

Catalan számok

2012. BDG Matektábor, 9-10-es évfolyam, Csonka Dorottya

A Catalan számokkal, vagy másképpen a Catalan-sorozattal először Leonard Euler (1707-1783) munkájában találkozhatunk, amikor azt vizsgálta, hogy hányféleképpen lehet háromszögekre bontani egy sokszöget. A sorozatot mégsem róla, hanem Eugène Charles Catalan belga matematikusról kapta. Ő ismerte fel először, hogy a Catalan számok több probléma közös megoldása lehet. Richard P. Stanley (1944-) *Enumerative Combinatorics* (1999) című könyvének második kötetében 66 -féle különböző definíciót adott a Catalan számokra.

A foglalkozás célja, hogy a számtalan interpretáció közül néhányat megvizsgáljunk, rekurzív és explicit képletet adjunk a Catalan számokra.

A táborban az alábbi négy problémát kapták meg a diákok. Majdnem mindenki csak egy problémával foglalkozott, általában két fős csoportokban. Az elemek keresése közben érdekes tulajdonságokat vettek észre.

Ajánlom az olvasónak, hogy a probléma után próbálja megkeresni a lehetőségeket, majd csak ezután vesse össze a táblázatban felsorolt elemekkel.

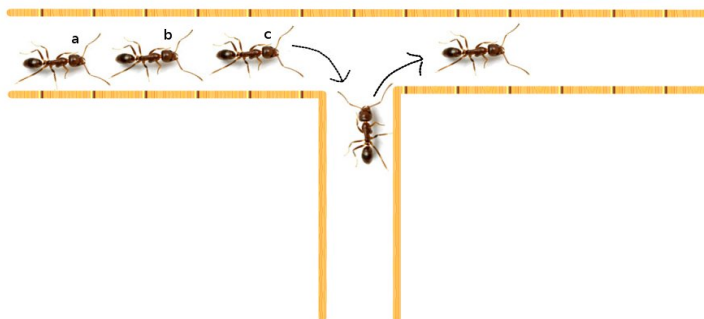
Állításunk, hogy a táblázatokban az $n-1$. sorban a lehetőségek száma az n . Catalan számot adják meg.

Előzékeny hangyák esete

Van egy igen szűk folyosó, ami annyira szűk, hogy még a hangyák se tudják egymást kielőzni. Található a folyosó egyik oldalán egy mellékág, ahová kiállhat egy szegény, elfáradt hangya, hogy a többi társát elengedje. Természetesen, ha másik hangya is szeretne kiállni, akkor ő lejjebb megy. Ez a folyosó is annyira szűk, hogy a hangyák itt sem cserélhetnek helyet.

Hány különböző sorrendben érkezhetsz meg az n db hangya a folyosó végén?

(Jelöljük a hangyákat a, b, c-vel a folyosóban balról jobbra haladva. A megérkezett hangyákat pedig jobbról balra haladva figyeljük.)



	Lehetőségek	Számuk
\emptyset		1
a		1
ab, ba		2
abc, bca, cab, bac, cba		5
abcd, bcda, bcad, cdab, cdba, bacd, bced, cabd, cbad, dabc, dbca, dbac, dcab, dcba		14

Sorbanállás


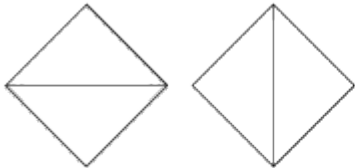

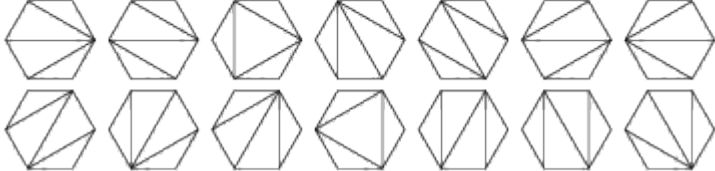
A Csodák Palotájába 1000 Ft a belépőjegy. Az osztály $2n$ tagja közül mindenki vagy 1000 Ft-os, vagy 2000 Ft-os bankjeggyel szeretne fizetni. Hány különböző sorrend alakulhat ki, amikor a pénzt beszedő diák nem kerül olyan helyzetbe, hogy ne tudna visszaadni?

