# Catalan számok

2012. BDG Matektábor, 9-10-es évfolyam, Csonka Dorottya

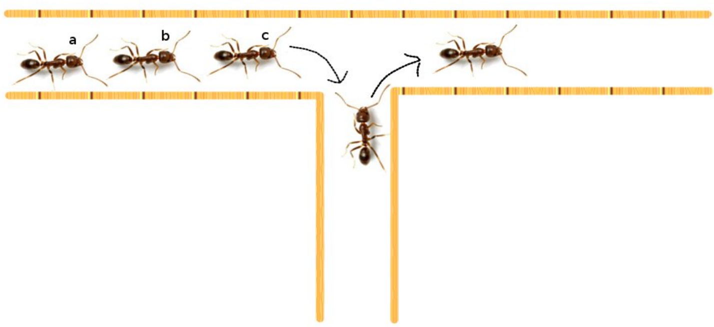
A Catalan számokkal, vagy másképpen a Catalan-sorozattal először Leonard Euler (1707-1783) munkájában találkozhatunk, amikor azt vizsgálta, hogy hányféleképpen lehet háromszögekre bontani egy sokszöget. A sorozatot mégsem róla, hanem Eugène Charles Catalan belga matematikusról kapta. Ő ismerte fel először, hogy a Catalan számok több probléma közös megoldása lehet. Richard P. Stanley (1944- ) Enumerative Combinatorics (1999) című könyvének második kötetében 66 -féle különböző definíciót adott a Catalan számokra.

A foglalkozás célja, hogy a számtalan interpretáció közül néhányat megvizsgáljunk, rekurzív és explicit képletet adjunk a Catalan számokra.

A táborban az alábbi négy problémát kapták meg a diákok. Majdnem mindenki csak egy problémával foglalkozott, általában két fős csoportokban. Az elemek keresése közben érdekes tulajdonságokat vettek észre.
Ajánlom az olvasónak, hogy a probléma után próbálja megkeresni a lehetőségeket, majd csak ezután vesse össze a táblázatban felsorolt elemekkel.

Állításunk, hogy a táblázatokban az *n-1.* sorban a lehetőségek száma az *n*. Catalan számot adják meg.

## Előzékeny hangyák esete




Van egy igen szűk folyosó, ami annyira szűk, hogy még a hangyák se tudják egymást kielőzni. Található a folyosó egyik oldalán egy mellékág, ahová kiállhat egy szegény, elfáradt hangya, hogy a többi társát elengedje. Természetesen, ha másik hangya is szeretne kiállni, akkor ő lejjebb megy. Ez a folyosó is annyira szűk, hogy a hangyák itt sem cserélhetnek helyet.
Hány különböző sorrendben érkezhet meg az *n* db hangya a folyosó végén?
(Jelöljük a hangyákat a, b, c-vel a folyosóban balról jobbra haladva. A megérkezett hangyákat pedig jobbról balra haladva figyeljük.)

| Lehetőségek | Számuk |
|---|---|
| Ø | 1 |
| a | 1 |
| ab, ba | 2 |
| abc, bca, cab, bac, cba | 5 |
| abcd, bcda, bcad, cdab, cdba, bacd, bcda, cabd, cbad, dabc, dbca, dbac, dcab, dcba | 14 |

### Sorbanállás

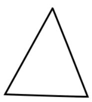
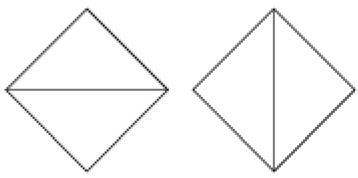
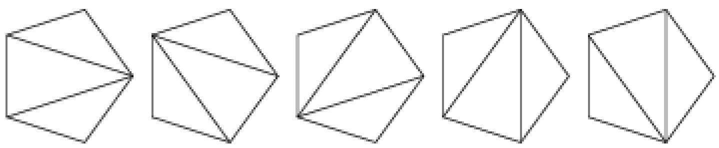
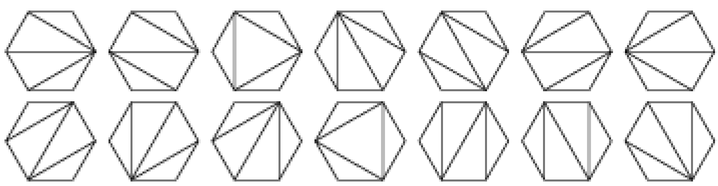
A Csodák Palotájába 1000 Ft a belépőjegy. Az osztály *2n* tagja közül mindenki vagy 1000 Ft-os, vagy 2000 Ft-os bankjeggyel szeretne fizetni. Hány különböző sorrend alakulhat ki, amikor a pénzt beszedő diák nem kerül olyan helyzetbe, hogy ne tudna visszaadni?

