Erben Péter: Gengszterek és szélmalmok

Az indítólökést a 2011-es Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2. feladata adta:

> Legyen S a sík pontjainak egy véges, legalább kételemű halmaza. Feltesszük, hogy az S halmaz semelyik három pontja sincs egy egyenesen. Egy szélmalomnak nevezett folyamat során kiindulunk egy egyenesből, amely az S halmaznak pontosan egy P pontját tartalmazza. Az egyenes a P forgástengely körül az óramutató járásával megegyező irányban forog addig, amíg először nem találkozik egy másik, S halmazba tartozó ponttal. Ekkor ez a Q pont lesz az új forgástengely, és az egyenes a Q pont körül forog tovább az óramutató járásával megegyező irányban egészen addig, míg újra nem találkozik egy S halmazba tartozó ponttal. Ez a folyamat vég nélkül folytatódik.
>
> Bizonyítsuk be, hogy megválaszthatjuk a $P \in S$ pontot és a P-n átmenő egyenest úgy, hogy az S halmaz minden pontja végtelen sokszor legyen a szélmalom forgástengelye.

Meglepő módon az 564 versenyző közül csupán 22 adott teljes megoldást erre a problémára, annak ellenére, hogy csak elemi eszközök szükségesek a megoldáshoz. Egy évvel később a 2012-es eredményeket tárgyalták meg versenyzők a `Mathlinks` fórumon, és az egyik hozzászóló azt állította, hogy a kombinatorikus geometria hagyományosan erős Magyarországon, vagyis a magyar csapat teljesítménye attól is függ, bekerül-e ilyen témájú példa a feladatsorba. 2011-re visszatekintve ez sajnos nem volt igaz, a magyar versenyzők egyike sem szerepel a fent említett 22 sikeres megoldó között.

A következő feladatsorok abból a célból születtek, hogy körbejárjanak néhány tipikus módszert, amelyek jól használhatók kombinatorikus geometriai feladatok megoldásához. A tematikus feladatsorok összeállítása mellett az is célom volt, hogy picit utánanézzek a világszerte ismert „magyar kombinatorikus geometria iskola” történetének, illetve az, hogy összegyűjtsem a témakör középiskolai matematika oktatásban használható problémáit. Lovász László egy lebilincselő előadásban mutatta be a Vándorgyűlésen, hogy milyen „kincseket” rejt ez a terület.

További inspirációt adott Surányi László „Triviális?” című előadása, amely a 2010-es KöMaL ankéton hangzott el. Szerettem volna megközelíteni a Surányi Tanár úr által megfogalmazott ideált, miszerint egy téma tanulásakor a képletek és tételek memorizálásánál fontosabb a terület tipikus gondolkodásmódjának megértése és átérzése.

Szerencsére nem kellett nulláról kezdenem a munkát. Erdős Gábor már írt egy kiváló összefoglaló cikket a valaha létezett kőszegi matektáborban tartott foglalkozásaiból. Jelen jegyzet elkészítésénél az Erdős Gábor által készített tematikát vettem alapul, azt próbáltam tágítani, illetve a feladatanyagát bővíteni.

A Vándorgyűléshez kapcsolódóan megírandó dolgozatban az első szakasz megoldásait közlöm. Terveim szerint a további sorok kidolgozásával az idei berzsenyis matektáborra készülök el, valamikor október közepére.

Feladatsorok

1. feladatsor – Konstrukciók szabályos háromszögekkel

1.1 Az $ABCD$ egységnégyzet AB oldalára kifelé megrajzoltuk az ABE szabályos háromszöget. Mekkora a CDE köréírt körének sugara?

1.2 Három r sugarú kör átmegy a H ponton. H-tól különböző metszéspontjaik A, B és C. Bizonyítandó, hogy az ABC háromszög köréírt körének sugara is r.

1.3 Bálint kijelöl egy pontot a rajzlapján, majd megkérdi húgát:

– Milyenre színezzem, Piroska?

– Pirosra! - feleli a lány.

Ezután Bálint új pontokat tűz ki. Minden pont után Piroska dönti el, kék legyen vagy piros.

a) Kaphat-e Bálint olyan szabályos háromszöget, melynek minden csúcsa azonos színű, ha ezt Piroska nem akarja?

b) Mi a helyzet akkor, ha Bálint előre kijelöl valahány pontot s ezután jön húga a színes ceruzákkal?

1.4 50 gengszter egyszerre lő a hozzá legközelebbire (ha több legközelebbi van, akkor az egyikre). Minden lövés célba talál és halálos.

a) Legfeljebb hány gengszter maradhat életben?

b) Hány gengszter maradhat életben?

1.5 a) Sík pontjait két színnel színeztük. Bizonyítsuk be, hogy lesz két azonos színű pont, amelyek egységnyi távolságra vannak egymástól.

b) Bizonyítsuk be az előző állítást abban az esetben is, ha három színnel színezünk.

c) Színezzük ki a sík pontjait hét színnel úgy, hogy bármely egységnyi hosszúságú szakasz végpontjai különböző színűek legyenek.

1.6 Adott a síkon n pont. A pontpárok hosszának maximuma d. Ha az adott pontok közül kettőnek d a távolsága, akkor az általuk meghatározott szakaszt *átmérő*nek hívjuk. Legfeljebb hány átmérője lehet a ponthalmaznak?

1.7 Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges m természetes számra létezik a síkban nemüres véges S ponthalmaz, hogy bármely S-beli A ponttól pontosan m S-beli pont esik egységnyi távolságra.