Jelölje az 1000 Ft-os bankjegyet e , míg a 2000 Ft-os bankjegyet k az alábbi táblázatban:

Lehetőségek	Számuk
\emptyset	1
ek	1
eek, eke	2
$eekkk, eekkek, eekkek, ekeekk, ekekek$	5
$eeeekkk, eeeekkek, eeeekkek, eekkeekk, eekkekek, eeeekkkk, eeeekkek, eekkekkk, eekekek, ekeekkk, ekeekkek, ekeekkek, ekeekkek$	14


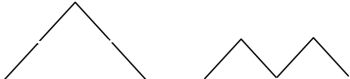

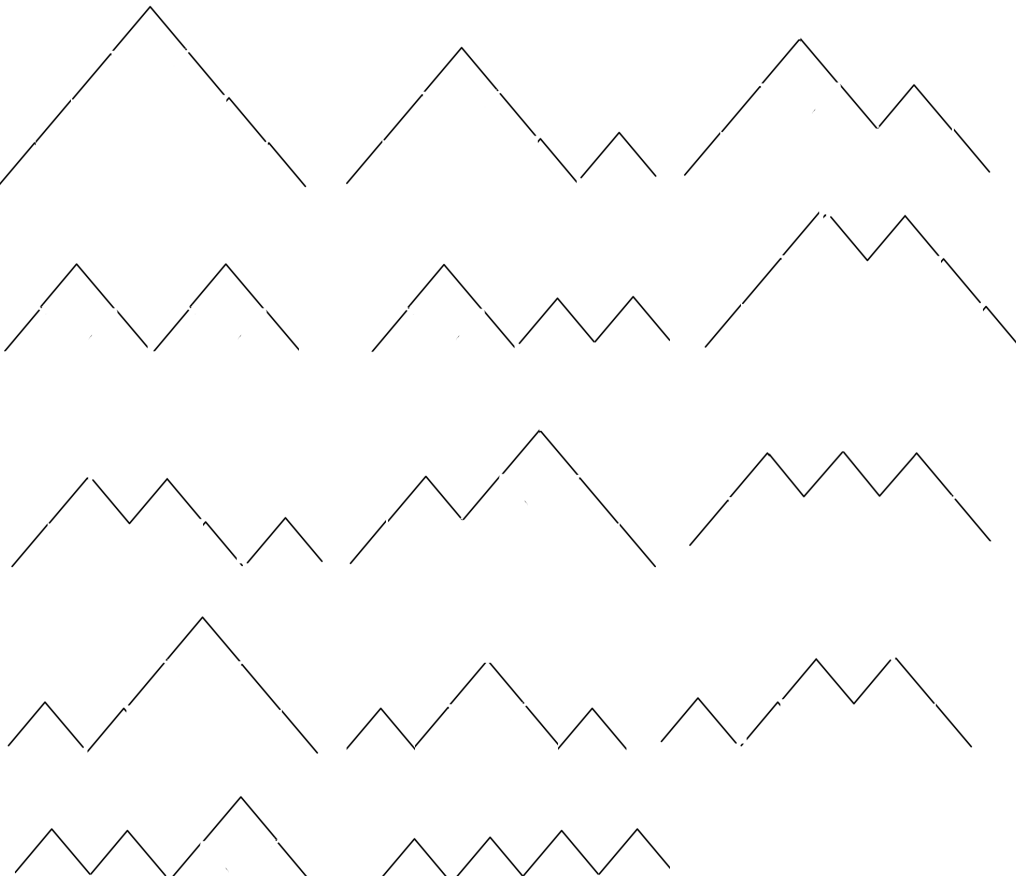
Háromszögre bontás

Hányféleképpen lehet az $n+2$ szöget átlókkal háromszögre bontani? (Ez volt eredetileg Euler feladata)