Jelölje az 1000 Ft-os bankjegyet e, míg a 2000 Ft-os bankjegyet k az alábbi táblázatban:

| Lehetőségek | Számuk |
|---|---|
| Ø | 1 |
| ek | 1 |
| eekk, ekek | 2 |
| eeekkk, eekkek, eekekk, ekeekk, ekekek | 5 |
| eeeekkkk, eeekkkek, eeekkekk, eekkeekk, eekkekek, eeekekkk, eekekkek, eekeekkk, eekekekk, ekeeekkk, ekeekkek, ekeekekk, ekekeekk, ekekekek | 14 |

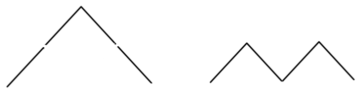
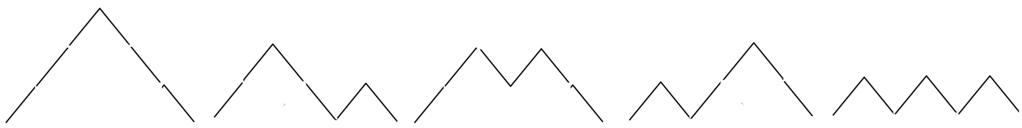
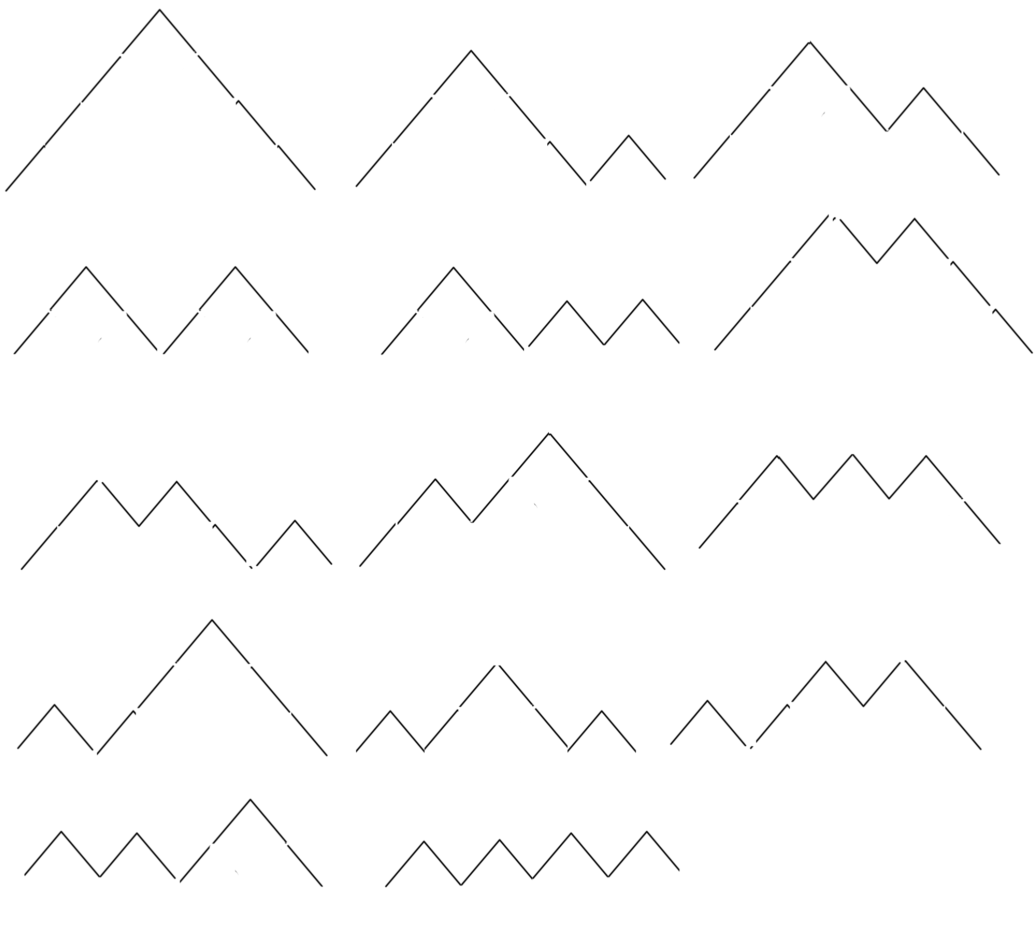
### Háromszögekre bontás