1.8 Legyen E az ABC egyenlő oldalú háromszög oldalain lévő pontok halmaza. Igaz-e hogy bárhogy bontjuk E-t két diszjunkt részhalmazra, a halmazok egyikében lesz derékszögű háromszög?

1.9 Mutassuk meg, hogy (a) elhelyezhető véges sok kör a síkon úgy, hogy bármelyik 5 másikat érint kívülről, de (b) az öt nem cserélhető hatra az előző állításban.

2. feladatsor – Söprő egyenes, söprő kör

2.1 Egy körvonalon adott 2000 pont. Bizonyítsuk be, hogy van olyan átmérő, melynek mindkét oldalára 1000 pont esik a megadottak közül.

2.2 Egy kört felosztottunk $3k$ körívre, melyek közül k egységhosszú, k-nak 2, k-nak pedig 3 egység a hossza. Bizonyítandó, hogy a $3k$ ív-végpont között van kettő, amelyek egy átmérő végpontjai.

2.3 Adott 4000 általános helyzetű pont a síkon (nem esik három egy egyenesre). Mutassuk meg, hogy megadható 1000 diszjunkt négyszög a síkon, amelyek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

2.4 Adott 5000 általános helyzetű pont a síkon (nem esik három egy egyenesre). Mutassuk meg, hogy megadható 1000 diszjunkt konvex négyszög a síkon, amelyek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

2.5 Adott a síkon 22 általános helyzetű pont. Bizonyítsuk be, hogy párokba oszthatók úgy, hogy a párokat összekötő szakaszoknak legfeljebb 5 metszéspontja legyen.

2.6 Adott a síkon 1000 piros és 1000 kék pont, általános helyzetben. Lehet-e párosítani őket úgy, hogy az összekötő szakaszoknak ne legyen metszéspontja?

2.7 Legyen S a sík pontjainak egy véges, legalább kételemű halmaza. Feltesszük, hogy az S halmaz semelyik három pontja sincs egy egyenesen. Egy szélmalomnak nevezett folyamat során kiindulunk egy egyenesből, amely az S halmaznak pontosan egy P pontját tartalmazza. Az egyenes a P forgástengely körül az óramutató járásával megegyező irányban forog addig, amíg először nem találkozik egy másik, S halmazba tartozó ponttal. Ekkor ez a Q pont lesz az új forgástengely, és az egyenes a Q pont körül forog tovább az óramutató járásával megegyező irányban egészen addig, míg újra nem találkozik egy S halmazba tartozó ponttal. Ez a folyamat vég nélkül folytatódik.

Bizonyítsuk be, hogy megválaszthatjuk a $P \in S$ pontot és a P-n átmenő egyenest úgy, hogy az S halmaz minden pontja végtelen sokszor legyen a szélmalom forgástengelye.

2.8 Adott a síkon 5000 általános helyzetű pont (semelyik három nincs egy egyenesen). Van-e olyan kör, amelyik az adott pontok közül pontosan 1994 darabot tartalmaz a belsejében vagy a határán?

2.9 Adott $2n + 3$ pont a síkon. Nincs három egy egyenesen és nincs 4 egy körön. Bizonyítsuk be, hogy létezik kör: ami pont 3 ponton megy át és n pont van belül, n pont van kívül.

2.10 Adott egy 2011 csúcsú konvex sokszög úgy, hogy semelyik négy csúcs sem esik egy körre. A csúcsokból kiválasztható ponthármasokra megrajzoljuk a rájuk illeszkedő kört. Egy ilyen kör sovány, ha a sokszögnek van olyan csúcsa, amely kívül van a körön, ellenkező esetben a kör kövér. Sovány vagy kövér körből van több?

2.11 Adott egy n-csúcsú konvex sokszög, melynek semelyik négy csúcsa nem esik egy körre. A csúcsokból kiválasztható ponthármasokra megrajzoljuk a rájuk illeszkedő kört. Egy ilyen kör sovány, ha a sokszög csúcsai (kivéve a háromszög csúcsait) a körön kívül fekszenek, illetve kövér, ha a sokszög összes csúcsa a zárt körlemezre esik. A kövér vagy a sovány körökből van-e több?

3. feladatsor – Vegyük a legkisebbet/legnagyobbat!

3.1 Egy egyenesen úgy vettünk fel pontokat, hogy bármelyik felvett pont középpontja egy olyan szakasznak, amelynek végpontjai is halmazbeli pontok. Igazoljuk, hogy végtelen sok pontot vettünk fel.

3.2 A síkon úgy vettünk fel pontokat, hogy bármelyik felvett pont középpontja egy olyan szakasznak, amelynek végpontjai is halmazbeli pontok. Igazoljuk, hogy végtelen sok pontot vettünk fel.

3.3 Néhány általános helyzetű pont adott a síkon. Mutassuk meg, hogy van olyan kör, ami az adott pontok közül hármat tartalmaz határán, és a belsejébe nem esik pont az adottak közül.

3.4 Adott $n \geq 3$ egyenes a síkon, melyek között nincs párhuzamos és nem megy át három egy ponton. Az egyenesek tartományokra osztják a síkot. Bizonyítandó, hogy minden egyenes határos legalább egy háromszög alakú tartománnyal.

3.5 Adott $n \geq 3$ nem párhuzamos egyenes. Bármely kettő metszéspontján átmegy még egy harmadik is. Mutassuk meg, hogy az összes egyenes egy ponton megy át.

