Kilépés a térbe

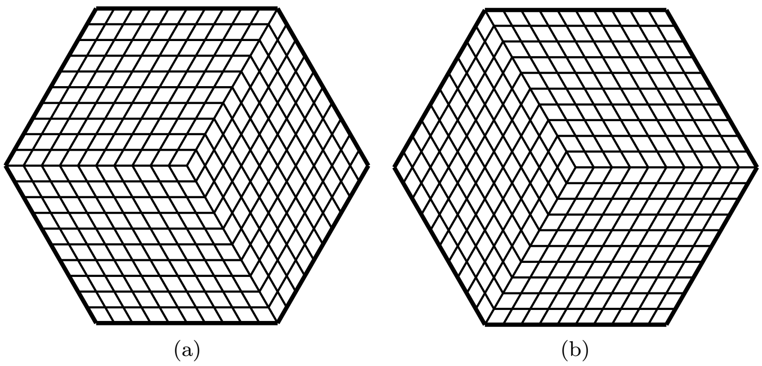
A síkból való kiugrás élvezete

Vladimir Dubrovsky és Igor Sharygin

Tudod, hogy hogyan lehet hat gyufából négy olyan egyenlő oldalú háromszöget kirakni, amelyek minden oldala egész gyufából áll? Ha még soha nem hallottál erről a feladványról, akkor nagyon nehéznek fogod találni. Sőt, talán egészen addig, amíg a síkon próbálkozol azt fogod gondolni, hogy megoldhatatlan. (Valójában az is – bizonyítsd be!) Tehát a megoldás kulcsa az, hogy hagyjuk el a síkot és tekintsük a problémát egy három-dimenziósként. Ezzel a segítséggel már könnyedén megoldható a probléma, hiszen csak egy tetraédert kell építened.

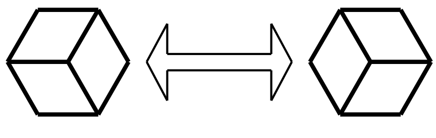
Ez egy példa arra, hogy ki kell lépnünk a térbe annak érdekében, hogy meg tudjunk birkózni a problémával. Azonban még rengeteg olyan síkgeometriai probléma van, amelyben a harmadik dimenzió hozzáadásával egy új, váratlan megközelítést nyerünk (bár a síkon is megoldhatóak lennének). Ezt bizonyos értelemben hasonlíthatjuk olyan földi problémákhoz is, mint például az időjárás-előrejelzés, térképek rajzolása vagy ásványkincsek felfedezése, amelyek az űrből, műholdak segítségével hatékonyabban megoldhatóak. Ezért döntöttünk úgy, hogy a *Quantum* „űr-számába" tesszük ezt a cikket.

Néha egy síkgeometriai probléma megoldásához csak bámulni kell az ábráját, amíg hirtelen észre nem veszed, hogy egy természetes három-dimenziós alakzatot látsz. Ezzel együtt a megoldás szó szerint kipattan a fejedből, és megvilágosodsz. Az egyik leghatásosabb példával kezdjük.



1. ábra

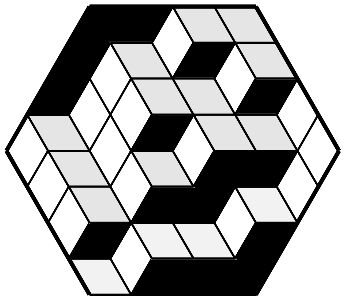
Csempézés rombuszokkal. *Az 1(a) ábrán egy 10 egység oldalú szabályos hatszög látható 1 egység oldalú rombuszokkal kitöltve. Egy lépésben a 2. ábrán látható módon rendezhetünk át hármasokat. Bizonyítsuk be, hogy bizo-*



2. ábra

nyos számú lépés után megkaphatjuk az 1(*b*) *ábrán látható elrendezést, és ez a szám nem kisebb, mint 1000.*

A 3. ábra demonstrálja a megoldás ötletét. (Itt csak négy egység oldalú a hatszög, de ez nem baj, mert a lényeg ugyanaz.) Tekintsük a hatszöget egy kockának, amely részben kisebb kockákkal van kitöltve. Az átláthatóság kedvéért most a kockák lapjai irányuknak megfelelően háromféle árnyékolást kaptak. Kiindulásként tehát egy üres (előlalpjait eltávolított) $10 \times 10 \times 10$-es kockánk van, míg végül egy ugyanilyen $1 \times 1 \times 1$-es kiskockákkal teli kockát kell kapnunk. Egy lépésben (1) egy új egységet helyezünk el, egy, a korábban elhelyezett kiskockát alakította mélyedésbe vagy (2) éppen egy olyan már meglévő egységet tüntetünk el, amelyen nincsenek más kiskockák. A nagy kocka könnyen kitölthető úgy, hogy a kiskockákat egyesével helyezzük el. Ez biztos nem lesz kevesebb, mint $10^3 = 1000$ lépés. Az olvasó (gondolom majd mi) még megpróbálhatja bebizonyítani, hogy bármely két elrendezés megkapható egymásból nem több, mint 1000 lépésben.



