Bicentrikus négyszögek

Amit a húrnégyszögekről tudunk:

- Definíció: a körbe írt négyszögeket húrnégyszögnek nevezzük. Olyan négyszögek, melyek oldalai ugyanannak a körnek a húrjai.
- Tétel: Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szemközti szögének összege 180°.
- Ptolemaios tétele: A húrnégyszög átlóinak szorzata a szemközti oldalpárok szorzatának összegével egyenlő.
- Brahmagupta tétele: a húrnégyszög területe $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

  Bizonyítás: Írjuk fel a koszinusztételt az ABD és a BDC háromszögekre:

  $$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

  $$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - \alpha)$$

  Tudjuk, hogy $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, a két egyenletet rendezve:

  $$2(ad + bc)\cos\alpha = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$$

  Írjuk fel a két háromszög területének összegét:

  $$T = \frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin(180° - \alpha)}{2} = \frac{(ad + bc)\sin\alpha}{2}$$

  $$2(ad + bc)\cdot\sin\alpha = 4T$$

  A két egyenletet négyzetre emelve és összeadva:

  $$4(ad + bc)^2\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 16T^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$$

  Átalakítva (két négyzetszám különbségét többször használva):

  $$16T^2 = (b + c + a - d)(b + c - a + d)(a + d + b - c)(a + d - b + c)$$

  Bevezetve $\frac{a+b+c+d}{2} = s$ jelölést kapjuk:

  $$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

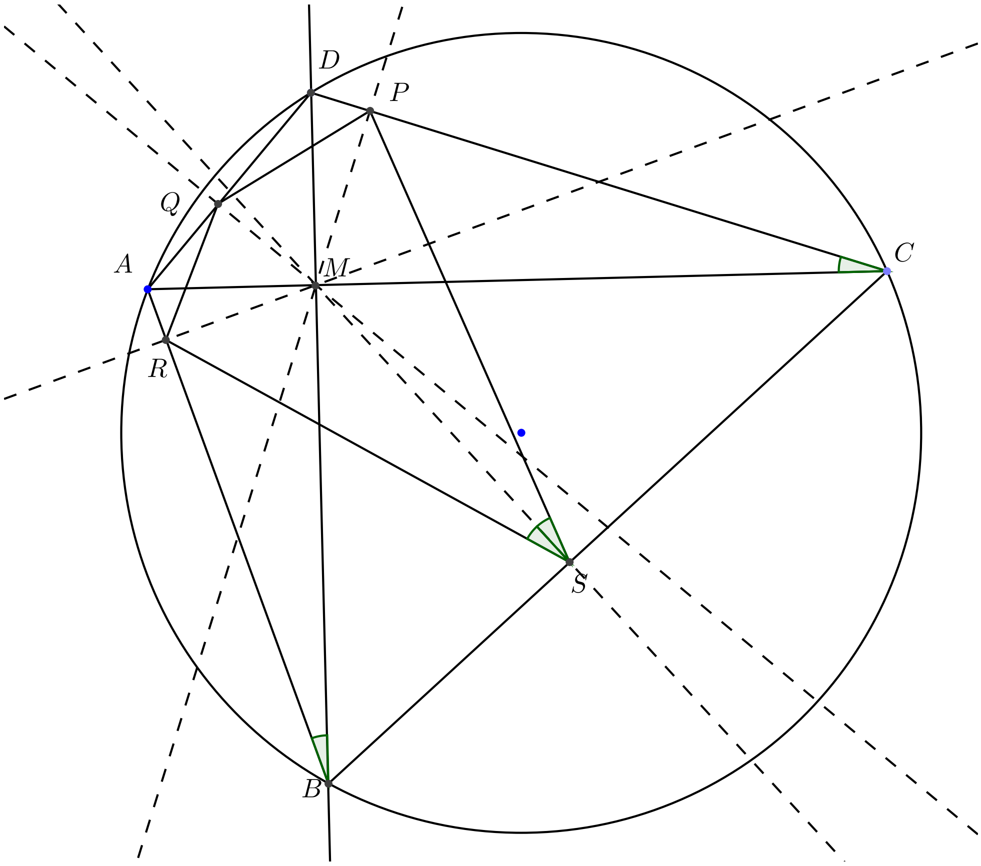
  .

Amit az érintőnégyszögekről tudunk:

- Definíció: Érintőnégyszögnek azokat a négyszögeket nevezzük, amelyeknek oldalai egy körnek érintői. Minden érintőnégyszög konvex.
- Tétel: Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha a két-két szemközti oldal hosszúságának összege egyenlő.
- Területe: $T = r\cdot s$, ahol r a beírható kör sugara, s pedig a félkerület.

1. Ha egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az átlók metszéspontjából az oldalakra állított merőlegesek talppontjai olyan húrnégyszöget határoznak meg, amely egyben érintőnégyszög is. Az ilyen négyszögeket nevezzük bicentrikus (azaz két középpontú) négyszögnek.

   Bizonyítás:



Az ábrán $ABCD, MSCP, MRBS$ húrnégyszögek ezért:

$$\alpha = DCA\angle = PCM\angle = PSM\angle, \alpha = DBA\angle = MBR\angle = MSR\angle$$

Így $PQRS$ négyszögben $PSR\angle = 2\alpha$

De DCM derékszögű háromszögre, és $ABCD$ húrnégyszög volta miatt:

$$CDM\angle = 90^\circ - \alpha = CDB\angle = CAB\angle$$

De $MPDQ, MQAR$ is húrnégyszög, ezért:

$$MQP\angle = MDP\angle = RAM\angle = RQM\angle = 90^\circ - \alpha$$

Vagyis a $PQRS$ négyszög Q-nál lévő szöge: $PQR\angle = 180^\circ - 2\alpha$.

Tehát $PQRS$ húrnégyszög. Mivel átlói felezik a szögeit, ezért az átlók metszéspontja a beírható körének középpontja, tehát érintőnégyszög is.

Két érdekes megjegyzés:

(a) Az átlók metszéspontjából bocsátott merőleges egyenesek a húrnégyszög szemközti oldalait felezik.