3.6 Adott $n \geq 3$ pont a síkon. Bármely kettő összekötő egyenesén rajta van még egy harmadik pont is. Mutassuk meg, hogy az összes pont egy egyenesen van.

3.7 Sylvester-Gallai-Kelly: Adott n nem egy egyenesen lévő pon. Bizonyítsuk be, hogy létezik egyenes, ami pontosan kettőt tartalmaz.

3.8 Adott $n \geq 3$ nem egy egyenesen lévő pont. Igazoljuk, hogy a legalább kettőn átmenő egyenesek száma legalább n.

4. feladatsor – Konvexitás, konvex burok

4.1 Hány általános helyzetű pontból lehet biztosan kiválasztani négyet úgy, hogy azok egy konvex négyszöget határozzanak meg?

4.2 Adott a síkban $n > 4$ pont, közülük semelyik három nem esik egy egyenesre. Bizonyítandó, hogy legalább $\binom{n-3}{2}$ olyan konvex négyszög van, amelyek csúcsai az adott pontok közül valók.

4.3 Adott 5 általános helyzetű pont a síkon. Mutassuk meg, hogy az általuk meghatározott 10 háromszögből legfeljebb 7 hegyesszögű.

4.4 Adott n általános helyzetű pont a síkon. Mutassuk meg, hogy az általuk meghatározott háromszögek legfeljebb 70%-a hegyesszögű.

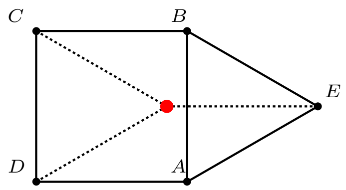
4.5 Adott a síkon 998 piros pont, semelyik három nincs egy egyenesen. Ezekhez úgy jelölünk ki kék pontokat, hogy minden olyan háromszög belsejében, amelynek csúcsai piros pontok, legyen kék pont. Melyik az a k pozitív egész, amire teljesül, hogy k pont felhasználásával mindig meg lehet ezt tenni, de $k-1$ pont nem elég, ahhoz van a pirosok olyan elrendezése, amire nem megy.

4.6 Adott a síkon véges sok pont, melyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk, hogy kiszínezhetők két színnel úgy, hogy ne legyen olyan félsík, ami pont hármat tartalmaz, és azok egyszínűek.

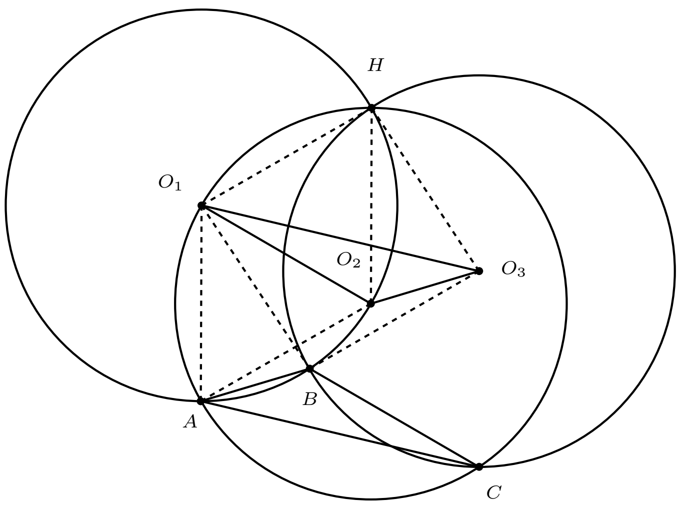
4.7 Tekintsük a szabályos n-szög csúcsai által meghatározott háromszögeket. Mennyi lehet n, ha a háromszögek között ugyanannyi hegyesszögű van, mint tompaszögű?

Megoldások

1.1 Az ABE háromszöget a $\overrightarrow{BC}$ vektorral eltolva megkapjuk a köréírt kör középpontját. E kör sugara is egységnyi.



1.2 Jelöljük a körök középpontját – az ábrán látható módon – O_1, O_2, O_3-mal. A H pont r távolságra van a középpontok mindegyikétől, vagyis $O_1O_2O_3$ köréírt körének sugara r. Most megmutatjuk, hogy ABC egybevágó O_1, O_2, O_3-mal.

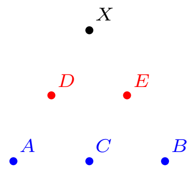


A szaggatottan jelölt szakaszok mindegyikének hossza r, ezért O_1HO_2A és O_1HO_3B rombusz. Innen $O_1B||HO_3$ és $O_1A||HO_2$, vagyis $AO_1B\sphericalangle = O_2HO_3\sphericalangle$, tehát $AO_1B_\triangle$ és $O_2HO_{3\triangle}$ egybevágó. Ebből $AB = O_2O_3$. A másik két oldalpár egyenlősége hasonló módon megkapható.

1.3 Az a) és b) részt egyszerre bizonyítjuk. Megmutatjuk, hogy akkor is biztosan létrejön azonos színű csúcsokkal szabályos háromszög, ha Bálintnak előre kell megrajzolnia a pontokat. Ebből nyilván következik a) megoldása, mert a b)-ben megadott elrendezés itt is működik.

I.