Lehetőségek	Számuk
\emptyset	1
	1
	2
	5
	14

Catalan szigetecsoport

Hajózunk a messzi tengereken a Catalan-szigetecsoport felé. Ezek a szigetek arról híresek, hogy az egy csoportba tartozó szigetek ugyanannyi felfelé, mint lefelé vezető hegyoldalból állnak. Egy szigetecsoport hegyei legalább egy ponton kell, hogy érintkezzenek, de a vízszint alá nem mehetnek. Hány – a fenti feltételeknek megfelelő – szigetecsoport tartozik n fel és n lefelé vezető hegyoldalhoz?

	Lehetőségek	Számuk
∅		1
		1
		2
		5
		14

További problémák

Helyes zárójelek

Tekintsünk n pár zárójelet. Hányféleképpen rajzolható fel n pár helyesen párosított zárójel?
 (Helyes párosítás alatt azt értem, hogy a $2n$ darab zárójel közül n darab nyitó és n darab záró zárójel van. Továbbá tetszőleges bal oldali kezdőszeletben sohasem lesz több a záró, mint a nyitó zárójelek száma.)

Lehetőségek	Számuk
\emptyset	1
()	1
(()), ()()	2
((())), (())(), (())(), ()(), ()()	5
((()())), ((())()), ((())()), (())(), (())(), ((())), (())(), (())(), (()), (())(), ()(), ()(), ()(), ()()	14

Átzárójelezések



Vegyünk $n+1$ szám szorzatát, és csoportosítsuk őket aszerint, hogy milyen sorrendben szeretnénk a szorzást elvégezni. A csoportosítást jelöljük zárójelekkel, $n+1$ szorzótényező esetén n pár zárójelet felhasználva.

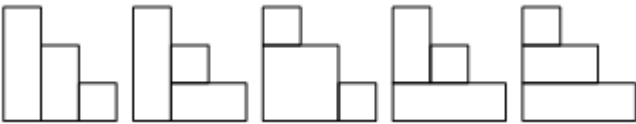
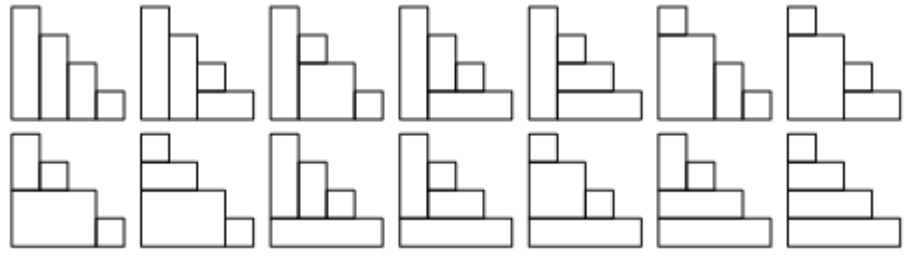
Hányféleképpen csoportosíthatunk $n+1$ szám szorzatát?

Lehetőségek	Számuk
(a)	1
(a·b)	1
((a·b)·c), (a·(b·c))	2
((((a·b)·c)·d), ((a·b)·(c·d)), ((a·(b·c))·d), (a·((b·c)·d)), (a·(b·(c·d))))	5
(((((a·b)·c)·d)·e), (((a·b)·c)·(d·e)), (((a·b)·(c·d))·e), ((a·b)·((c·d)·e)), ((a·b)·(c·(d·e))), (((a·(b·c))·d)·e), ((a·(b·c))·(d·e)), ((a·((b·c)·d))·e), ((a·(b·(c·d)))·e), (a·(((b·c)·d)·e)), (a·((b·c)·(d·e))), (a·((b·(c·d))·e)), (a·(b·((c·d)·e))), (a·(b·(c·(d·e))))	14