(b) Ha a húrnégyszög A, B, C, D csúcsaiba meghúzzuk a köré írható körhöz az érintőket, akkor az így kapott négyszög szintén húrnégyszög és mivel érintőnégyszög is, ezért bicentrikus négyszög. A két bicentrikus négyszögnek a szögei megegyeznek, tehát hasonlóak, valamint a megfelelő oldalaik párhuzamosak.

Bizonyítás vázlat:

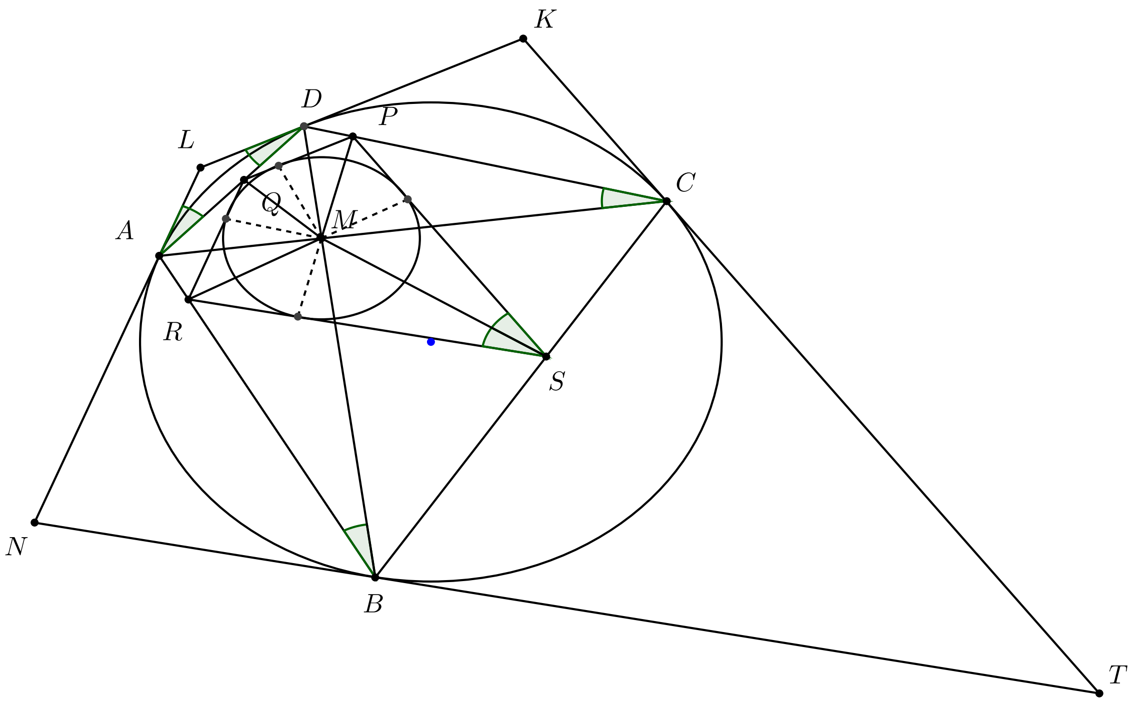
$LAD\angle = LAD\angle = DCA\angle = \alpha \Longrightarrow KLN\angle = 180^\circ - 2\alpha$

Hasonlóan $BCT\angle = CBT\angle = CDB\angle = 90^\circ - \alpha \Longrightarrow KTN\angle = 180^\circ - 2\cdot(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$ Tehát $KLNT$ is húrnégyszög.

Nézzük meg milyen szöget zárnak be az AC átlóval a PD illetve KT oldalak. Legyen $ACB\angle = \beta$, ekkor $MBC\angle = 90^\circ - \beta = DBC\angle = KCD\angle$. Tehát $ACK\angle = 90^\circ - \beta + \alpha$

Valamint $MSCP$ húrnégyszög $MPS\angle = MCS\angle = \beta$. MPC derékszögű háromszögből $PMC\angle = 90^\circ - \alpha$. Így a PS oldal AC szakasszal bezárt szöge $180^\circ - (90^\circ - \alpha + \beta) = 90^\circ - \beta + \alpha$.

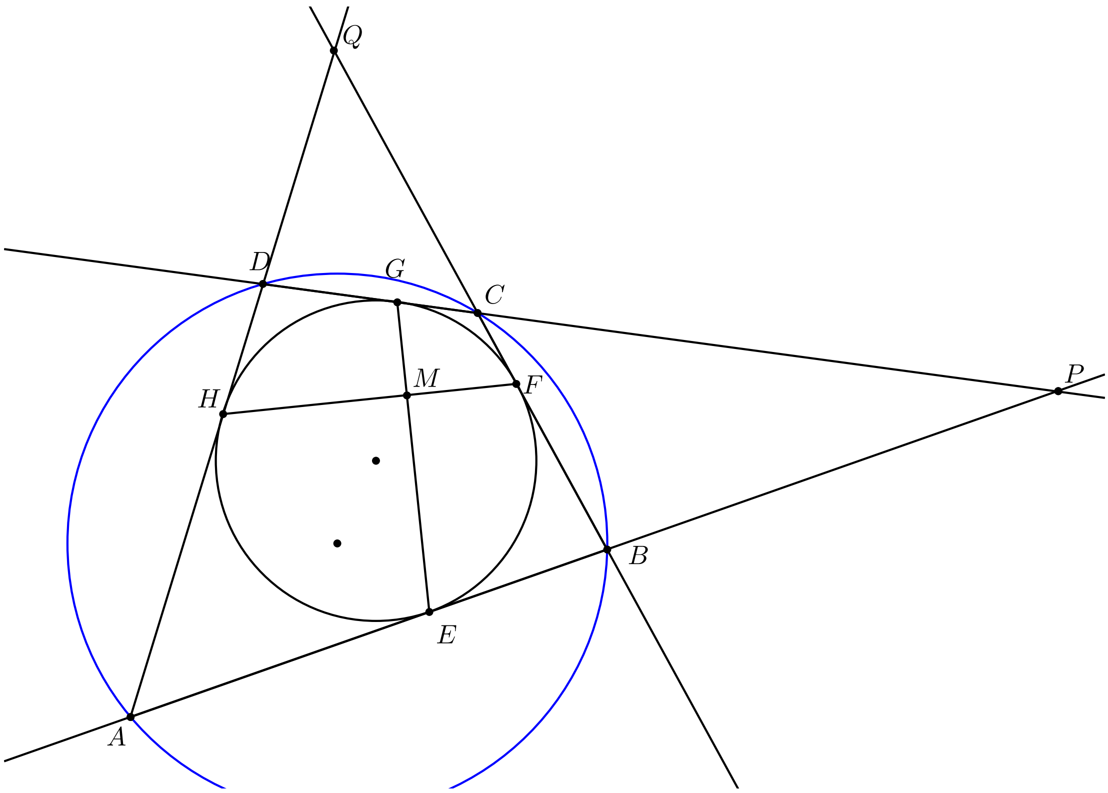
Tehát a $PQRS$ négyszög oldalai párhuzamosak a$KLNT$ négyszög oldalaival.



