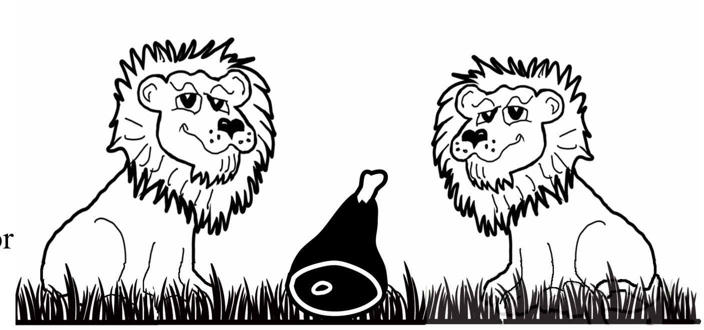
BDG – Matektábor - 7-8. osztály – 2012. október 4. - Csonka Dorottya

A 7-8-os csoport ezen a foglalkozáson csoportban dolgozott. A csoportok a feladatokat papíron leírva kapták meg. Négy feladat típus volt: a **sapkás** (S) , a **kapcsolós** (K), a **zsineges** (Zs) és a **számolós** (E) feladatok. Kezdetben minden egyes feladat típusból megkapták az első feladatot. Majd mikor megoldottak egyet, akkor a csoportból én választottam, hogy ki mondja el a megoldást. Ha sikerült helyesen megoldani és elmondani a megoldást, akkor a csoport tagjai választhattak, hogy a már meglévő feladataikon gondolkodnak tovább, vagy a megoldott feladatra épülő újabb feladatot kérik. Így volt olyan csoport, aki a „sapkás" feladatok közül mind a hetet megoldotta, de volt olyan is, aki minden csoportból közel azonos számú feladattal végzett a foglalkozás végére. (-) jellel jelöltem azokat a feladatokat, amelyekkel végül senki nem foglalkozott.

A problémákat összekötő kapocs az volt, hogy feltettük, hogy a feladatban szereplő egyének ugyanúgy gondolkodnak, ugyanabban a szituációban ugyanazt a következtetést vonják le.

Nézzünk egy példát erre: **két kéményseprő** lemászott egy régi, kormos kéménybe. Az egyikőjük jól összekormozta az arcát, a másiké azonban tiszta maradt. Miután munkájukat elvégezték már nem szóltak egymáshoz egy szót sem. Melyikőjük fogja megmosni az arcát?
Talán meglepő, de a tiszta arcú kéményseprő fogja megmosni az arcát. Ugyanis Ő egy kormos arcú kéményseprőt lát. Úgy gondolkodik, hogy ha a másik arca kormos, akkor nyilván az övé is az, így a tiszta arcú megmossa az arcát. A kormos arcú nem mossa meg az arcát, hiszen ő a társa tiszta arcát látja, és ebből azt a következtetést vonja le, hogy az ő arca is tiszta.

Még egy ismert problémát beszéltünk meg közösen, mielőtt elkezdődött a csoport munka. Ez az **intelligens oroszlánok esete** volt:
Egy szigeten intelligens oroszlánok laknak. Ha egy oroszlán eszik, akkor attól elálmosodik, és ő maga is húsdarabbá változik, így a többiek meg tudják enni az alvó oroszlánt. Egy húsdarabot csak egy oroszlán tud megenni. De egy oroszlán inkább éhen pusztul, minthogy megegyék. Mi történik, ha *n* oroszlánnak ledobnak egy darab húst?



Ha egy oroszlán van, nyugodtan megeheti a húst, mert egyedül van, nem eszi meg senki, amíg alszik. Ha két oroszlán van, akkor ha bármelyikük megeszi a húst, akkor elálmosodik, és a másik azonnal meg tudja tudni enni, miután elaludt. Így, mivel mindkét oroszlán ugyanerre a következtetésre jut, ekkor egyik se eszi meg a húst.
Ha három oroszlán van, akkor a leggyorsabb (vagy a húshoz legközelebb lévő) oroszlán nyugodtan megeheti a húst, mert a másik kettő nem fogja őt megenni, miután innentől a probléma visszavezethető az előző, két oroszlános esetre.
Az oroszlánok számával ez a séma is ismétlődik. Azaz ha a szigeten *páratlan* számú oroszlán van, a leggyorsabb (vagy legközelebb lévő oroszlán) nyugodtan felfalhatja a húst, mert végiggondolja, hogy tettével visszavezeti a problémát egy páros sok oroszlánt tartalmazó esetre. *Páros* sok oroszlán esetében pedig a hús mindig megmarad.