Először egy speciális esetet nézünk: *Ha egy szakasz két végpontjának és felezőpontjának színe azonos, akkor további három ponttal „kikényszeríthető” azonos színű csúcsokkal rendelkező szabályos háromszög.*



Legyen az említett szakasz – mondjuk AB – mindkét végpontja és felezőpontja kék. Ekkor D és E (az ACD és CBE szabályos háromszögek miatt) piros, vagy ha valamelyik kék, akkor kész is vagyunk. Legyen tehát D és E piros. Ekkor az X pont bármelyik színezése létrehoz megfelelő háromszöget: vagy ABX lesz kék, vagy DEX piros.

A megoldás második részében azt mutatjuk meg, hogy megadható véges sok pont, amelyek tetszőleges színezése esetén létrejön az előző állításban szereplő alakzat: egy szakasz és középpontja azonosan színezve.

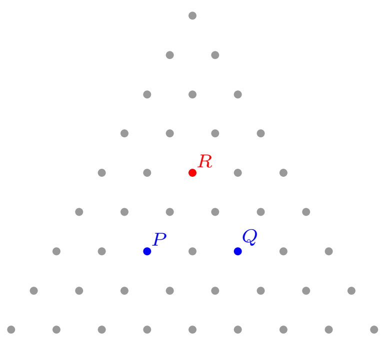
II.

Három tetszőlegesen színezett pont közül van két azonos színű, ezért átmenetileg feltesszük, hogy P és Q kék. Ekkor az ábrán látható további három pont felvétele már garantálja megfelelő ponthármas előfordulását.

Ha X kék, akkor P, Q, X jó. Ha Y kék, akkor PQY jó. Ha Z kék, akkor PQZ jó. Végül ha X, Y és Z is piros, akkor ez a három pont megfelelő.

III.

A bizonyítás befejezésénél már csak arra kell vigyáznunk, hogy Bálint előre rajzolja meg a pontokat, mielőtt Piroska színezni kezdene. Tehát Bálint nem tudja kiválasztani, melyik hármasra kell koncentrálnia. Annyi csupán a teendője, hogy az I. és II. alapján szóba jöhető *összes* pontot megrajzolja. Az alábbi ábra egy lehetséges megoldást mutat. (Az ábrán vagy PQ vagy PR vagy RQ egyenesén létrejön az I.-ben megadott tulajdonságú ponthármas, és minden lehetséges hármas „fölé” megrajzoltuk az I.-ben szükséges további három pontot. Az egyszerűség kedvéért a háromszögrács részlet minden rácspontját berajzoltuk.)



1.4 Mivel minden lövés halálos, és mind az 50 gengszter lő, ezért akkor lehet 50-nél kevesebb a halálos áldozatok száma, ha többen ugyanarra az emberre lőnek. Az első kérdés tehát az, hogy egy gengsztert legfeljebb hány halálos lövés érhet. Rövid próbálgatás után megsejthetjük a következőt:

I.

Egy gengsztert legfeljebb hat halálos lövés érhet.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy van olyan ember, akit legalább hét halálos lövés ért. Ha az áldozatot A, gyilkosait $L_1, L_2, \dots, L_i, \dots$ jelöli, akkor lesz olyan i és j index, hogy $L_iAL_j\sphericalangle < 60°$. Ez pedig ellentmondás, mert így L_i-nél, vagy L_j-nél $60°$-nál nagyobb szög lesz az L_iAL_j háromszögben, amiből – a megfelelő szakaszt választva – az következik, hogy L_iL_j rövidebb L_iA-nál (vagy L_jA-nál), és ekkor L_i (illetve L_j) nem A-ra lőtt volna, hiszen L_j (illetve L_i) közelebb van hozzá. (A háromszögben nagyobb szöggel szemközt hosszabb oldal van.)

Könnyen ellenőrizhető, hogy az ellentmondás akkor is fennáll, ha A, L_i és L_j kollineáris.

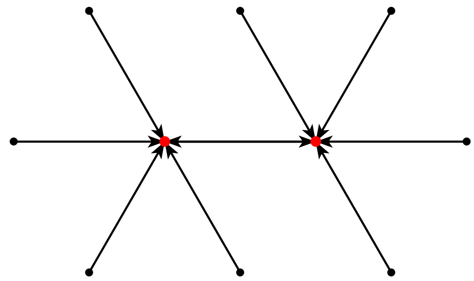
Jegyezzük meg, hogy a maximális hat találat is csak egyetlen esetben valósul meg, ha A egy szabályos hatszög középpontja, $L_1, \dots, L_6$ pedig a hatszög csúcsai. Minden más esetben létrejön az előbb mutatott ellentmondás.

II.

Az előző szakaszban talált „hatos” elrendezést tovább vizsgálva az alábbi észrevételt tehetjük:

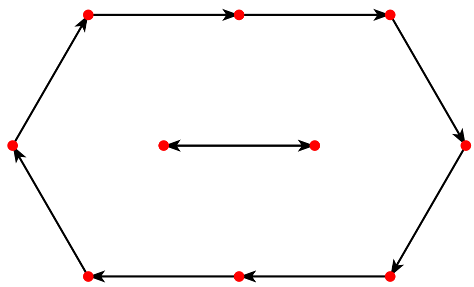
Ha tíz gengszter párbajozik a fenti szabályok szerint, akkor legalább kettő meghal.

Adunk egy elrendezést, ahol pontosan két áldozat van:



Az pedig világos, hogy legalább két halott lesz, hiszen minden lövés halálos, tehát lesz legalább egy A áldozat, és ő is lelőtt valakit, mondjuk B-t.