2. Bizonyítsuk be, hogy egy érintőnégyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha a szemközti érintési pontokat összekötő egyenesek merőlegesek egymásra!

   Bizonyítás:

   Húrtrapézra nyilvánvaló.



Legyen $ABCD$ bicentrikus négyszög. Legyen $ABC\angle = \beta \Rightarrow ADC\angle = 180° - \beta$ Mivel PGE és QHF háromszögek egyenlőszárúak, ezért

$$QHF\angle = QFH\angle = \delta; \quad PGE\angle = PEG\angle = \epsilon$$

$$EMF\angle = 360° - (\epsilon + \beta + 180° - \delta) = 180° - \epsilon - \beta + \delta$$

$$GMH\angle = 360° - (180° - \beta + \delta + 180° - \epsilon) = \beta - \delta + \epsilon$$

Mivel $EMF\angle = GMH\angle$ ezért

$$180° - \epsilon - \beta + \delta = \beta - \delta + \epsilon$$

$$\beta - \delta + \epsilon = 90°$$

Ezt visszaírva $EMF\angle = 180° - \beta + \delta - \epsilon = 180° - 90° = 90°$ Tehát az érintési pontokat összekötő egyenesek merőlegesek egymásra.

Legyen $EMF\angle = 90°$. Legyen $ABC\angle = \beta, \quad ADC\angle = \gamma$.

$$\beta = 360° - (\epsilon + 90° + 180° - \delta) = 90° - \epsilon + \delta$$

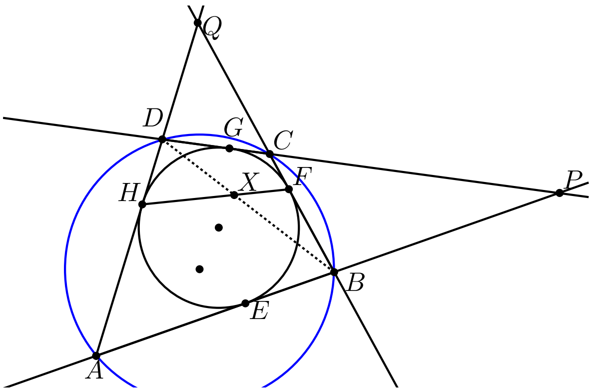
$$\gamma = 360° - (\delta + 90° + 180° - \epsilon) = 90° + \epsilon - \delta$$

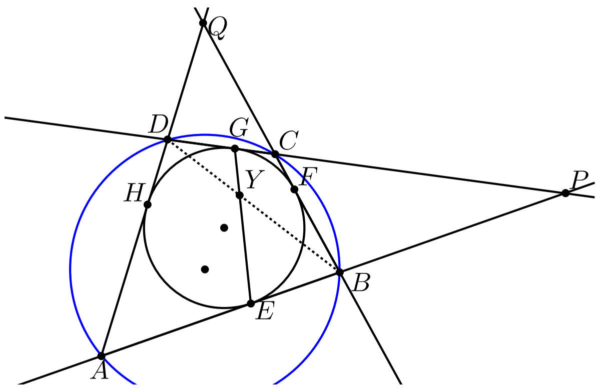
$$\beta + \gamma = 90° - \epsilon + \delta + 90° + \epsilon - \delta = 180°$$

Tehát $ABCD$ érintőnégyszög húrnégyszög is.

3. Húzzuk be az előző feladatban a négyszög átlóit is. Állítás: az érintőnégyszög szemközti érintési pontjait összekötő egyenesek az átlók metszéspontjában metszik egymást.

Bizonyítás:





Legyen $BD \cap HF$. Írjuk fel a sinustételt a BXF és a HDX háromszögekre:

$$\frac{BX}{BF} = \frac{\sin(180° - \delta)}{\sin(FXB\angle)} = \frac{\sin\delta}{\sin(HXD\angle)} = \frac{XD}{DH}$$

Átrendezve és felhasználva az érintőszakaszok egyenlőségét ($DH = DG$):

$$\frac{BX}{BF} = \frac{XD}{DH} \Longrightarrow \frac{BX}{XD} = \frac{BF}{DH} = \frac{BF}{DG}$$

Legyen $BD \cap EG$. Írjuk fel a sinustételt a DGX és a BEX háromszögekre:

$$\frac{DY}{DG} = \frac{\sin(180° - \epsilon)}{\sin(GYD\angle)} = \frac{\sin\epsilon}{\sin(EYB\angle)} = \frac{YB}{EB}$$

Átrendezve és felhasználva az érintőszakaszok egyenlőségét ($EB = BF$):

$$\frac{DY}{DG} = \frac{YB}{EB} \Longrightarrow \frac{YB}{DY} = \frac{EB}{DG} = \frac{BF}{DG}$$

Összevetve az előzővel:

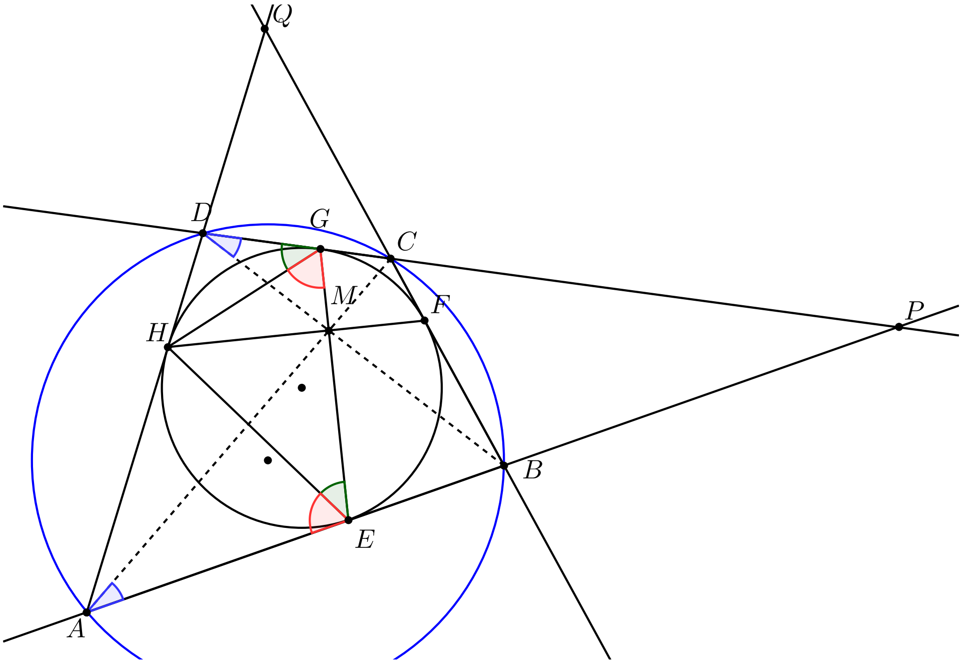
$$\frac{BX}{XD} = \frac{BF}{DG} = \frac{YB}{DY}$$

Tehát $X \equiv Y$.

(Az állítást a Brianchon-tétel ismeretében is bizonyíthatjuk.)

Megjegyzés: Ha az $ABCD$ négyszög nem csak érintőnégyszög, hanem húrnégyszög is, akkor az átlók hajlásszögét felezik az érintési pontokat összekötő szakaszok.

Bizonyítás:



A beírt körre vonatkozó kerületi szögek egyenlőségéből:

$$HGD\angle = HEG\angle, \qquad HEA\angle = HGE\angle$$

A köréírt kör miatt: $BDC\angle = BAC\angle$.

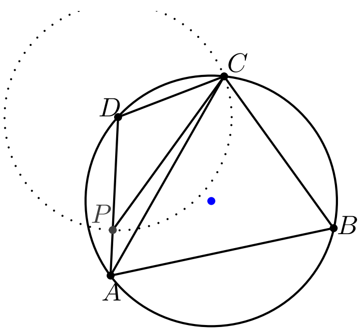
A DMG és AME háromszögek szögösszege miatt: $DMG\angle = AME\angle$, de $DMG\angle = EMB\angle$ ezért $AME\angle = EMB\angle$, mellyel bebizonyítottuk, hogy felezi az EM szakasz az $AMB\angle$-t.

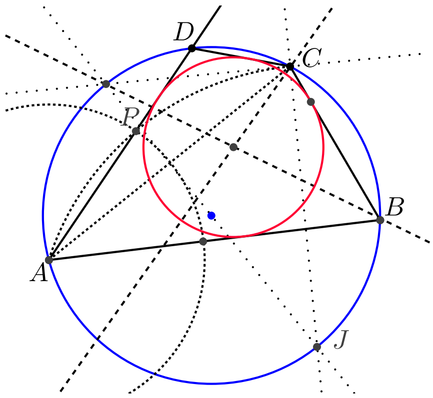
4. Adott egy k kör három pontja A, B és C. Szerkesszük meg a körnek azt a D pontját, amelyre az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.

Szerkesztés:

Tegyük fel, hogy D az ABC háromszög köré írt kör B-t nem tartalmazó AC ívének olyan pontja, amelyre $AB + CD = BC + AD$, tehát $ABCD$ érintőnégyszög. Ha $AB = CB$, akkor $CD = AD$, tehát D az AC ív felezőpontja, $ABCD$ deltoid, s így biztosan érintőnégyszög.

Feltehetjük, hogy$AB > BC$, ekkor $AB - BC = AD - CD > 0$. Mérjük rá CD-t D-ből kiindulva DA-ra (P pont). A CDP háromszög egyenlő szárú és $PDC\angle = 180° - \beta$, ezért $APC\angle = 180° - \frac{\beta}{2}$.



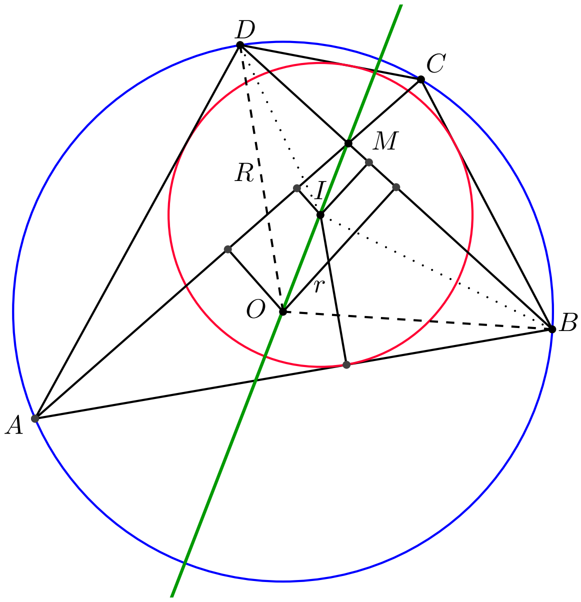


A szerkesztés lépései: az AC oldal B-vel ellentétes oldalára megszerkesztjük a szakasz $180° - \frac{\beta}{2}$ látószögkörívét (középpontja J) ezt metsszük el A-ból $AB - BC$ sugarú körívvel, a metszéspont P, melyre $AP = AB - BC (= AB - CD)$. AP meghosszabbítása kimetszi a körből a D pontot.

Valóban az így kapott $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, mert CDP háromszög a szögek miatt egyenlő szárú ($CD = PD$), így $AD = AP + PD = AB - BC + CD$, amiből látszik, hogy a szemközti oldalak összege megegyezik.

Megjegyzés: a szerkesztés mindig elvégezhető és mindig egy megoldása van.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $ABCD$ bicentrikus négyszög, akkor a köré írható, a beírható kör középpontja és az átlók metszéspontja egy egyenesbe esik.