Szabadulás a börtönből – a sapkás feladatok

Egy furcsa börtönben járunk, ahol minden cellában (egyformán) bölcs matematikusok raboskodnak. A börtönőrök szíve megesik a szegény matematikusokon, és különféle feladványokhoz kötik szabadulásukat.

S/1
Az első cellában három bölcs matematikus sínylődik. A börtönőrök hoznak öt sapkát: három feketét és két fehéret, és azt ígérik a bölcs matematikusoknak, hogy ha valaki eltalálja, hogy milyen sapka van a fején, akkor kiszabadul. Mindenki látja a másik sapkáját, csak a sajátját nem. A börtönőrök 2 fekete és egy fehér sapkát adnak a matematikusokra. A rabok egy ideig gondolkodnak, majd az egyik matematikus megmondja, hogy neki fekete sapkája van. Ki is szabadul.
Hogyan gondolkozott?

S/2
Látják az őrök, hogy nem kaptak egyenlő esélyeket ebben a cellában a matematikusok. A következő cellában is három matematikus van. Ide is bemegy a börtönőr, megint előhúzza a 3 fekete és 2 fehér sapkáját, és elmondja a feltételeket: azaz ha valamelyikőjük kitalálja, hogy milyen színű sapka van rajta, akkor kiszabadul a börtönből. Megint mindenki csak a másik sapkáját látja, a sajátját nem. És természetesen a megmaradt sapkákat sem látják a rabok. Hogy most egyenlő esélyekkel induljanak a rabok, most mindegyikük fejére fekete sapkát húz. Ekkor egyszerre jönnek rá, hogy mindegyikük fején fekete sapka van.
Hogyan gondolkoztak?

S/3
A következő cellában is három matematikus van, és hasonlóképp 3 fekete és 2 fehér sapkával tér be a cellába a börtönőr. De most kicsit változtat a feladványán. Magasság szerint sorba állítja őket. A leghátsó, legmagasabb bölcs matematikus látja az előtte állókat, a középső csak a legelöl állót látja. A legelső, legkisebb pedig senkit sem. Mindenkire ad a börtönőr sapkát. Mindegyik matematikust elengedik, ha bármelyikük meg tudja mondani, hogy milyen színű sapka van a fején, de mindet kivégzik, ha akár az egyik is téveszt.
A leghátsó bölcs azt mondja, hogy sajnos nem tudja megmondani, hogy milyen színű sapka van a fején. Ezután a középsőt kérdezik, de sajnos ő sem tudja biztosra megmondani, hogy milyen színű sapka van a fején. Végül a legelsőt kérdezik, aki semmit se lát, ő azonban helyesen megmondja, hogy milyen színű sapka van a fején. És így mindegyik rab sikeresen kiszabadul.
Honnan tudta a legelső, és milyen színű sapka volt a fején?

S/4
A következő cellában négy bölcs matematikus van. Bemegy a börtönőr, és megint magasság szerint állítja sorba a rabokat. De most négy, színes sapkája van. Van egy piros, egy kék, egy zöld, és egy negyedik, aminek a színe megegyezik valamelyik előző színével. Ezeket a sapkákat felteszi a bölcsek fejére, de mindegyik megint csak az előtte lévők sapkáit látja, a sajátját, és a mögötte állókét nem. Az őr a legmagasabbat kérdezi először, majd sorban a többit. Mindegyik bölcs helyesen meg tudja mondani, hogy milyen színű sapka van a fején.
Melyik két matematikuson volt azonos színű sapka?

S/5
A börtönőrnek az a remek ötlete támadt, hogy nem három-négyesével ad lehetőséget a raboknak a szabadulásra, hanem akár az összes okos matematikus is szabadulhat, ha legfeljebb egy rab nem mondja meg helyesen a sapkájának színét. Így amikor a 100 raboskodó matematikus az udvaron levegőzött, mindegyik kapott egy vagy fekete vagy fehér sapkát a fejére. Természetesen nem látta, milyen színűt. Semmilyen jelzést nem adhattak egymásnak, de mindenki körülnézhetett, mindenki

más sapkáját láthatta, Ezek után, valamilyen előre megbeszélt sorrendben és taktika szerint, hangosan megtippelték saját sapkájuk színét. Ez sikerült is nekik.
Mi volt a stratégiájuk?

