Szögek és az elrendezésfüggőség veszélye

Adott három különböző pont a síkon: A, B, C, és vegyünk egy ω kört, aminek középpontja B, továbbá A' és C' legyen a $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ félegyenesek metszéspontja az ω körrel, végül B' olyan tetszőleges pont a körön, amire a $BA'B'C'$ négyszög konvex. Ekkor $m(\widehat{A'B'C'})$ (a szög ívmértéke) független ω és B' választásától; ezt hívjuk a $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ által bezárt *szög mértékének*, vagy egyszerűen csak *szögnek*. Jele: $\angle ABC$. Szintén „szögnek" hívjuk a $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ félegyenesek unióját, és ezt szintén így jelöljük: $\angle ABC$.

A fenti mérték neve *radián*. Szokás még *fokban* mérni a szögeket, ahol 180° egyenlő π radián.

Aszerint mondjuk, hogy $\angle ABC$ *hegyes-, derék-, vagy tompaszög*, hogy mértéke $\pi/2$-nél (illetve 90°-nál) kisebb, egyenlő, vagy nagyobb.

Az $\angle ABC$ *belseje* azon D pontok halmaza, amelyekre $ABCD$ konvex. Azon D pontok halmaza $\angle ABC$ belsejében, melyekre $\angle ABD = \angle DBC$ (B-vel együtt) egy félegyenes, az $\angle ABC$ belső szögfelezője. Ugyanígy hívjuk az előbb említett félegyenes egyenesét. A belső szögfelezőre B-ben merőleges egyenes a külső szögfelező. Az $\angle ABC$ belső és külső szögfelezője egyben az ABC háromszög belső és külső szögfelezője B-ben.

Tények

- Az ABC háromszögben $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \pi$.
- $ABCD$ konvex négyszögre $ABCD$ akkor és csak akkor húrnégyszög ha $\angle ABC = \pi - \angle CDA$, ami akkor és csak akkor igaz, ha $\angle ABD = \angle ACD$.
- Az $ABCD$ konvex négyszögre és az ABC háromszög ω köréírt körére az AD egyenes akkor és csak akkor érinti ω-t A-ban, ha $\angle ABC = \angle DAC$.

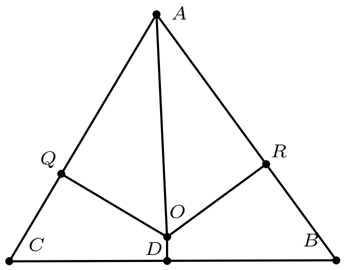
Az *Elemek*-ben minden mennyiség előjel nélküli, hiszen abban az időben nem használtak negatív számokat, sőt Euklidesz nem számokat rendelt az alakzatokhoz, inkább azonosította a szakaszt hosszával, a háromszöget területével… Ez a megközelítés elrendezésfüggővé tehet bizonyos állításokat. Gyakran nem foglalkozunk ezzel a problémával, de óvatosnak kell lenni. Illusztrációnak mutatunk egy áltételt és annak álbizonyítását. Az olvasót arra biztatjuk, hogy alkosson hasonló szemléletes álbizonyításokat!

Áltétel

Minden háromszög egyenlőszárú.

Álbizonyítás

Az $\triangle ABC$ A-beli belső szögfelezője és BC felezőmerőlegese O-ban metszi egymást. (1. ábra)



1. ábra. Az áltétel

Legyen D, Q, R az O merőleges vetülete a $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ egyeneseken. Szimmetria OD-re: $OB = OC$, szimmetria AO-ra: $AQ = AR$ és $OQ = OR$. A derékszögű $\triangle ORB$ és $\triangle OQC$ befogói: $OR = OQ$ és átfogói: $OB = OC$, tehát egybevágók, vagyis $RB = QC$. Végül

$$AB = AR + RB = AQ + QC = AC,$$

tehát $\triangle ABC$ egyenlő szárú.

Hol van a hiba a fenti bizonyításban?

Irányított szögek

Az áltételbeli probléma elkerülése érdekében célszerű előjeles szögekkel dolgozni. [1] Logikus lenne a szögeket modulo 2π számolni, de az derült ki, hogy még hasznosabb, ha modulo π dolgozunk.

Adott három különböző pont: A, B, C. Legyen $\measuredangle ABC$ *irányított szög* az előjeles ívmérték $m_{\pm}(\widehat{A'B'C'})$ modulo π.