Az előbbi ábrát tovább variálva könnyen mutatható példa $3, 4, \dots, 10$ áldozatra. Példa 10 áldozatra:



III.

Most visszatérünk az eredeti problémához. Az eddigi megfigyeléseket használva adódik a következő:

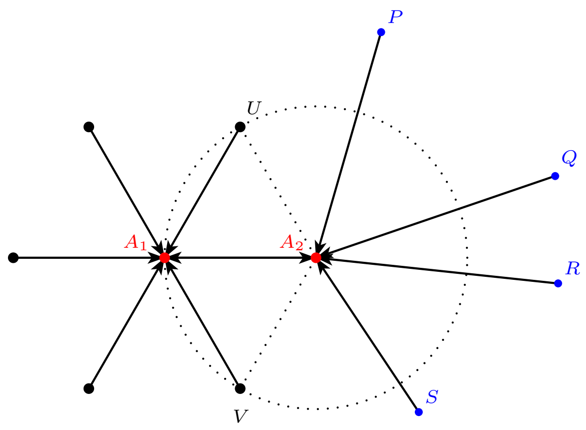
50 gengszter esetén előfordulhat $10, 11, 12, \dots, 50$ *áldozat.*

Bizonyítás: A gengsztereket 5 tízes csoportra osztjuk, és a csoportokat egymástól „jó messze” rendezzük el. II. alapján minden csoportban – egymástól függetlenül – előfordulhat $2, 3, \dots, 10$ áldozat.

IV.

Végül megmutatjuk, hogy *50 gengszter esetén legalább 10 áldozat lesz.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy legfeljebb 9 gengszter hal meg, legyenek ők $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \leq 9)$. Az 50 halálos lövést legfeljebb 9 felé osztva $50/9 > 5$ miatt lesz olyan áldozat, aki legalább (és így pontosan) hat lövést kapott. Legyen egy ilyen áldozat A_1. Ekkor az A_1 által lelőtt A_2 csak azon hat gengszter valamelyike lehet, akik lelőtték A_1-et.



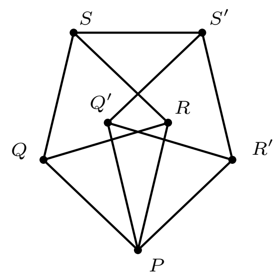
A_2-t (A_1-en kívül) legfeljebb hárman lőhették le. Ugyanis ha legalább négyen lőttek volna rá (P, Q, R, S), akkor ezek a pontok az UA_2V konkáv szögtartományba kell essenek, így az $UA_2P\sphericalangle$, $PA_2Q\sphericalangle$, $QA_2R\sphericalangle$, $RA_2S\sphericalangle$, $SA_2V\sphericalangle$, szögek valamelyike $60°$-nál kisebb, és így a II.-ben látott ellentmondáshoz jutnánk.

Tehát a feltételezett áldozatok közül kettőt (A_1 és A_2) összesen 10 találat ért. Ha most elhagyjuk A_1-et és A_2-t, akkor legfeljebb hét áldozatunk maradt, akikre 40 lövés jut. $40/7 > 5$, tehát elismételhetjük az előző gondolatot. Ezután marad legfeljebb 5 áldozat és 30 lövés. $30/5 = 6$, ami lehetetlen, mert az előbb láttuk, hogy ha valakit hat lövés ért, akkor az ő áldozatát legfeljebb négy, vagyis nem lehet hat az átlag.

Tehát beláttuk, hogy 50 gengszter esetén az áldozatok száma $10, 11, 12, \ldots, 50$ lehet.

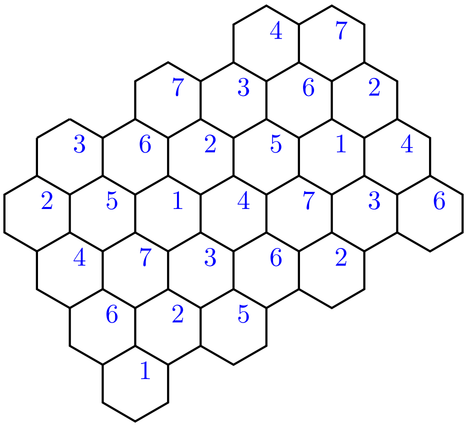
1.5 a) Tetszőleges egység oldalhosszúságú szabályos háromszög három csúcsa közül valamelyik kettő azonos színű.

b) Az ábrán látható hét pont között biztosan lesz kettő, amelyek azonos színűek és távolságuk egységnyi. A PQR és a PQS egységnyi oldalú szabályos háromszögek. A $PRSQ$ rombuszt úgy forgattuk el P körül a $PR'S'Q'$ helyzetbe, hogy az SS' szakasz hossza is egységnyi legyen.

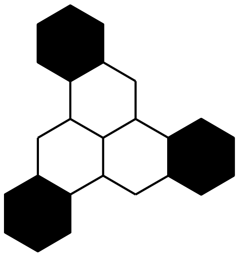


Most tegyük fel, hogy kiszíneztük a síkot három színnel úgy, hogy az egységszakaszok végpontjai különböző színűek. Ekkor a P, Q, R pontok különböző színűek, hasonlóan a Q, R, S pontok is, tehát P és S színe azonos. Hasonlóan P és S' színe is azonos kell legyen, és ezzel ellentmondásra jutottunk, hiszen S és S' színe is megegyezik P színével, és az SS' szakasz egységnyi.

c) Csempézzük a síkot szabályos hatszögekkel, amelyek átmérője d hosszú. Színezzük a hatszögek belsejét az ábra szerint, a hatszögek határvonalának pontjai pedig vegyék fel valamelyik őket érintő hatszög belsejének színét. Ahhoz, hogy ez a színezés jó legyen, szükséges, hogy egy hatszög ne legyen túl nagy, de az azonos színű hatszögek elég távol legyenek egymástól.