Először vizsgáljuk meg, hogy az O és az I pontok az ABM háromszög belsejébe esnek-e. O a hegyesszögű háromszög belsejébe esik, így $O \in ABD\triangle \cap ABC\triangle = AMB\triangle$ Legyenek a négyszög belső szögei $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$, és $2\alpha, 2\beta \leq 90°$. $BIDC$ négyszög szögeit vizsgálva:

$$BID\angle = 360° - (\beta + \delta + 2\gamma) = 180° - (\beta + \delta) + 180° - 2\gamma = 90° + 2\alpha$$

Ugyanis $ABCD$ húrnégyszög, azaz $180° - 2\beta = 2\delta \Rightarrow 90° - \beta = \delta \Rightarrow 90° = \beta + \delta$ és $180° - 2\gamma = 2\alpha$

Tehát $BID\angle = 90° + 2\alpha \leq 180°$ Hasonlóan felírva az $ADCI$ négyszögben az $AIC\angle \leq 180°$.

Ha be tudjuk bizonyítani, hogy $\dfrac{d(O,BD)}{d(O,AC)} = \dfrac{d(I,BD)}{d(I,AC)}$, akkor O, I, M egy egyenesbe esik.

$$\frac{d(O,BD)}{d(I,BD)} = \frac{d(O,BD)\cdot BD}{d(I,BD)\cdot BD} = \frac{T_{OBD}}{T_{IBD}} = \frac{R^2 \cdot \sin BOD\angle}{IB \cdot ID \cdot \sin BID\angle} = \frac{R^2 \cdot \sin 4\alpha}{\frac{r}{\sin\beta} \cdot \frac{r}{\sin\delta} \cdot \sin(90° + 2\alpha)} = *$$

Felhasználva, hogy $90° = \beta + \delta \Rightarrow \sin\delta = \cos\beta$ és $sin(90° + 2\alpha) = \cos 2\alpha$ és az addíciós tételt $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha$.

$$* = \frac{2R^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{r^2}{\sin\beta\cdot\cos\beta}\cos 2\alpha} = \frac{2R^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \frac{\sin 2\beta}{2}}{r^2 \cdot \cos 2\alpha} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

Felírva az AOC illetve az AIC háromszögek területét ugyanígy kapjuk, hogy

$$\frac{d(O,AC)}{d(I,AC)} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

Tehát

$$\frac{d(O,BD)}{d(I,BD)} = \frac{d(O,AC)}{d(I,AC)}$$

melyből következik, hogy O, I, M egy egyenesbe esik.

6. Bizonyítsuk be, hogy a bicentrikus négyszög területére igaz, hogy $T = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$, ahol a, b, c, d a négyszög oldalinak hossza.

Bizonyítás: Használjuk ki, hogy a négyszög húrnégyszög, így

$$T = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$$

Mivel érintőnégyszög is, ezért $a = x + v, b = x + y, c = y + z, d = z + y$. Ezekből:

$$s - d = \frac{a+b+c+d}{2} - d = \frac{a+b+c-d}{2} = \frac{x+v+x+y+y+z-z-v}{2} = \frac{2x+2y}{2} = x + y = b$$

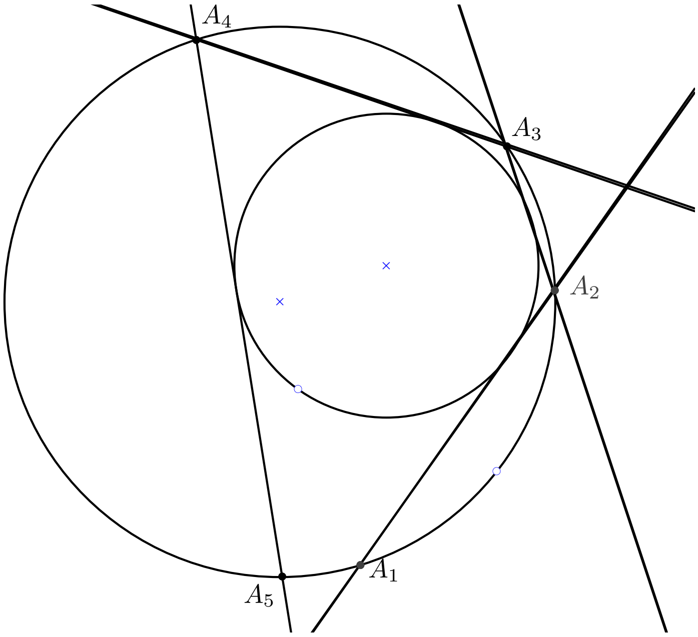
Hasonlóan a többi tagra is kapjuk, hogy $T = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$

Következmény: Mivel igaz a $T = r \cdot s$ terület képlet, ezért a kettőt összevetve kapjuk:

$$r = \frac{2 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}}{a+b+c+d}$$

Poncelet szerkesztés: Adottak a síkban a k és l körök. Szerkesszünk háromszöget, majd négyszöget, amelynek csúcsai k-n vannak, oldalegyenesei pedig érintik l-et.

Mely A_1A_2 húr-érintőtől lesz a folyamat 3, illetve 4 lépésben periódikus?

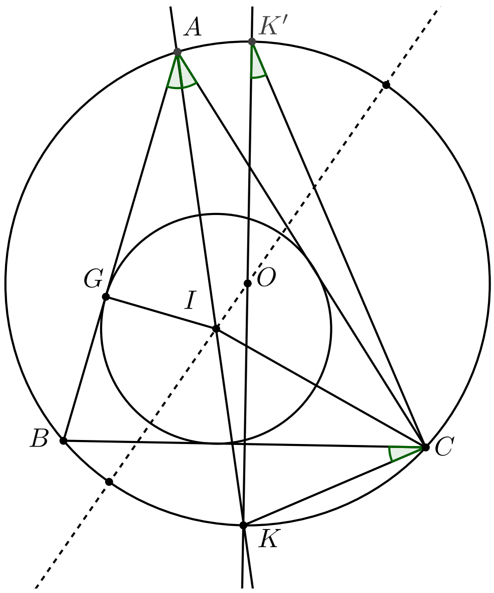


7. Háromszög akkor szerkeszthető, ha

$$\frac{1}{R+d}+\frac{1}{R-d}=\frac{1}{r}$$

ahol R a köré írható, r a beírható kör sugara, d pedig a két kör középpontjának távolsága. (Az állítást Euler-tételnek is nevezik.)