S/6
Sok évvel később, megint összegyűlt 100 okos matematikus a börtönben. A börtönőrök most azt találták ki, hogy most három sapka (fekete, fehér vagy piros színű) valamelyikét teszik a matematikusok fejére véletlenszerűen. A bölcseket sorba állították úgy, hogy mindenki látja az előtte állók sapkáját, de sajátját és a mögöttük állókét nem. Egyesével kérdi a börtönőr a rabokat. Ha valaki eltalálja a sapkájának a színét, akkor megmenekül, ha nem, akkor meghal. De a tippelés sikerességét csak akkor tudják meg, ha már minden matematikust végig kérdezett a börtönőr. A bölcsek a sapkák megkapása előtt bármilyen stratégiát megbeszélhetnek, még azt is ők dönthetik el, hogy a börtönőr milyen sorrendben kérdezze őket.
A matematikusok nagy nyugalommal mentek ki az udvarra, mert tudták, 99-en közülük ma biztosan kiszabadulnak. És igazuk lett.
Mi volt a taktikájuk?

S/7
Az udvaron gyülekező 100 bölcs matematikus fejére véletlenszerűen fekete vagy fehér sapkát raktak a börtönőrök. Sípszóra mindenkinek fel kell emelnie vagy a bal, vagy a jobb kezét és akkor menekülnek meg a biztos haláltól, ha az azonos színű sapkát viselő matematikusok azonos kezüket emelték fel.
Milyen stratégiát beszéljenek meg a rabok a sapkaosztás előtt?

Kapcsolós feladatok

K/1
A börtönben van két szoba. Az egyikben 3 kapcsoló van, a másikban három lámpa. Minden kapcsolóhoz tartozik egy lámpa, de hogy melyikhez melyik, azt nem lehet tudni. A kapcsolók szobájában a kapcsolókon kívül semmi más nem található, ott tetszőlegesen sok időt eltölthet a rab. De ha úgy dönt, hogy átmegy a másik szobába, többé már nem mehet vissza a kapcsolós szobába. Ha meg tudja mondani, hogy melyik kapcsolóhoz melyik lámpa tartozik, akkor kiszabadul a börtönből.
Mi legyen a taktikája?

K/2
A börtönben 50 cella van. Mindegyikben 2 rab. Tudjuk, hogy van legalább egy rab, aki lopott már a cellatársától. De egy cellában csak egy lopós rab van. Minden rab tudja, hogy ki kit lopott meg, de azt nem tudja, hogy saját cellatársa meglopta-e őt vagy sem. Egyik nap az egyik börtönőrnek elege lesz a hazudozásból, és azt mondja a raboknak: "Ebben a börtönben van legalább egy rab, aki meglopta a cellatársát. Ha bárki rájön, hogy a cellatársa meglopta őt, akkor éjszaka akassza fel a cella ajtajában úgy, hogy másnap reggel mindenki láthassa. Senki sem világosíthatja fel a másikat arról, hogy ki kit lopott meg".
A rabok a börtönőr utasításai szerint cselekednek. Eltelik az első éjszaka, de reggel nincs holttest. Második és a harmadik este sem történik semmi. Végül a 10. éjszaka utáni reggel pár rab felakasztotta a cellatársát. A kérdés, hogy hány rabot loptak meg?

K/3 (-)
Egy börtönőr két elkülönített rabnak mond egy-egy pozitív egész számot, és mindkettőnek elárulja, hogy a két szám különbsége 1. Ezután minden délben megkérdezi a rabokat, tudják-e a másik rabnak mondott számot. Megígéri, hogy ha bármelyikük eltalálja a másik számát, akkor mindketten kiszabadulnak, ha viszont valamelyikük téved, mindketten meghalnak. Az első nap mindkét rab azt

mondja, nem tudja, mi a másik rab száma. A második nap is. Ez így megy 1 évig, amikor az egyik rab végül megmondja a másik rab számat.
Mi volt a két szám, és honnan tudta a rab a helyes választ?