Az első feltételt egyszerű teljesíteni: legyen $d < 1$. A második feltétel akkor lesz igaz, ha az alábbi ábrán a fekete hatszögek elég messze kerülnek egymástól.



Ha $d > 2/\sqrt{7}$, akkor a fekete hatszögek távolsága több, mint egy, így $2/\sqrt{7} < d < 1$ esetén színezésünk megfelelő: nem lesznek azonos színű pontok egymástól egységnyi távolságra.

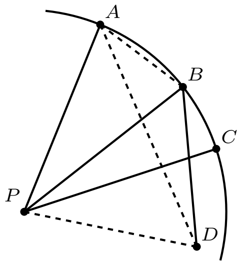
1.6 Az adott pontokon definiálunk egy gráfot: azon pontok között megy él, amelyek egy átmérő végpontjai. A lerajzolt gráf geometriájára vonatkozóan ez azt jelenti, hogy minden él egyenlő hosszú, és az éllel nem összekötött pontok távolsága az átmérőnél kisebb. Először egy speciális esetet nézünk meg.

I.

Ha egy n-csúcsú gráfban minden csúcs foka legfeljebb 2, akkor legfeljebb n éle van, hiszen az élek száma a fokszámok összegének fele. (Egy él a két végpontjánál kerül megszámolásra a fokszám-összegben.)

II.

Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 3$ esetén az állítás nyilvánvaló, hiszen egy pont csak két másikkal lehet összekötve. Most legyen $n > 3$ és tegyük fel, hogy van legalább harmadfokú csúcs (mondjuk P). (Ellenkező esetben I. alapján kész vagyunk.) A P végű átmérők másik végpontjai egy P középpontú, d sugarú köríven vannak. Legyen ezen végpontok közül három A, B és C, valamelyik körüljárás szerint ebben a sorrendben. Be fogjuk látni, hogy B elsőfokú. Ez elég az indukciós lépéshez, hiszen a B pontot elhagyva, a maradék $n-1$ pontra már alkalmazható az indukciós feltevés (és feltevésünk alapján a B elhagyásával kapott rendszernek ugyanakkora az átmérője).



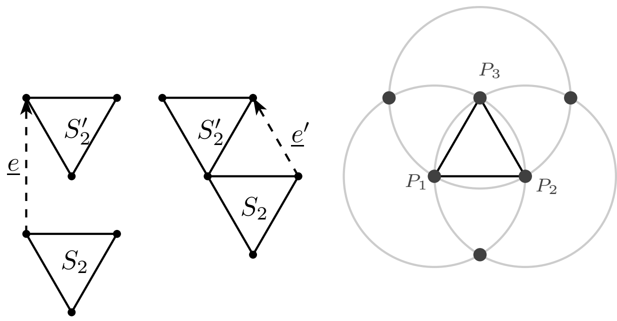
A B fokszámára vonatkozó állítást indirekt bizonyítjuk, feltesszük, hogy P-n kívül még egy D ponttal is átmérő köti össze B-t. Hol lehet B? Nyilván csak a körön belül, különben $PB > d$

teljesülne, ami nem lehet, az átmérő definíciója miatt. Vegyük észre azt is, hogy $APC\sphericalangle \leq 60°$, mert különben $AC > d$ teljesülne. Így D nem lehet az APC konvex szögtartományban, mert akkor $DB < d$ lenne. Maradt tehát az a lehetőség, hogy D a körön belül van, és BD metszi az AP és CP sugarak valamelyikét. Tegyük fel, hogy CP-t.

Ekkor $ABDP$ konvex négyszög, így a háromszög-egyenlőtlenség miatt átló hosszának összege több, bármelyik két szemközti oldala hosszának összegénél: $AP + BD < AD + BP \Leftrightarrow d + d < AD + d$, tehát $d < AD$, ellentmondásra jutottunk. Marad az a lehetőség, hogy B elsőfokú, és így működik az indukció.

1.7 $m = 1$ esetén egy egységszakasz két végpontja megfelelő; $m = 2$ esetén pedig egy egységnyi oldalú szabályos háromszög három csúcsa. Adunk egy konstrukciót, ami az m esetén jó S_m halmazból előállítja az $m + 1$ esetén megfelelő S_{m+1} halmazt.

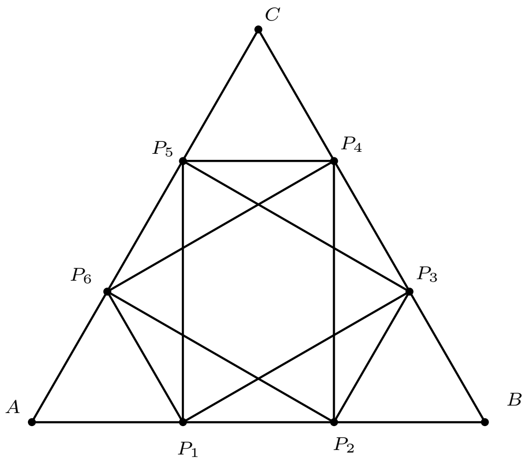
Legyen $\underline{e}$ egy alkalmasan megválasztott egységvektor, és S'_m álljon az S_m pontjainak $\underline{e}$-vel való eltoltjaiból. Azt állítjuk, hogy $\underline{e}$ megválasztható úgy, hogy $S_{m+1} = S_m \cup S'_m$ megfelelő.