Lépcső készítés


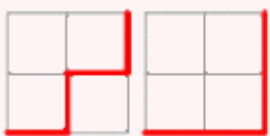
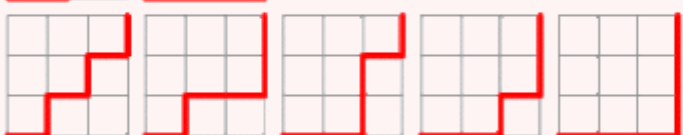
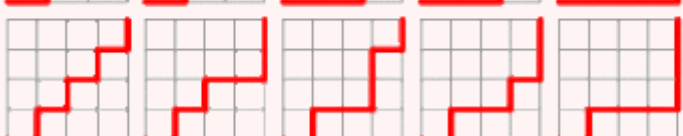
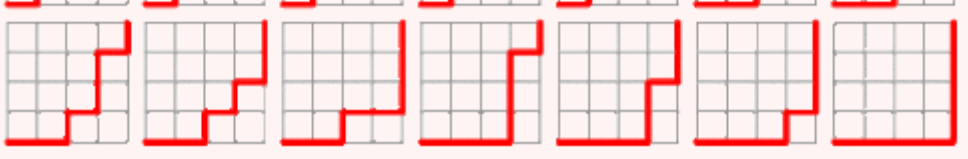
Készítsünk n egység magas lépcsőt n darab téglalap felhasználásával, ahol a téglalapok oldalai egész számok. Hányféleképpen készíthetünk el egy n egység magas lépcsőt?

Lehetőségek	Számuk
\emptyset	1
	1
	2

	5
	14

Átlókerülő utak

Hányféleképpen juthatunk el a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba egy $n \times n$ -es négyzethálón, ha a háló mentén csak jobbra, vagy lefelé mehetünk, és érintetjük, de nem keresztezhetjük a bal felső sarkot a jobb alsó sarokkal összekötő átlót?

	Lehetőségek	Számuk
∅		1
		1
		2
		5
		14

Kapcsolat a különböző megfogalmazások közt

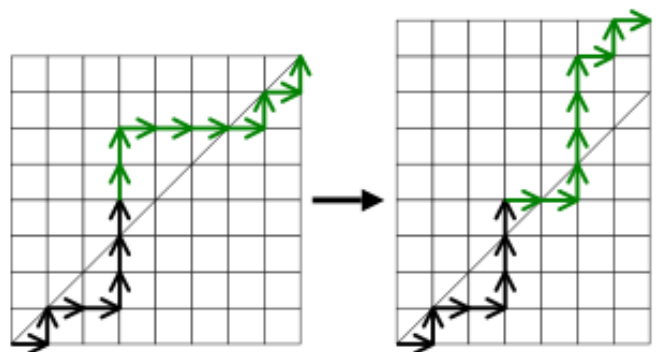
Keressünk kapcsolatot, egyértelmű hozzárendelést a különböző megfogalmazások között!

- A Catalan szigetcsoport minden egyes „fel” hegyoldal megegyezik egy nyitó zárójelnek, és egy „le” vezető hegyoldal egy záró zárójelnek.
- Ha az átzárőjelezésnél elhagyjuk a záró zárőjelet, de meghagyjuk a szorzásjelet, akkor előbbi a fel, míg utóbbi a le útnak felel meg.
- Az átlókerülő utak esetében az ábrát -45° -kal elforgatva megkapjuk a Catalan szigetcsoportokat.
- A sorban állásos probléma esetében az n darab 1000 Ft-os fizetés az n darab jobbra lépésnek, míg a 2000 Ft-ossal való fizetés a felfelé lépésnek felel meg.
- A hangyás esetében legyen egy főhangya a sarkon, aki be illetve ki parancsolja a hangyákat. Amennyiben egy hangya csak továbbmenne, akkor is be illetve ki kell mennie. Ekkor legyen a be vezényszó a felfele, a le vezényszó a lefele hegyoldallal megegyező.
- A sokszöges és a lépcsős megfogalmazások kapcsolata a többivel a rekurzív képlet megfogalmazása után világossá válik.