Igen, jól olvastad. Bár az előjeles ívmérték 2π többszöröseivel való módosítástól eltekintve egyértelmű lenne, mi az irányított szögeket úgy definiáltuk, hogy csak π többszöröseivel való növeléstől eltekintve egyértelműek. Ennek az az egyik következménye, hogy két egyenes (ℓ_1 és ℓ_2) irányított szöge egyértelmű, az alábbiak alapján: Ha ℓ_1 és ℓ_2 párhuzamos, akkor irányított szögük $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) = 0$. Különben $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) = \measuredangle ABC$, ahol A az ℓ_1 pontja, de nincs rajta ℓ_2-n, B az egyenesek metszéspontja, C pedig ℓ_2 olyan pontja, ami nincs ℓ_1-en.

A félreértések elkerülése végett meg fogjuk különböztetni az „előjeles” szög (ami modulo 2π értendő), és az „irányított” szög (ami modulo π értendő) kifejezéseket.

A következő – „irányított szögek aritmetikájára” vonatkozó – állítások egyszerűen bizonyíthatók. Mindegyik állítás elrendezés független!

Tények

A, B, C, D, O, P különböző pontok a síkon.

1. $\measuredangle ABC = -\measuredangle CBA$.
2. $\measuredangle APB + \measuredangle BPC = \measuredangle APC$.
3. $\measuredangle ABC = \measuredangle ABD$ akkor és csak akkor, ha B, C, D egy egyenesen van. Speciálisan $\measuredangle ABC = 0$ akkor és csak akkor, ha A, B, C egy egyenesen van.
4. $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$ akkor és csak akkor, ha A, B, C, D egy körön van.
5. $\measuredangle ABC = \measuredangle ACD$ akkor és csak akkor, ha CD érinti az A, B, C pontokon átmenő kört.
6. $\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 0$.
7. $2\measuredangle ABC = \measuredangle AOC$ ha A, B, C egy O középpontú körön van.
8. $\measuredangle ABC$ fele az $\widehat{AC}$ ív mértékének, ahol az ív az ABC köréírt körének íve.

Például, ha A, B, C, D egy körön vannak ebben a sorrendben, akkor $\angle ABD = \angle ACD$, mint irányítatlan szögek. Másrészt ha sorrendjük A, B, D, C, akkor $\angle ABD = \pi - \angle DCA$, így irányított szögeket használva

$$\measuredangle ABD = \pi - \measuredangle DCA = -\measuredangle DCA = \measuredangle ACD.$$

Jegyezzük meg, hogy ez az elsődleges oka annak, hogy modulo π dolgozunk, és nem modulo 2π!

(A másik ok, hogy a kollineáris pontok által alkotott irányított szög mindig 0.)

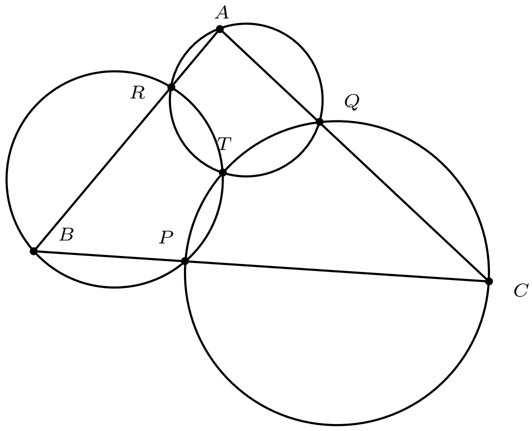
A 7. és 8. tény láttán felvonhatjuk a szemöldökünket, hiszen a 2-vel osztani veszélyes, ha modulo π dolgozunk. Pontosabban: a $2\angle A = 2\angle B$ egyenlőségből irányított szögeket használva nem következik, hogy $\angle A = \angle B$, mert lehetséges az is, hogy $\angle A = \angle B + \pi/2$. (Akik ismerik az elemi számelméletet, ráismerhetnek egy analóg szituációra: a $2a \equiv 2b \pmod c$ kongruencia nem osztható 2-vel, ha c páros.) Ez a magyarázat arra, hogy nem azt írtuk: $\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\measuredangle AOC$, mivel a jobb oldalon álló kifejezés nem jól definiált. Másrészt az irányított ívhossz egyértelmű mod 2π, tehát az irányított ív mértékének fele egy irányított szög mértéke mod π.

Ha mindez bonyolultnak látszik, ne veszítsd el a reményt; egy kis gyakorlással megtanulható ez a módszer. A következő szakaszban ehhez adunk példákat.