Hányféleképpen lehet az *n+2* szöget átlókkal háromszögre bontani? (Ez volt eredetileg Euler feladata)

| Lehetőségek | Számuk |
|---|---|
| Ø | 1 |
|  | 1 |
|  | 2 |
|  | 5 |
|  | 14 |

## Catalan szigetcsoport

Hajózunk a messzi tengereken a Catalan-szigetcsoport felé. Ezek a szigetek arról híresek, hogy az egy csoportba tartozó szigetek ugyanannyi felfelé, mint lefelé vezető hegyoldalból állnak. Egy szigetcsoport hegyei legalább egy ponton kell, hogy érintkezzenek, de a vízszint alá nem mehetnek. Hány – a fenti feltételeknek megfelelő – szigetcsoport tartozik *n* fel és *n* lefelé vezető hegyoldalhoz?

| Lehetőségek | Számuk |
|---|---|
| Ø | 1 |
|  | 1 |
|  | 2 |
|  | 5 |
|  | 14 |

## További problémák

### Helyes zárójelek

Tekintsünk *n* pár zárójelet. Hányféleképpen rajzolható fel *n* pár helyesen párosított zárójel?
(Helyes párosítás alatt azt értem, hogy a *2n* darab zárójel közül *n* darab nyitó és *n* darab záró zárójel van. Továbbá tetszőleges bal oldali kezdőszeletben sohasem lesz több a záró, mint a nyitó zárójelek száma.)

| Lehetőségek | Számuk |
|---|---|
| Ø | 1 |
| () | 1 |
| (()), ()() | 2 |
| ((())), (())(), (()()), ()(()), ()()() | 5 |
| (((()))), ((()))(), ((())()), (())(()), (())()(), ((()())), (()())(), (()(())), (()()()), ()((())), ()(())(), ()(()()), ()()(()), ()()()() | 14 |

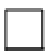
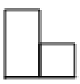
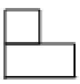
### Átzárójelezések

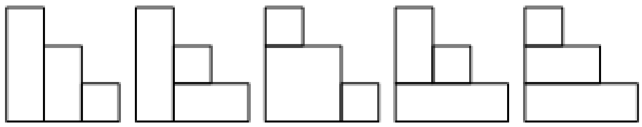
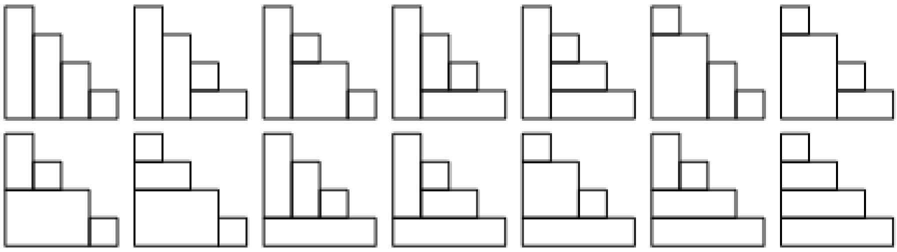
Vegyünk *n+1* szám szorzatát, és csoportosítsuk őket aszerint, hogy milyen sorrendben szeretnénk a szorzást elvégezni. A csoportosítást jelöljük zárójelekkel, *n+1* szorzótényező esetén *n* pár zárójelet felhasználva.
Hányféleképpen csoportosíthatunk *n+1* szám szorzatát?

| Lehetőségek | Számuk |
|---|---|
| (a) | 1 |
| (a·b) | 1 |
| ((a·b)·c), (a·(b·c)) | 2 |
| (((a·b)·c)·d), ((a·b)·(c·d)), ((a·(b·c))·d), (a·((b·c)·d)), (a·(b·(c·d))) | 5 |
| ((((a·b)·c)·d)·e), (((a·b)·c)·(d·e)), (((a·b)·(c·d))·e), ((a·b)·((c·d)·e)), ((a·b)·(c·(d·e))), (((a·(b·c))·d)·e), ((a·(b·c))·(d·e)), ((a·((b·c)·d))·e), ((a·(b·(c·d)))·e), (a·(((b·c)·d)·e)), (a·((b·c)·(d·e))), (a·((b·(c·d))·e)), (a·(b·((c·d)·e))), (a·(b·(c·(d·e)))) | 14 |

