

## Páros gráfok

1. Párosak-e a következő gráfok? (1. ábra)
2. Bizonyítsd be, hogy bármely  $e$  élű gráf tartalmaz  $e/2$  élű páros gráfot.
3. Van-e a következő gráfokban teljes párosítás? (2. ábra)
4. Egy 52 lapos franciakártya csomagot valaki tizenhárom négylapos kupacra osztott. Mutasd meg, hogy ekkor kiválasztható minden négyesből 1-1 lap, hogy mindegyiken különböző figura illetve szám álljon.
5. Mutasd meg, hogy  $r$ -reguláris páros gráfban van teljes párosítás. (Egy  $G$  gráf  $r$  reguláris, ha minden csúcsának foka  $r$ .)
6. Bizonyítsd be, hogy egy  $r$  reguláris páros gráf élei megszínezhetők  $r$  színnel úgy, hogy minden csúcshoz  $r$  különböző színű él tartozzon.
7. Leteszünk egy  $8 \times 8$ -as sakktáblára 32 bástyát úgy, hogy minden sorban és oszlopban 4 bástya legyen. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható közülük 16 úgy, hogy minden sorban és oszlopban pontosan 2 legyen.
8. BBH: Minden páros gráfban létezik olyan párosítás, ami fedi az összes maximális fokú pontot.
9. Legyen  $P = \{p_1, \dots, p_{2005}\}$  2005 különböző prímet tartalmazó halmaz.  $A$  az a halmaz, ami a  $P$  1002 eleméből képzett szorzatokat tartalmazza, és  $B$  az a halmaz, ami a  $P$  1003 eleméből képzett szorzatokat tartalmazza. BBH: Ekkor létezik egy  $f$  egy-egy értelmű megfeleltetés  $A$  és  $B$  között, hogy  $A$  minden  $a$  elemére  $a|f(a)$ .
10. Legyen  $A$  az  $\{1, 2, \dots, 2k+1\}$  halmaz  $k$ -elemű részhalmazainak halmaza. Mutasd meg, hogy ekkor létezik olyan  $f : A \rightarrow A$  bijekció, hogy minden  $H \in A$ -ra  $H$  diszjunkt  $f(H)$ -től.
11. Legyen  $m > n$ . Egy  $n$  sorból és  $m$  oszlopból álló táblázat minden oszlopában van egy kavics. BBH: Kiválaszthatunk egy kavicsot, hogy a hozzá tartozó sorban több kavics van, mint a hozzá tartozó oszlopban.
12. Egy  $n \times n$ -es táblázatot kitöltünk nemnegatív számokkal úgy, hogy minden sorban és oszlopban a számok összege 1. Bizonyítsd be, hogy kiválaszthatunk  $n$  számot közülük, hogy mind különböző sorban és oszlopban vannak, és a szorzatuk nem 0.
13.  $a, n$  pozitív egészek,  $a > (n-1)!$ . BBH: Léteznek páronként különböző prímek:  $p_1, \dots, p_n$ , hogy  $p_i | a + i$  ( $i = 1, \dots, n$ )
14. Tüttel tétel: Egy  $G(V, E)$  gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, ha  $G$  tetszőleges  $H$  részgráfját elhagyva a megmaradt gráfban a páratlan csúcsszámú komponensek száma legfeljebb  $|H|$ .