[1] Nem tudjuk, honnan származik az irányra vonatkozó konvenció (gondolom, hogy a + az óramutató járásával ellentétes).

Szögszámítási feladatok

Az euklideszi geometria meglepően sok problémája megoldható csupán szögszámítási ismeretekkel, vagyis hasonló háromszögek felismerésével, húrnégyszögekkel és hasonlókkal. Példaként megmutatjuk A. Miquel egy 1938-ban publikált tételét.



2. ábra. Miquel tétele

Tétel: A P, Q, R tetszőleges pontok az $\triangle ABC$ BC, CA, AB oldalain. Az ARQ, BPR, CQP háromszögek köréírt körei egy ponton mennek át.

Bizonyítás: Legyen T az R-től különböző metszéspontja ARQ és BPR köréírt körének. A kollinearitások miatt,

$$\angle TQA = \pi - \angle CQT, \quad \angle TRB = \pi - \angle ART, \quad \angle TPC = \pi - \angle BPT.$$

Konvex húrnégyszögben a szemközti szögek kiegészítő szögek:

$$\angle TQA = \pi - \angle ART, \angle TRB = \pi - \angle BPT.$$

Tehát $\angle TPC = \pi - \angle CQT$. Megfordítva: ha egy konvex négyszögben a szemközti szögek kiegészítő szögek, akkor húrnégyszögről van szó. Ezért T rajta van $\triangle CQP$ köréírt körén is.

Az előző bizonyítás gyenge pontja az, hogy függ az elrendezéstől, például attól, hogy egy bizonyos pont bizonyos más pontok között van-e. Például megkérdezhetnénk, az előző tételben, hogy mi a helyzet, ha P, Q, R az oldalak meghosszabbításán is fekhet. Ekkor is igaz marad az állítás, de az előző bizonyítás nem működik módosítás nélkül, mert bizonyos szögek, amelyekről azt állítottuk, hogy egyenlőek, most már kiegészítő szögek lesznek, és fordítva.

A trükk az, hogy „mod π irányított szögeket” használunk, ahogy az előző szakaszban leírtuk.

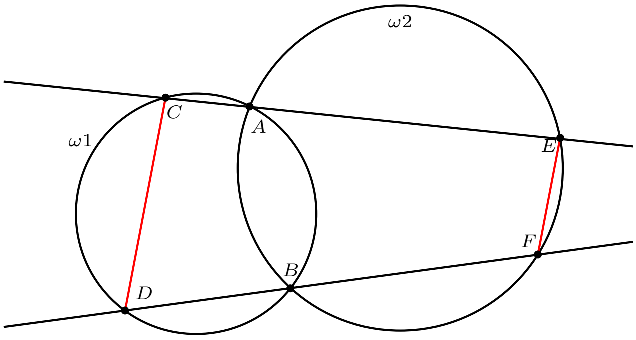
Illusztrációként egy másik tételt mutatunk, ami Pascal egy tételének bizonyításánál segédtételként használható.

Tétel: Legyen az ω_1 és ω_2 körök két metszéspontja A és B. A CD az ω_1 tetszőleges húrja, és E illetve F a $\overline{CA}$ és $\overline{BD}$ egyenesek második metszéspontja az $\omega_2$vel. Ekkor $\overline{EF}$ és $\overline{CD}$ párhuzamos.

Bizonyítás: Irányított szögekkel

$$\begin{aligned} \measuredangle CDF &= \measuredangle CDB && (B, D, F \text{ kollineáris}) \\ &= \measuredangle CAB && (ABCD \text{ húrnégyszög}) \\ &= \measuredangle EAB && (A, C, E \text{ kollineáris}) \\ &= \measuredangle EFB && (ABEF \text{ húrnégyszög}). \end{aligned}$$

Tehát $\overline{CD}$ és $\overline{EF}$ azonos szöget zár be $\overline{BF}$-fel, vagyis párhuzamosak.