Két esetben „rossz” az eltolás: a) akkor, ha egy pont eltoltja egybeesik egy másik ponttal; illetve b) akkor, ha egy pont eltoltja egynél több eredeti ponttól van egységnyi távolságra. Mindkét „rossz” helyzet esetén az új pont rajta van legalább két régi pont körüli egységsugarú körön.

Az eljárásunk tehát a következő lehet: az S_m pontjai $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Minden A_i körül egységsugarú kört rajzolunk, és vesszük ezen körök összes metszéspontját: $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Ha az összes $\overrightarrow{A_iP_j}$ vektort kizárjuk, akkor véges sok vektort zártunk ki, bármelyik másik $\underline{e}$ egységvektor megfelelő lesz.

1.8 Már az ábrán látható 9 pontot sem lehet két halmazra bontani úgy, hogy legalább az egyikben ne legyen derékszögű háromszög.



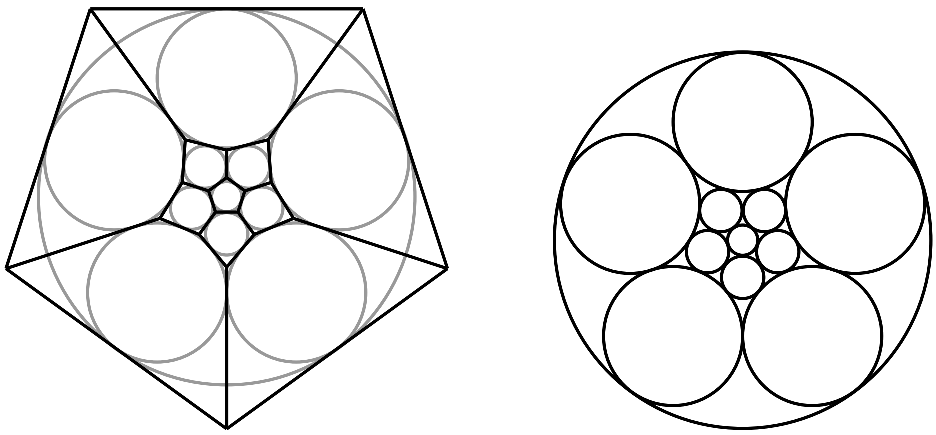
A ponthalmazokra bontást jelezzük színezéssel: piros és kék pontokról fogunk beszélni. A, B és C közül legalább kettő egyforma, legyen mondjuk A és B piros. P_1 és P_2 színezése szerint három esetet vizsgálunk:

- *P_1 és P_2 piros.* Ha el akarjuk kerülni a piros derékszögű háromszög kialakulását, akkor AP_2P_6 miatt P_6 kék, P_1BP_3 miatt P_3 kék, AP_1P_5 miatt P_5 kék. De ekkor $P_3P_5P_6$ kék derékszögű háromszög.

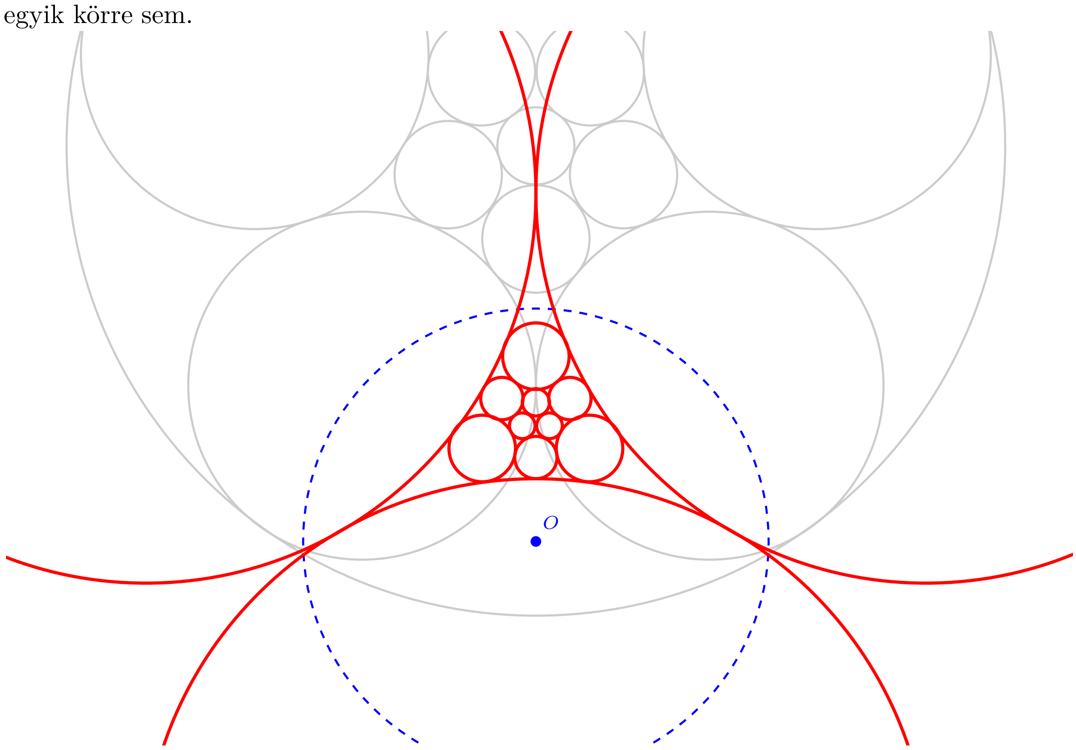
- P_1 *és* P_2 *kék.* A $P_1P_2P_5$ miatt P_5 piros, de így ABP_5 piros.
- P_1 *és* P_2 *egyike piros, a másik kék.* Legyen P_1 piros. A korábbi logika szerint így P_5 kék, emiatt P_4 piros, így viszont AP_4B piros.

