Páros gráfok

1. Párosak-e a következő gráfok? (1. ábra)
2. Bizonyítsd be, hogy bármely e élű gráf tartalmaz $e/2$ élű páros gráfot.
3. Van-e a következő gráfokban teljes párosítás? (2. ábra)
4. Egy 52 lapos franciakártya csomagot valaki tizenhárom négylapos kupacra osztott.Mutasd meg, hogy ekkor kiválasztható minden négyesből 1-1 lap, hogy mindegyiken különböző figura illetve szám álljon.
5. Mutasd meg, hogy r-reguláris páros gráfban van teljes párosítás. (Egy G gráf r reguláris, ha minden csúcsának foka r.)
6. Bizonyítsd be, hogy egy r reguláris páros gráf élei megszínezhetők r színnel úgy, hogy minden csúcshoz r különböző színű él tartozzon.
7. Leteszünk egy 8x8-as sakktáblára 32 bástyát úgy, hogy minden sorban és oszlopban 4 bástya legyen. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható közülük 16 úgy, hogy minden sorban és oszlopban pontosan 2 legyen.
8. BBH: Minden páros gráfban létezik olyan párosítás, ami fedi az összes maximális fokú pontot.
9. Legyen $P = \{p_1, ..., p_{2005}\}$ 2005 különböző prímet tartalmazó halmaz. A az a halmaz, ami a P 1002 eleméből képzett szorzatokat tartalmazza, és B az a halmaz, ami a P 1003 eleméből képzett szorzatokat tartalmazza. BBH: Ekkor létezik egy f egy-egy értelmű megfeleltetés A és B között, hogy A minden a elemére $a|f(a)$.
10. Legyen A az $\{1, 2, ..., 2k+1\}$ halmaz k-elemű részhalmazainak halmaza. Mutasd meg, hogy ekkor létezik olyan $f : A \to A$ bijekció, hogy minden $H \in A$-ra H diszjunkt $f(H)$-tól.
11. Legyen $m >$n. Egy n sorból és m oszlopból álló táblázat minden oszlopában van egy kavics. BBH: Kiválaszthatunk egy kavicsot, hogy a hozzá tartozó sorban több kavics van, mint a hozzá tartozó oszlopban.
12. Egy $n \times n$-es táblázatot kitöltünk nemnegatív számokkal úgy, hogy minden sorban és oszlopban a számok összege 1. Bizonyítsd be, hogy kiválaszthatunk n számot közülük, hogy mind különböző sorban és oszlopban vannak, és a szorzatuk nem 0.
13. a, n pozitív egészek, $a > (n-1)!$. BBH: Léteznek páronként különböző prímek: p_1,...,p_n, hogy $p_i|a+i$ $(i = 1, ..., n)$
14. Tuttel tétel: Egy $G(V, E)$ gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, ha G tetszőleges H részgráfját elhagyva a megmaradt gráfban a páratlan csúcsszámú kopmonensek száma legfeljebb $|H|$.