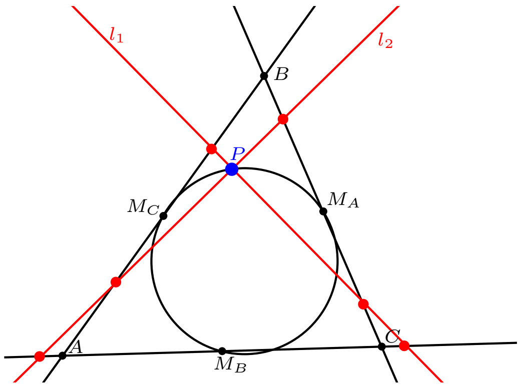


3. ábra. Párhuzamos húrok tétele

Az irányított szögek egyenesek helyzetének leírására is használhatók: $\measuredangle(\ell_1, \ell_2)$ értelmezhető úgy, mint egy (tetszőleges) forgatás szöge, ami ℓ_1-et ℓ_2-vel párhuzamos helyzetbe viszi.

Ez a megközelítés leegyszerűsíthet bizonyításokat, mint például a következő esetben.

Tétel: Adott $\triangle ABC$. Tegyük fel, hogy ℓ_1 és ℓ_2 egymásra merőlegesek, és a háromszög oldalegyeneseit a megfelelő oldalak középpontjára szimmetrikus pontokban metszik. Ekkor ℓ_1 és ℓ_2 metszéspontja, továbbá a háromszög oldalfelező pontjai egy körön vannak.



Bizonyítás: Legyenek M_A, M_B, M_C a BC, CA, AB oldalak felezőpontjai, és $P = \ell_1 \cap \ell_2$. Mivel az $\ell_1, \ell_2, \overline{BC}$ egyenesek derékszögű háromszöget alkotnak és M_A ezen háromszög átfogójának felezőpontja, így a P, M_A, $\ell_2 \cap BC$ pontok által alkotott háromszög egyenlő szárú:

$$\measuredangle(\overline{M_A P}, \ell_2) = \measuredangle(\ell_2, \overline{BC}).$$

Hasonlóan

$$\measuredangle(\ell_2, \overline{M_B P}) = \measuredangle(\overline{CA}, \ell_2),$$

és ezekből

$$\measuredangle M_A P M_B = \measuredangle ACB = \measuredangle M_A M_C M_B$$

hiszen $\triangle M_A M_B M_C$ oldalai párhuzamosak $\triangle ABC$ oldalaival. Tehát M_A, M_B, M_C, P egy körön vannak.

Feladatok

1. (USAMO 1994/3) A konvex $ABCDEF$ húrhatszögben $AB = CD = EF$ és az AD, BE, CF átlók egy ponton mennek át. Legyen P az AD és CE szakaszok metszéspontja. Bizonyítandó, hogy $CP/PE = (AC/CE)^2$.

2. (IMO 1990/1) Egy kör AB és CD húrjai E-ben metszik egymást a kör belsejében. M az EB szakasz belső pontja. Az EDM köréírt körének E-beli érintője a $\overline{BC}$ és $\overline{AC}$ egyeneseket F-ben és G-ben metszi. Ha $AM/AB = t$, akkor fejezzük ki EG/EF értékét t-vel.

3. Adott $\triangle A_0B_0C_0$ és a P pont. Definiálunk egy másik háromszöget, aminek csúcsai A_1, B_1, C_1, a P merőleges vetületei az B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 egyeneseken. Ismételjük meg még kétszer a szerkesztést $\triangle A_1B_1C_1$-ből kiindulva, így kapjuk $\triangle A_2B_2C_2$-t majd $\triangle A_3B_3C_3$-at.

   Bizonyítsuk be, hogy $\triangle A_3B_3C_3$ hasonló $\triangle A_0B_0C_0$-hoz.

4. (MOP 1991) Két kör metszéspontjai A és B. Egy tetszőleges, B-n keresztül húzott egyenes az első kört még C-ben, a másodikat D-ben metszi. Az első kör C-beli és a második D-beli érintője M-ben metszi egymást. Az $\overline{AM}$ és $\overline{CD}$ egyenesek metszéspontján át párhuzamost húztunk CM-mel, ez a párhuzamos $\overline{AC}$-t K-ban metszi. Mutassuk meg, hogy $\overline{BK}$ érinti a második kört.

5. ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 négy kör a síkon. ω_1 és ω_2 metszéspontjai P_1 és Q_1, ω_2 és ω_3 metszéspontjai P_2 és Q_2, ω_3 és ω_4 metszéspontjai P_3 és Q_3, ω_4 és ω_1 metszéspontjai P_4 és Q_4. Mutassuk meg, hogy ha P_1, P_2, P_3, és P_4 egy körön vagy egy egyenesen van, akkor Q_1, Q_2, Q_3, és Q_4 is egy körön vagy egy egyenesen van.