Explicit képlet az n . Catalan számra

Bizonyítsuk be, hogy az n . Catalan szám $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

A képlet bizonyításához használjuk az átlókerülő utas megfogalmazást. Először megszámloljuk, hogy hány út vezet a bal alsó sarokból a jobb felsőbe. Majd kivonjuk belőle azokat az utakat, amik érintik vagy metszik az átlót. Ezek a „rossz” utak legalább egyszer érintik, vagy metszik az átlót. Lehet, hogy többször is. De mindenképpen van egy első alkalom, amikor először megy át az út az átlón. Ettől a ponttól kezdve tükrözzük az utat: ha eredetileg felfelé ment az út, akkor menjen ezután jobbra; ha eredetileg jobbra ment, akkor menjen ezután felfelé. Mivel ahhoz, hogy az átló felé kerüljön, eggyel többször kellett mennie felfelé, mint jobbra. Ha egy $n \times n$ -es hálóban $k+1$ -et ment idáig felfelé, és k -t jobbra, akkor a tükrözés után még $n-k$ lépést kell mennie jobbra, és $n-k-1$ -et felfelé. De a tükrözés miatt $(k)+(n-k-1)=n-1$ lépés lesz jobbra, és $(k+1)+(n-k)=n+1$ lépés felfelé. Tehát minden tükrös út ugyanabban a pontban végződik: a kiindulási ponthoz képest $n-1$ lépéssel jobbra, és $n+1$ lépéssel felfelé.



Ezt a tükrözést minden „rossz” úttal meg lehet tenni, és minden egyes úthoz egy rossz út tartozik azok közül, amik a kezdőponttól az $(n-1; n+1)$ pontba vezetnek. Így a rossz utak száma pont az összes út száma ezen két pont között.

Egy $r \times q$ -s hálózatban az átló két végpontját összekötő összes utak száma $\binom{r+q}{r} = \binom{r+q}{q}$

Ugyanis mindenképpen kell r -et jobbra, és q -t felfelé lépni. Az összes lehetséges kombinációt megkapjuk, hogyha az összes lehetséges lépés közül $(r+q)$ kiválasztjuk, hogy melyek lesznek a felfelé vezetőek (q) , vagy ezen egyenértékű, ha azokat választjuk ki, hogy melyek mennek jobbra.

Így az összes útból a „rossz” utak számát kivonva kapjuk, hogy az átlókerülő utak száma

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

Kis algebrai átalakítással pedig kapjuk, hogy $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ és ezt kellett belátnunk.

Rekurzív képlet az $n+1$. Catalan számra

A rekurzív képlet előállításához először használjuk a zárójelezés megfogalmazást.

Tegyük fel, hogy már ismert, hogy hányféleképpen tudunk $n=0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ pár zárójelet helyesen felrajzolni. Vizsgáljuk most az n pár zárójelet esetét!

Jelöljük C_i -vel az i pár zárójelet helyes felírásainak lehetőségét. Megnézve az első néhány esetet kapjuk, hogy $C_0=1$, $C_1=1$, $C_2=2$, $C_3=5$.

Tudjuk, hogy minden helyesen párosított esetben az első jel biztosan egy „(” és valahol van egy hozzá tartozó „)” . Köztük pedig helyesen párosított zárójelezések vannak, A és B:

$$(A)B$$

A és B legalább nulla, és legfeljebb $n-1$ pár helyesen párosított zárójelet tartalmazhat. Amennyiben A-ban k darab helyesen párosított zárójelet van, úgy B-ben $n-k-1$ darab. (A nulla pár zárójelet azt jelenti, hogy nem írunk le egy zárójelet sem.)

Számoljuk meg, hányféle különböző párosítás lehetséges: először, amikor A-ban van 0 pár, és B-ben $n-1$ pár. Majd amikor A-ban 1 pár van, és B-ben $n-2$ pár, és így tovább mindaddig, míg A-ban $n-1$ darab és B-ben 0 darab zárójelet nem lesz.

