a_2\right| + \ldots + \frac{2}{\pi}\left|a_n\right|\right) = \frac{K}{\pi}$$

$$A(a_i) = \frac{2}{\pi}\left|a_i\right|$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \left(a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha)\right)$$

$$A(S) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\left|a_1\right| + \frac{2}{\pi}\left|a_2\right| + \ldots + \frac{2}{\pi}\left|a_n\right|\right) = \frac{K}{\pi}$$

$$K = \pi \cdot A(S)$$

$$A(a_i) = \frac{2}{\pi}\left|a_i\right|$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\left(a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha)\right)$$

$$A(S) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\left|a_1\right| + \frac{2}{\pi}\left|a_2\right| + \ldots + \frac{2}{\pi}\left|a_n\right|\right) = \frac{K}{\pi}$$

$$K = \pi\cdot A(S) = \pi\cdot\frac{\int_0^{2\pi} S(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{2\pi}$$

$$A(a_i) = \tfrac{2}{\pi}\left|a_i\right|$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\left(a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha)\right)$$

$$A(S) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\left|a_1\right| + \frac{2}{\pi}\left|a_2\right| + \ldots + \frac{2}{\pi}\left|a_n\right|\right) = \frac{K}{\pi}$$

$$K = \pi \cdot A(S) = \pi \cdot \frac{\int_0^{2\pi} S(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{2\pi} = \frac{\int_0^{2\pi} S(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{2}$$

$$A(a_i) = \frac{2}{\pi}|a_i|$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha))$$

$$A(S) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}|a_1| + \frac{2}{\pi}|a_2| + \ldots + \frac{2}{\pi}|a_n|\right) = \frac{K}{\pi}$$

$$K = \pi \cdot A(S) = \pi \cdot \frac{\int_0^{2\pi} S(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{2\pi} = \frac{\int_0^{2\pi} S(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{2}$$

Steinhaus-módszer: minden zárt konvex görbére

Program

Program

Kerületmérés $\leftrightarrow$ π-mérés

3. feladat

Feladat

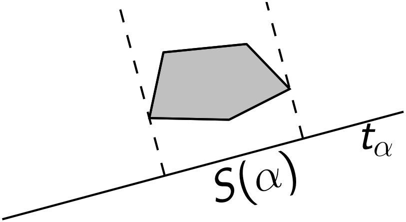
Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalai és átlói d-nél rövidebbek, akkor $K < \pi d$.

3. feladat

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalai és átlói d-nél rövidebbek, akkor $K < \pi d$.

$S(\alpha)$ mindig oldal vagy átló vetülete



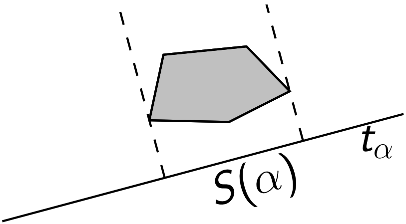
3. feladat

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalai és átlói d-nél rövidebbek, akkor $K < \pi d$.

$S(\alpha)$ mindig oldal vagy átló vetülete

$\Rightarrow \forall\alpha : \; S(\alpha) < d$



3. feladat

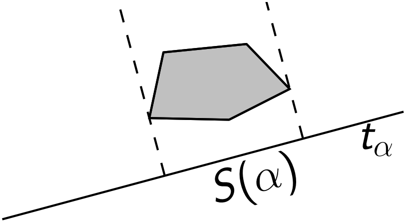
Feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalai és átlói d-nél rövidebbek, akkor $K < \pi d$.

$S(\alpha)$ mindig oldal vagy átló vetülete

$\Rightarrow \forall\alpha : S(\alpha) < d$

$\Rightarrow A(S) < d$



3. feladat

Feladat

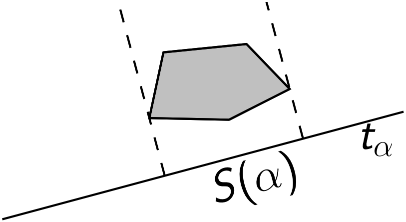
Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalai és átlói d-nél rövidebbek, akkor $K < \pi d$.

$S(\alpha)$ mindig oldal vagy átló vetülete

$\Rightarrow \forall\alpha : S(\alpha) < d$

$\Rightarrow A(S) < d$

$\Rightarrow K = \pi \cdot A(S) < \pi d$



Forrás

Jurij Ionin, Alexander Plotkin
The mean value of a function
Quantum, 1995. november–december

Készítők

Biri Eszter Daniela
Czövek Márton
Forrás Bence
Katona Máté
Nguyen Uyen My
Simon Péter

Segítőtanár: Erben Péter