Bizonyítás: Átalakítva a kifejezést kapjuk: $(R+d)\cdot(R-d)=2Rr$



Írjuk fel az I pontnak a körre vonatkozó hatványát két féle képpen:

$$AI\cdot IK=(R+d)\cdot(R-d)$$

Tudjuk, hogy $BAK\angle=KAC\angle=KK'C\angle=BCK\angle=\frac{\alpha}{2}$, így $CIK\angle=\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$ ($CIK\angle$ külsőszöge az IAC háromszögnek), valamint $ICK\angle=\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$. Tehát $IK=KC$.

A $KK'C$ háromszög derékszögű és egyik hegyesszöge $\frac{\alpha}{2}$, tehát hasonló IAG háromszöghöz.

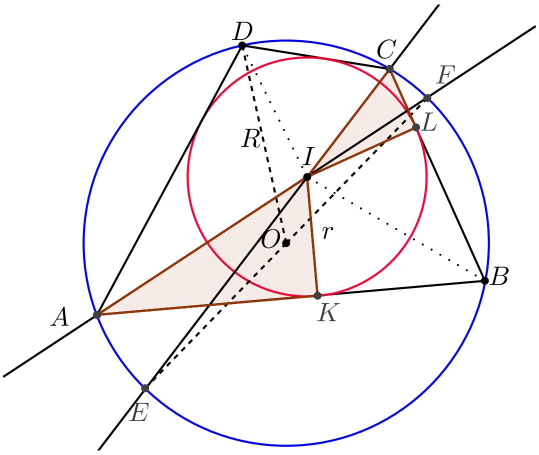
$$\frac{AI}{IG}=\frac{KK'}{KC}$$

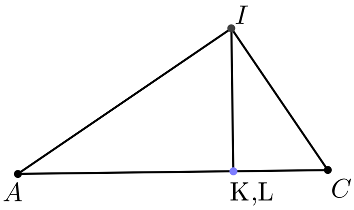
Felszorozva $AI\cdot KC=KK'\cdot IG=2R\cdot r$ Ezzel az állítást bizonyítottuk.

8. Négyszögek esetén akkor szerkeszthető két adott körhöz bicentrikus négyszög, ha a köréírható kör sugarára R, a beírható kör sugarára r és a két kör középpontjának a távolságára teljesül:

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Bizonyítás:





Legyen F az A csúcs átellenes pontja a körön, E pedig a C csúcsé. Legyen $A\angle = 2\alpha$, $C\angle = 2\gamma$ vagyis $2\alpha + 2\gamma = 180°$, mert $ABCD$ húrnégyszög. Tudjuk, hogy $IAK\angle = \alpha \Rightarrow AIK\angle = 90° - \alpha$ valamint $ICL\angle = \gamma \Rightarrow CIL\angle = 90° - \gamma$ ezért $AIK\angle + CIL\angle = 180° - (\alpha + \gamma) = 90°$. Mivel $IK = IL = r$, ezért az AIK háromszög és az ILC háromszög egy derékszögű háromszöggé rakhatók össze.

Az AIC derékszögű háromszög területe két féle képpen: $r \cdot (AK + CL) = AI \cdot CI$. Négyzetre emelve $r^2 \cdot (AK + CL)^2 = AI^2 \cdot CI^2$. Írjuk fel a háromszög oldalaira a Pitagorasz tételt $(AK + CL)^2 = AI^2 + CI^2$. Ez utóbbi két egyenlőséget összevetve:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{CI^2} + \frac{1}{AI^2}$$

Tudjuk, hogy $ECD\angle = \gamma \Rightarrow EOD\angle = 2\gamma$ és $FAD\angle = \alpha \Rightarrow FOD\angle = 2\alpha$. Ez azt jelenti, hogy $EOD\angle + FOD\angle = 2\alpha + 2\gamma = 180°$, azaz E, O, F egy egyenesbe esik. Az EIF háromszögben IO súlvonal, tehát O-ra tükrözve egy paralelogrammát kapounk, melynek oldlai és átlói közötti összefüggés miatt:

$$(2IO)^2 + (EF)^2 = 2EI^2 + 2FI^2 \Rightarrow 4d^2 + 4R^2 = 2EI^2 + 2FI^2 \Rightarrow 2(d^2 + R^2) = EI^2 + FI^2$$

Írjuk fel az I pont körre vonatkozó hatványát:

$$AI \cdot IF = CI \cdot IE = (R + d) \cdot (R - d) = R^2 - d^2$$

Kifejezve:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{IF^2}{(R^2 - d^2)^2}, \qquad \frac{1}{CI^2} = \frac{EI^2}{(R^2 - d^2)^2}$$

Összeadva és átalakítva:

$$\frac{1}{AI^2} + \frac{1}{CI^2} = \frac{IF^2}{(R^2 - d^2)^2} + \frac{EI^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{IF^2 + EI^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{2(d^2 + R^2)}{(R^2 - d^2)^2} =$$

$$= \frac{(R + d)^2 + (R - d)^2}{(R - d)^2 \cdot (R + d)^2} = \frac{1}{(R - d)^2} + \frac{1}{(R + d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés: Nicolaus Fuss (1755-1826) Euler mellett dolgozott.