Tehát igaz az eredeti állítás: bármilyen felosztás esetén lesz legalább az egyik halmazban három olyan pont, amelyek egy derékszögű háromszög csúcsai.

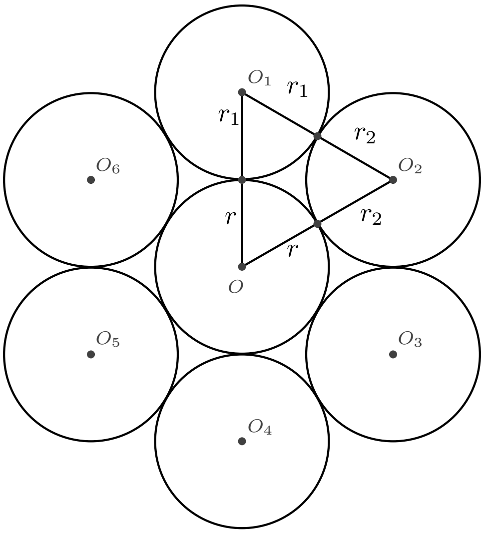
1.9 a) Lépjünk ki térbe! Olyan elrendezést keresünk, amelyben minden objektum öt másikkal érintkezik. A szabályos dodekaéder lapjai pont ilyenek. A test lapjainak beírt körei az élfelezőpontokban érintik egymást, mindegyik pontosan öt másikat. Térben tehát már van egy jó konstrukciónk, ezt szeretnénk a síkba vetíteni. Az ilyen esetekben gyakran hasznát vehetjük a *sztereografikus projekciónak*, ami a térbeli köröket síkbeli körökbe, a térbeli egyeneseket síkbeli egyenesekbe képezi, és megtartja az érintést. Így már majdnem kész is vagyunk, csak az még a baj, hogy a körök nem kívülről érintik egymást:



Az utolsó „csel” az lesz, hogy az előbbi ábrát egy jól megválasztott pontra (az ábrán O-ra) *invertáljuk*. Az inverzió is megtartja az érintést, és a köröket körökbe viszi, mert O nem illeszkedik egyik körre sem.



b) Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan véges kör-rendszer, amelyben minden kör hat másikat érint kívülről, és először nézzük azt az esetet, ha a körök nem minden egybevágók. Legyen O a legkisebb (r) sugarú k kör középpontja, ha több ilyen is van, akkor válasszunk olyat, ami legalább egy nála nagyobb (r_1) sugarú kört is érint.



Vizsgáljuk az O_1OO_2 háromszöget! $O_1O_2 = r_1 + r_2 > r + r_2 = OO_2$ és $O_1O_2 = r_1 + r_2 \geq r + r_1 = OO_1$. A két egyenlőtlenség következménye, hogy O_1O_2 a legnagyobb (vagy az egyik legnagyobb) oldal a háromszögben, ezért a vele szemközti szög: $O_1OO_2\sphericalangle > 60°$. Hasonlóan igazolható, hogy az $O_2OO_3\sphericalangle, O_3OO_4\sphericalangle, \ldots, O_6OO_1\sphericalangle$ szögek egyike sem kisebb $60°$-nál. Ez viszont ellentmondás, mert így O-nál $360°$-nál nagyobb lenne a szögek összege.

Maradt tehát az a lehetőség, hogy az elrendezés minden köre azonos sugarú. Ekkor viszont csak az lehet, hogy a körök középpontjai egy szabályos háromszögrács rácspontjai, de így csak akkor érinthet minden kör hat másikat, ha végtelen sok körünk van.

Tehát ez az eset sem fordulhat elő, véges sok kör nem helyezkedhet úgy el a síkon, hogy mindegyik hat másikat érint kívülről.

Források

[1] Erdős Gábor *Söprő egyenes, konvex burok, állapotfüggvény, rekurzív gondolkodás*, Közös nevezőnk a matematika 2002

[2] Dobos, Hraskó, Laczkó, Surányi *Feladatok a nagyvilágból*, 2000

[3] Dobos Sándor, Orosz Gyula *Bergengóc példatár 0.*, MEK

[4] Surányi János *Matematikai versenytételek 4.*, Typotex 1998

[5] Hajnal Péter *Elemi kombinatorikai feladatok*, Polygon 1997

[6] Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikából

[7] *Mathematical problems*, Quantum 1990-2001

[8] Rosenthal *Going to extremes*, Quantum 1990 nov.

[9] Kanel, Kovaldzhi *Taking on triangles*, Quantum 2001 márc.

[10] Aigner, Ziegler *Bizonyítások a könyvből*, Typotex 2004

[11] Pach János *A Happy End probléma – A kombinatorikus geometria kezdetei*, Új matematikai mozaik, Typotex 2002

[12] Reiman István, Dobos Sándor *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák*, Typotex 2003