Képletbe írva azt kapjuk, hogy az n pár helyesen párosított zárójelezést tartalmazó kifejezést megkapjuk az alábbi képlettel:

$$C_n = \sum_{i=0}^n C_i C_{i+1}$$

Egy ilyen rekurzív képlet előállítása volt a célunk.

Nézzük meg, hogyan néz ki a képlet az első néhány esetre:

$$C_0=1$$

$$C_1=1$$

$$C_2=C_0C_1+C_1C_0=1+1=2$$

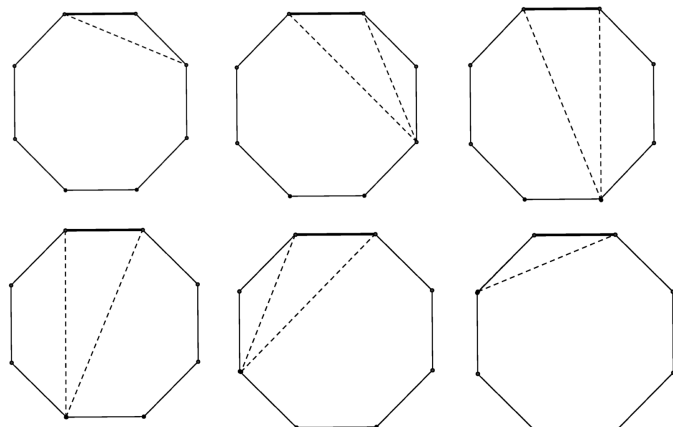
$$C_3=C_0C_2+C_1C_1+C_2C_0=2+1+2=5$$

$$C_4=C_0C_3+C_1C_2+C_2C_1+C_3C_0=5+2+2+5=14$$

Vizsgáljuk meg most a sokszögek háromszögekre bontásának esetét!

Nézzünk példaképpen egy nyolcszöget. Jelöljük ki rajta a felső oldalt. Rajzoljuk meg az összes háromszöget, amelynek ez az egyik oldala! Ekkor a keletkezett háromszög két oldalán egy-egy, kevesebb oldalszámú sokszög keletkezik. A képen az első és utolsó esetben az egyik oldalt keletkező sokszög nulla oldalú.

Azt szeretnénk belátni, hogy egy n



oldalú ($n > 3$) sokszög C_{n-2} -féleképpen bontható háromszögekre.

Az első ábrán egy hétszög és egy nullaszög keletkezik a háromszög két oldalán. A hétszög C_5 -féleképpen bontható háromszögekre, a nullaszög pedig C_0 -féleképpen. A sorban következő esetben a háromszög két oldalán egy hatszög és egy háromszög keletkezik. Ez $C_4 \cdot C_1$ féleképpen bontható háromszögekre és így tovább. Így a nyolcszög összes felbontása

$$C_6 = C_5 C_0 + C_4 C_1 + C_3 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_4 + C_0 C_5$$

Vegyük észre, hogy 6 helyett n esetre hasonlóan működik a felbontás.

A kapcsolat egyértelmű a helyes zárójeljelezések és a sokszögek felbontása között: az A illetve B alacsonyabb darabszámú zárójelpárokhoz a kisebb sokszögek felelnek meg, a kezdeti „()” párnak pedig a kiválasztott háromszög.

További problémák egyéni feldolgozásra

Az alábbi problémák már nem hangzottak el a foglalkozáson, ellenben ajánlom továbblépési lehetőségként az érdeklődő olvasónak:

1. Ha $C_0 = 1$, akkor bizonyítsuk be, hogy $C_{n+1} = 2 \frac{(2n+1)}{n+2} \cdot C_n$
2. Mi a kapcsolat a lépcsős megfogalmazás és a háromszögekre darabolásos megfogalmazás között?
3. Bizonyítsuk be, hogy csak azok a C_n Catalan számok páratlanok, ahol igaz, hogy $n = 2^k - 1$. A többi mind páros.
4. Állítsuk elő a Catalan számok generátor függvényét!

Irodalomjegyzék:

Tom Davis: Catalan Numbers, www.geometer.org/mathcircles/catalan.pdf (2012. október. 1)

http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_numbers