A Poncelet szerkesztés esetében, ha valamely körpárosra találunk olyan kiinduló pont, melyből kiindulva záródó húrsorozatot kapunk, akkor bármely másik pontból kiindulva is. Fuss bicentrikus hatszögekre is elvégezte a számítást:

$$3p^4q^4 - 2p^2q^2r^2(p^2 + q^2) = r^4(p^2 - q^2)^2$$

illetve nyolcszögekre:

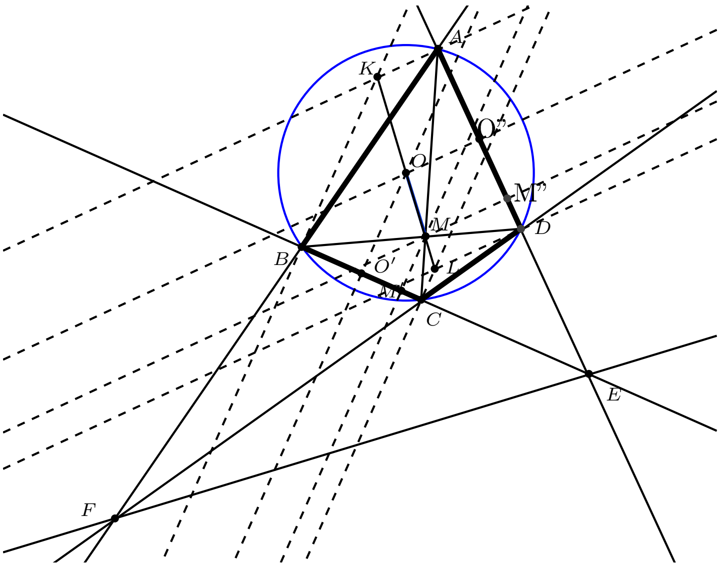
$$[r^2(p^2 + q^2) - p^2q^2]^4 = 16p^4q^4r^4(p^2 - r^2)(q^2 - r^2)$$

ahol $p = R + d, q = R - d$.

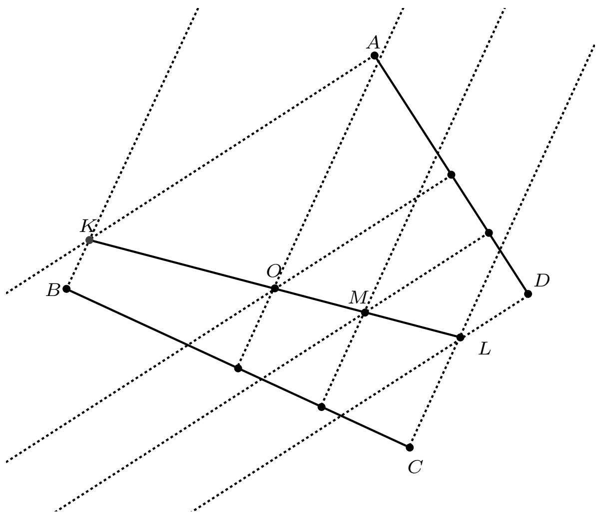
9. Bizonyítottuk már, hogy az $ABCD$ bicentrikus négyszög beírható körének, köré írható körének középpontja és az átlók metszéspontja egy egyenesbe esik. Legyen az AD egyenes és a BC egyenes metszéspontja E és $e_{AB} \cap e_{CD} = F$. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög beírható körének, köré írható körének középpontja és az átlók metszéspontja által alkotott egyenes merőlegesen metszi az EF egyenest.

Bizonyítás:

Állítsunk merőlegest az AD szakaszra az A pontba, majd BC szakaszra B-be. A két merőleges metszéspontja legyen K. Hasonlóan AD szakaszra az D pontba, majd BC szakaszra C-re. A két merőleges metszéspontja legyen L. Továbbá M-ből $\perp BC$-re legyen M' és M-ből $\perp AD$-re legyen M”, O-ból $\perp BC$-re legyen O', O-ból $\perp AD$-re legyen O”.

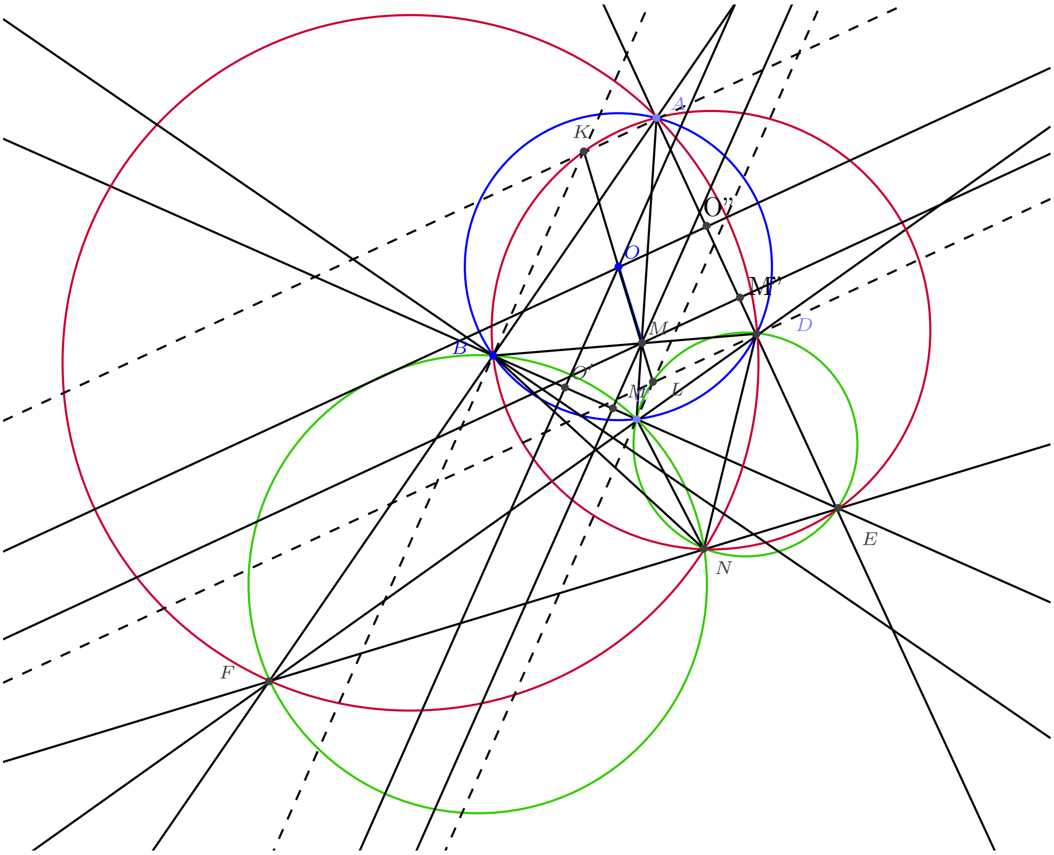


Mivel O a körül írt kör középpontja, ezért $\dfrac{BO'}{O'C} = \dfrac{AO\text{”}}{O\text{”}D} = 1$, és $BMC\triangle \sim AMD\triangle$ ezért $\dfrac{BM'}{M'C} = \dfrac{AM\text{”}}{M\text{”}D}$.
Ezekből következik, hogy az $OM \subset KL$.