K/4 (-)
Van egy börtön, ahol a cellák közt semmilyen kommunikáció nem lehetséges. Az udvaron van azonban egy kétállású kapcsoló, ami kezdetben le van kapcsolva. A rabok ezzel a kapcsolóval kommunikálhatnak egymással: vagy megváltoztatják a kapcsoló állását vagy nem. Az őrök egyszerre csak egy rabot visznek le sétálni, és teljesen véletlenszerűen választják ki, hogy éppen kicsodát. Megtörténhet így, hogy egy nap egy rabot akár többször is levisznek, de lehet, hogy van olyan rab, aki már egy hete nem volt sétálni. A börtönőrök nem nyúlnak a kapcsolóhoz. A rabok akkor szabadulnak ki, ha valamelyik rab kijelenti, hogy: "Már minden rab volt legalább egyszer sétálni!" és a kijelentés igaz. Különben az összes rabot még aznap kivégzik.
100 rab együtt érkezik, ismerik a börtön adottságait. Milyen stratégiát beszéljenek meg, hogy biztosan kiszabaduljanak?

K/5 (-)
A börtön kijáratát varázslatos kapu őrzi. Ezen a kapun van egy zár. Ez a zár egy korong, rajta 4 lyukkal. A lyukakban van egy-egy kétállású kapcsoló. Egyszerre két lyukba nyúlhatunk bele és a benne lévő kapcsolókat külön-külön átbillenthetjük, ha akarjuk. A kapcsoló állását meg tudjuk állapítani, ha belenyúlunk egy lyukba. Miután kihúztuk a kezeinket a lyukakból, a varázslatos kapu őrült sebességgel megpörgeti a korongot úgy, hogy utána nem tudjuk már, melyik lyukba nyúltunk előtte. Akkor fog a kapu kinyílni, ha minden kapcsoló ugyanolyan állásba került.
Van-e esélyük kijutni a raboknak, ha minden rab tízszer próbálkozhat?

Számolós feladatok

E/1
Három hiú, de kárörvendő hölgy elbóbiskolt egy táborban. Egy csintalan gyerkőc mindhármuk homlokára vicces rajzokat rajzolt, majd kacagva elszaladt. Amikor a hölgyek felébredtek, és meglátták egymást, nevetni kezdtek. Egyszer csak az egyik elhallgatott. Miért?

E/2
Miután a három hiú hölgy lemosta homlokáról a firkákat, társasjátékozni szerettek volna. A kört a legfiatalabb kezdi a játékban. De a hölgyek a világért se akarták elárulni egymásnak a korukat. Hogyan dönthették el mégis, hogy ki közülük a legfiatalabb, és a legidősebb, úgy, hogy ezen kívül semmi más információt ne szerezhessen egyikőjük se a másik életkoráról? Bármennyit sugdolózhattak egymással.
Mit csináljanak?

E/3 (-)
Két matematikus találkozik, akik nagyon rég nem látták egymást. Beülnek egy kávézóba és beszélgetni kezdenek.

- Mi újság nálad régi barátom?
- Képzeld van három fiam!
- Gratulálok! Mennyi idősek?
- Azt nem mondom meg, de azt elárulom, hogy az évszámaik szorzata 36.
- Ebből még nem tudom megállapítani.
- Azt is megmondom, hogy évszámaik összege megegyezik a szemközti ház ablakainak számával.
- Ebből még mindig nem tudom.
- A legidősebb fiam vörös hajú és szemüveges.

- Köszönöm, most már tudom mennyi idősek!

Hány évesek a matematikus fiai?

E/4 (-)

– Három elefántot kell a hajóra tenni – mondja a kapitány az első tisztnek.
– Hány évesek az elefántok? – kérdezi az első tiszt.
– Mindegyik idősebb 2 évesnél és életkoruk szorzata 2450.
– Mennyi az életkoruk összege?
– Abból még úgyse tudnád meg az életkorukat pontosan – legyint a kapitány -, de annyit azért elárulok, hogy az egyik elefánt idősebb nálam.
– Akkor már tudom, hány évesek az elefántok – örül az első tiszt.

Feltéve, hogy tényleg tudta....hány éves a kapitány?

E/5 (-)

Három ovis egy zsák üveggolyót kapott, amit szerettek volna igazságosan elosztani. Akárhogyan is osztogatták a golyókat, nem jutottak egyezségre. Elkezdtek vitatkozni, kis híján össze is verekedtek. Átraktak golyókat egyik halomból a másikba, a másikból a harmadikba, de egyikőjük mindig elégedetlen volt a neki jutó résszel.