### Lépcső készítés

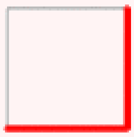
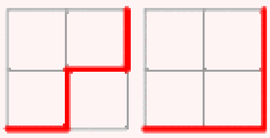
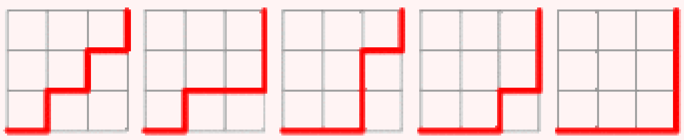
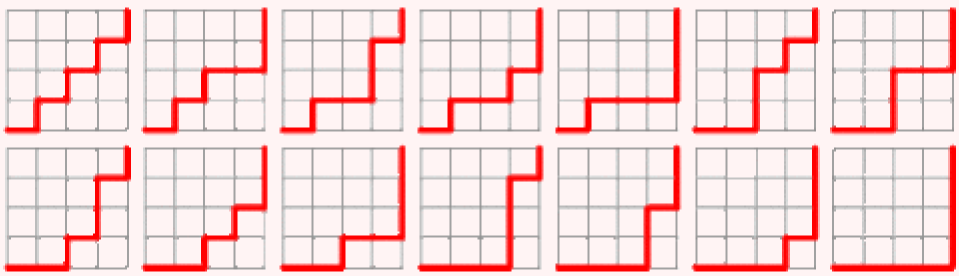
Készítsünk *n* egység magas lépcsőt *n* darab téglalap felhasználásával, ahol a téglalapok oldalai egész számok. Hányféleképpen készíthetünk el egy *n* egység magas lépcsőt?

| Lehetőségek | Számuk |
|---|---|
| Ø | 1 |
|  | 1 |
|   | 2 |

| | |
|---|---|
|  | 5 |
|  | 14 |

**Átlókerülő utak**

Hányféleképpen juthatunk el a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba egy *nxn*-es négyzethálón, ha a háló mentén csak jobbra, vagy lefelé mehetünk, és érinthetjük, de nem keresztezhetjük a bal felső sarkot a jobb alsó sarokkal összekötő átlót?

| Lehetőségek | Számuk |
|---|---|
| Ø | 1 |
|  | 1 |
|  | 2 |
|  | 5 |
|  | 14 |

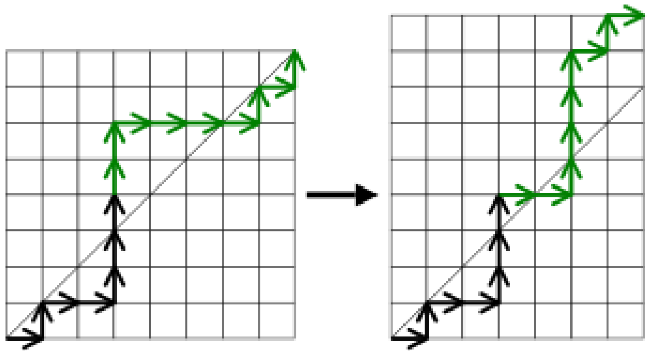
## Kapcsolat a különböző megfogalmazások közt

Keressünk kapcsolatot, egyértelmű hozzárendelést a különböző megfogalmazások között!

- A Catalán szigetcsoport minden egyes „fel” hegyoldal megegyezik egy nyitó zárójelnek, és egy „le” vezető hegyoldal egy záró zárójelnek.
- Ha az átzárójelezésnél elhagyjuk a záró zárójelet, de meghagyjuk a szorzásjelet, akkor előbbi a fel, míg utóbbi a le útnak felel meg.
- Az átlókerülő utak esetében az ábrát -45°-kal elforgatva megkapjuk a Catalán szigetcsoportokat.
- A sorban állásos probléma esetében az *n* darab 1000 Ft-os fizetés az n darab jobbra lépésnek, míg a 2000 Ft-ossal való fizetés a felfelé lépésnek felel meg.
- A hangyás esetében legyen egy főhangya a sarkon, aki be illetve ki parancsolja a hangyákat. Amennyiben egy hangya csak továbbmenne, akkor is be illetve ki kell mennie. Ekkor legyen a be vezényszó a felfele, a le vezényszó a lefele hegyoldallal megegyező.
- A sokszöges és a lépcsős megfogalmazások kapcsolata a többivel a rekurzív képlet megfogalmazása után világossá válik.