(az O'-ből induló merőleges felezi a KL szakaszt, hasonlóan az O”-ből indukó, tehát O rajta van a KL szakaszon. M-re hasonlóan)

Rajzoljuk meg az $FBC\triangle$ köré írható körét, és az $EDC\triangle$-ét is. Legyen C-n kívüli metszéspontjuk N.



Mivel $FBCN$ és $ABCD$ is húrnégyszög, ezért:

$$CNF\angle = 180° - FBC\angle = ABC\angle$$

valamint $CDEN$ és $ABCD$ is húrnégyszög, ezért:

$$CNE\angle = 180° - CDE\angle = CDA\angle$$

de $ABC\angle + CDA\angle = 180°$, mer $ABCD$ húrnégyszög, tehát $CNF\angle + CNE\angle = 180°$ vagyis N illeszkedik az EF szakaszra.

Továbbá $BNF\angle = BCF\angle = 180° - BCD\angle = BAD\angle = BAE\angle$ melyből következik, hogy $ABNE$ is húrnégyszög, azaz $ABE\triangle$ körülírható körén rajta van az N pont. Hasonlóan bizonyítható, hogy $ADF\triangle$ köré írható körén is rajta van az N pont. (Az N ponton átmegy mind a négy kör.)

Mivel $KBE\angle = 90°$ és $KAE\angle = 90°$ ezért $AKBE$ is húrnégyszög, köré írható köre megegyezik az $ABE\triangle$ köré írható körével, tehát K rajta van a körön és KE átmérő. De N is rajta van a körön, ezért $ENK\angle = EBK\angle = 90°$. Tehát $KN \perp EF$. Ugyanígy bizonyítható L-re (rajta van az $ECD\triangle$ köré írható körén L és N is.)

Mivel az OM szakasz egybe esik KL-el, ezért az állítást bebizonyítottuk.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $ABCD$ érintőnégyszög, akkor a beírható kör középpontja és átlók felezőpontjai egy egyenesbe esnek!

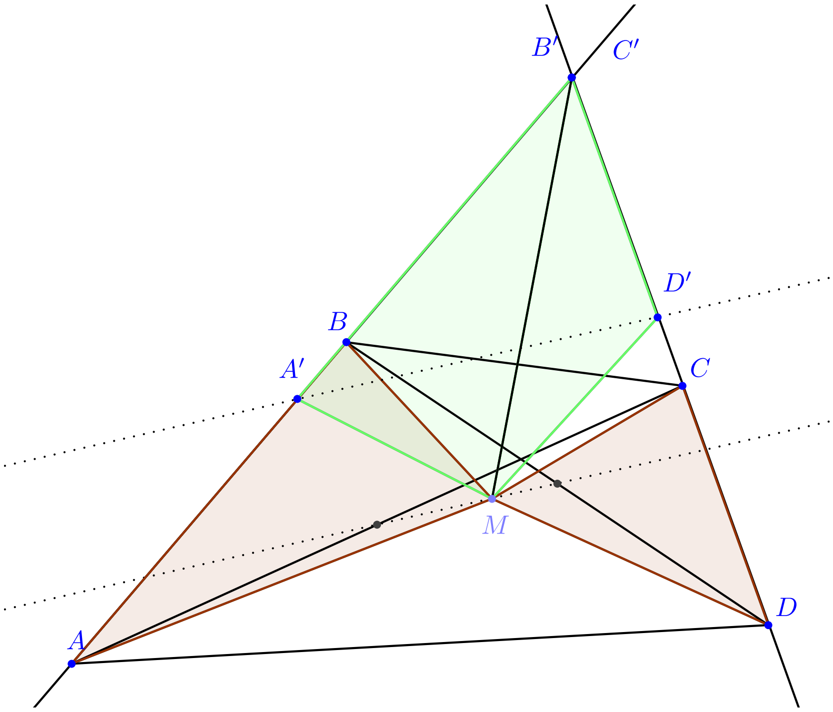
Bizonyítás: 1. Ha az érintőnégyszög minden oldala párhuzamos, akkor rombusz, ebben az esetben a három pont egybe esik.

2. Ha a négyszög nem rombusz, akkor van nem párhuzamos oldalpárja. Először bebizonyítjuk, hogy ha bármely négyszögben, melyben AB és CD szakaszok nem párhuzamosak, akkor azon pontok mértani helye a síkon, amelyekre teljesül, hogy $T_{ABM} + T_{CDM} = t$ állandó, egy egyenes. Legyen az AB és CD szakaszokra illeszkedő egyenesek metszéspontja O. Toljuk el az AB és CD szakaszokat az O pontba (legyen $O \equiv B' \equiv C'$). Tudjuk, hogy

$$T_{ABM} = T_{A'B'M}; T_{CDM} = T_{C'D'M}$$

$$T_{ABM} + T_{CDM} = t = T_{A'B'M} + T_{C'D'M} = T_{OA'MD'} = T_{OA'D'} \pm T_{A'D'M}$$

Mivel $T_{OA'D'}$ nem függ az M pont helyzetétől, ezért állandó. Ebből következik, hogy $T_{A'D'M}$ is állandó. De ekkor az M pont mértani helye egy $A'D'$ -vel párhuzamos egyenes.



Ha $t = \dfrac{T_{ABCD}}{2}$, akkor az egyenesen rajta van az átlók felezőpontjai (súlyvonalak).

Érintő négyszögek esetében mivel $AB + CD = BC + AD$, ezért $AB \cdot r + CD \cdot r = BC \cdot r + AD \cdot r$. Eszerint $T_{ABO} + T_{CDO} = T_{BCO} + T_{ADO} = \dfrac{T_{ABCD}}{2}$

Tehát az előző állítás miatt O rajta van az átlók felezőpontjait összekötő egyenesen.

Források:

1. Dr. Gerőcs László: Azok a csodálatos húrnégyszögek
2. Reimann István-Dobos Sándor: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-2003
3. Geometriai feladatok gyűjteménye I.
4. Schultz János: Elemi matematikai versenyfeladatok
5. http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fuss.shtml