- Bárcsak ketten lennénk! - kiáltott fel az egyik ovis – akkor egy szempillantás alatt megosztoznánk. Két egyforma részre osztanám az aranyat, a másik meg választana. Így mindketten elégedettek lennénk.

Ez a gondolat szöget ütött mindegyikőjük fejében, és rájöttek, hogyan tudnák úgy szétosztani a golyókat, hogy mindegyikőjük meg legyen győződve arról, hogy nem kapott kevesebbet a harmadiknál.

Mit találhattak ki?

E/6 (-)

Nagypapa egy karosszékben ül, és egy családi fényképet nézeget két unokájával, Zsombival és Somával.

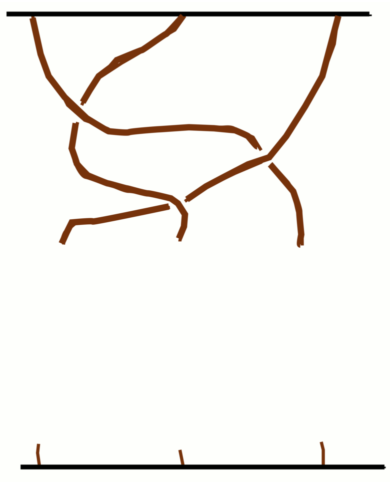
− Ezen a képen rajta van az egész család, a 97 éves dédpapátoktól egészen a legfiatalabbig, a 3 éves kistestvéretekig – mondja nagypapa − Játszunk egy játékot! Én gondolok két emberre a képen, egyikőtöknek megmondom a két ember életkorának szorzatát, a másiknak pedig az összegét. Ti pedig mondjátok meg hogy hány évesek akikre gondoltam!

Miután nagyapa megsúgta Zsombinak a két életkor szorzatát, Somának a két életkor összegét, Zsombi megszólalt:

- Nem tudom, mi lehet a két szám.
- Én sem tudom, de azt tudtam előre, hogy te nem fogod tudni! - válaszolt Soma.
- Ja, akkor már tudom. - kiáltott fel Zsombi.
- Akkor már én is tudom! - mondta végül Soma.

Milyen életkorokra gondolt nagyapa?

Zsineges feladatok



Zs/1

Fejezd be a rajzot úgy, hogy kifeszítve 3 párhuzamos kötelet lássunk!

Zs/2

A börtönbe becsempésztek 2 azonos hosszúságú, nem homogén tömegeloszlású kötelet, és rengeteg gyufát. Minden cella ajtónak van egy olyan hiányossága, hogy miután az ebéd miatt kinyitották, rá pontosan 60 perccel egy másodpercre kinyílik. Azonban ha máskor érünk hozzá, akkor megráz minket az áram. Ki tudjuk-e mérni nagyon pontosan a 60 percet, ha csak azt tudjuk, hogy az egyik zsineg 20 perc alatt, a másik 80 perc alatt ég le? (Azaz lehet, hogy 19 percig a zsinór 2%-a ég le, majd az utolsó percben a maradék 98%-a)

b.) Mérj ki a 20 és 80 perces zsinóroddal 90 percet!
c.) Mérj ki a 20 és 80 perces zsinóroddal 70 percet!
d.) Mérj ki a 20 és 80 perces zsinóroddal 50 percet!
e.) Mérj ki a 20 és 80 perces zsinóroddal 30 percet!
f.) Mérj ki a 20 és 80 perces zsinóroddal 35 percet!

Zs/3
A börtön 40 méteres függőleges faláról szeretne leereszkedni menekülés közben a rab. Semmije sincs, csak egy 30 méter hosszú kötele és egy bicskája. És segítség képen a börtönfal tetejénél, és felénél, azaz 20 méteres magasságban egy korábbi szökés eredményeképpen egy-egy kiszögelés, ahol megállhat, és odakötheti a kötele végét, de azt rángatással távolról kioldani nem tudja. Ugrani természetesen nem ugorhat.
Hogyan tud lejutni ép bőrrel a börtönfalról?

Zs/4
Mely képek mutatják ugyanazt a kötelet kigubancolás vagy becsomózás után?