## Explicit képlet az n. Catalan számra

Bizonyítsuk be, hogy az *n*. Catalan szám $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ .



A képlet bizonyításához használjuk az átlókerülő utas megfogalmazást. Először megszámoljuk, hogy hány út vezet a bal alsó sarokból a jobb felsőbe. Majd kivonjuk belőle azokat az utakat, amik érintik vagy metszik az átlót. Ezek a „rossz” utak legalább egyszer érintik, vagy metszik az átlót. Lehet, hogy többször is. De mindenképpen van egy első alkalom, amikor először megy át az út az átlón. Ettől a ponttól kezdve tükrözzük az utat: ha eredetileg felfelé ment az út, akkor menjen ezután jobbra; ha eredetileg jobbra ment, akkor menjen ezután felfelé. Mivel ahhoz, hogy az átló felé kerüljön, eggyel többször kellett mennie felfelé, mint jobbra. Ha egy $nxn$ -es hálóban $k+1$ -et ment idáig felfelé, és $k$ -t jobbra, akkor a tükrözés után még $n-k$ lépést kell mennie jobbra, és $n-k-1$ -et felfelé. De a tükrözés miatt $(k)+(n-k-1)=n-1$ lépés lesz jobbra, és $(k+1)+(n-k)=n+1$ lépés felfelé. Tehát minden tükrös út ugyanabban a pontban végződik: a kiindulási ponthoz képes $n-1$ lépéssel jobbra, és $n+1$ lépéssel felfelé.

Ezt a tükrözést minden „rossz” úttal meg lehet tenni, és minden egyes úthoz egy rossz út tartozik azok közül, amik a kezdőponttól az $(n-1\,;n+1)$ pontba vezetnek. Így a rossz utak száma pont az összes út száma ezen két pont között.

Egy $rxq$ -s hálózatban az átló két végpontját összekötő összes utak száma $\binom{r+q}{r}=\binom{r+q}{q}$

Ugyanis mindenképpen kell $r$ -et jobbra, és $q$ -t felfelé lépni. Az összes lehetséges kombinációt megkapjuk, hogyha az összes lehetséges lépés közül $(r+q)$ kiválasztjuk, hogy melyek lesznek a felfelé vezetőek $(q)$ , vagy ezen egyenértékű, ha azokat választjuk ki, hogy melyek mennek jobbra.

Így az összes útból a „rossz” utak számát kivonva kapjuk, hogy az átlókerülő utak száma

$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}$ .

Kis algebrai átalakítással pedig kapjuk, hogy $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\binom{2n}{n}-\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ és ezt kellett belátnunk.

## Rekurzív képlet az n+1. Catalan számra

A rekurzív képlet előállításához először használjuk a zárójelezéses megfogalmazást.

Tegyük fel, hogy már ismert, hogy hányféleképpen tudunk $n=0,1,2,3,\ldots,n-1$ pár zárójelet helyesen felrajzolni. Vizsgáljuk most az *n* pár zárójel esetét!
Jelöljük $C_i$ -vel az *i* pár zárójel helyes felírásainak lehetőségét. Megnézve az első néhány esetet kapjuk, hogy $C_0=1$ , $C_1=1$ , $C_2=2$ , $C_3=5$ .
Tudjuk, hogy minden helyesen párosított esetben az első jel biztosan egy „(” és valahol van egy hozzá tartozó „)” . Köztük pedig helyesen párosított zárójelezések vannak, A és B:

(A)B

A és B legalább nulla, és legfeljebb *n-1* pár helyesen párosított zárójelet tartalmazhat. Amennyiben A-ban *k* darab helyesen párosított zárójel van, úgy B-ben $n-k-1$ darab. ( A nulla pár zárójel azt jelenti, hogy nem írunk le egy zárójelet sem.)
Számoljuk meg, hányféle különböző párosítás lehetséges: először, amikor A-ban van 0 pár, és B-ben $n-1$ pár. Majd amikor A-ban *1* pár van, és B-ben $n-2$ pár, és így tovább mindaddig, míg A-ban *n-1* darab és B-ben *0* darab zárójel nem lesz.
Képletbe írva azt kapjuk, hogy az *n* pár helyesen párosított zárójelezést tartalmazó kifejezést megkapjuk az alábbi képlettel:

$$C_n=\sum_{i=0}^{n} C_i C_{i+1}$$

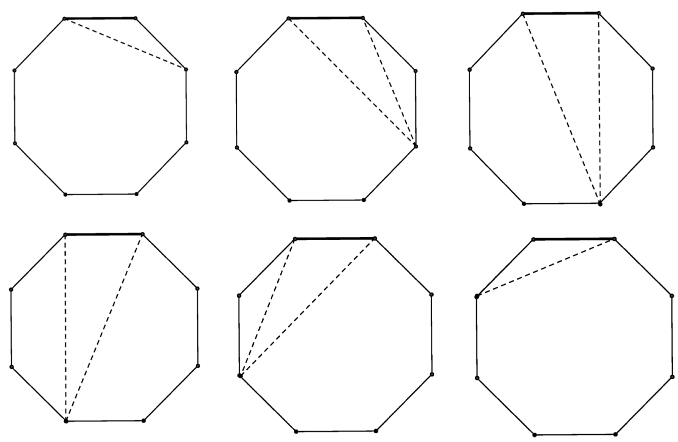
Egy ilyen rekurzív képlet előállítása volt a célunk.

Nézzük meg, hogyan néz ki a képlet az első néhány esetre:

$C_0=1$
$C_1=1$
$C_2=C_0C_1+C_1C_0=1+1=2$
$C_3=C_0C_2+C_1C_1+C_2C_0=2+1+2=5$
$C_4=C_0C_3+C_1C_2+C_2C_1+C_3C_0=5+2+2+5=14$

Vizsgáljuk meg most a sokszögek háromszögekre bontásának esetét!

Nézzünk példaképpen egy nyolcszöget. Jelöljük ki rajta a felső oldalt. Rajzoljuk meg az összes háromszöget, amelynek ez az egyik oldala! Ekkor a keletkezett háromszög két oldalán egy-egy , kevesebb oldalszámú sokszög keletkezik. A képen az első és utolsó esetben az egyik oldalt keletkező sokszög nulla oldalú.
Azt szeretnénk belátni, hogy egy *n*



oldalú $(n>3)$ sokszög $C_{n-2}$ –féleképpen bontható háromszögekre.
Az első ábrán egy hétszög és egy nullaszög keletkezik a háromszög két oldalán. A hétszög $C_5$ -féleképpen bontható háromszögekre, a nullaszög pedig $C_0$ -féleképpen. A sorban következő esetben a háromszög két oldalán egy hatszög és egy háromszög keletkezik. Ez $C_4 \cdot C_1$ féleképpen bontható háromszögekre és így tovább. Így a nyolcszög összes felbontása
$C_6 = C_5 C_0 + C_4 C_1 + C_3 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_4 + C_0 C_5$
Vegyük észre, hogy 6 helyett *n* esetre hasonlóan működik a felbontás.
A kapcsolat egyértelmű a helyes zárójelezések és a sokszögek felbontása között: az A illetve B alacsonyabb darabszámú zárójelpároknak a kisebb sokszögek felelnek meg, a kezdeti „()" párnak pedig a kiválasztott háromszög.

## További problémák egyéni feldolgozásra

Az alábbi problémák már nem hangzottak el a foglakkozáson, ellenben ajánlom továbblépési lehetőségként az érdeklődő olvasónak:

1. Ha $C_0 = 1$ , akkor bizonyítsuk be, hogy $C_{n+1} = 2\frac{(2n+1)}{n+2} \cdot C_n$
2. Mi a kapcsolat a lépcsős megfogalmazás és a háromszögekre darabolásos megfogalmazás között?
3. Bizonyítsuk be, hogy csak azok a $C_n$ Catalan számok páratlanok, ahol igaz, hogy $n = 2^k - 1$ . A többi mind páros.
4. Állítsuk elő a Catalan számok generátor függvényét!

**Irodalomjegyzék:**


Tom Davis: Catalan Numbers, www.geometer.org/mathcircles/**catalan**.pdf (2012. október. 1)

http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_numbers