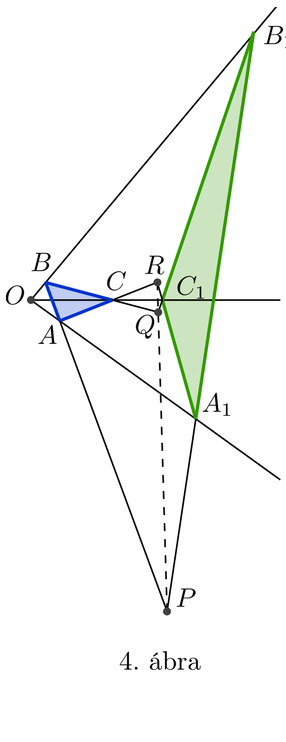
3. ábra

Ez a csempézési feladat nem egy klasszikus probléma. A most következő azonban igazán klasszikus példája a „térbe való kilépésnek”.

Desargues-tétel (4. ábra). Legyen ABC és $A_1B_1C_1$ két háromszög a síkban. Az AB és A_1B_1, BC és B_1C_1, valamint CA és C_1A_1 egyenesek metszéspontjai legyenek redre P, Q, és R. Ha az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok egy és ugyanazon O ponton mennek át, akkor P, Q és R egy egyenesre esik.

A tétel bizonyítása a síkon korántsem egyszerű. Viszont majdhogynem triviális problémává válik, ha egy olyan három-dimenziós alakzat képeként tekintjük, ahol három nem azonos síkban fekvő OA, OB és OC egyenes két különböző síkkal (ABC és $A_1B_1C_1$) van elmetszve. A P, Q és R pontok mindkét síkon rajta vannak. Két különböző sík metszéspontja egyenes, tehát P, Q, és R egy egyenesen helyezkednek el.

Hogy a fenti megoldás alapgondolatát világosabbá tegyük, a megfelelő térbeli alakzat létezését természetesnek vettük. Azonban valójában még be kell látnunk, hogy léteznek azok a nem egy síkban lévő pontok és egyenesek, amelyeknek a (párhuzamosan vetített) képe egy tetszőleges ábrára kielégíti a Desargues-tétel feltételeit (mint a 4. ábrán). Jelen esetben a bizonyítás nem jelent problémát,

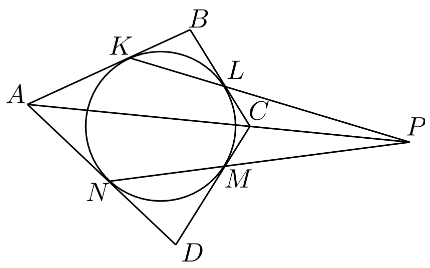


4. ábra

de néha – mint az lejjebb látni fogjuk – a megfelelő térbeli értelmezés egy külön bizonyítást igényel.

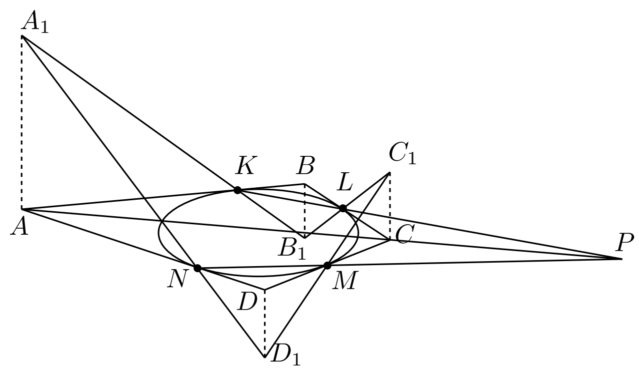
A csuklós négyszög.

Az $ABCD$ négyszög beírt köre az AB, BC, CD és DA oldalakat rendre a K, L, M, N pontban érinti (5. ábra). Bizonyítsuk be, hogyha KL és MN metszik egymást, akkor a metszéspontjuk az AC egyenesen van.



5. ábra

Hajlítsuk be a négyszöget a csúcsainál úgy, hogy a csúcsok maradjanak az eredeti négyszög csúcsaiból a felületére merőleges egyenesen, és az így keletkezett négyszög ($A_1B_1C_1D_1$) oldalai menjenek át a K, L, M és N pontokon (6. ábra).



6. ábra

Ha ezt a megfelelő négyszöget kész vagy elképzelni, akkor azonnal befejezhetjünk a bizonyítást. Legyen KL és MN metszéspontja P. Ekkor P rajta van az $A_1C_1B_1$ és $A_1C_1D_1$ síkon, vagyis a metsztésvonalukon van, amely az A_1C_1 egyenes. Mivel A_1 és C_1 merőleges vetülete A és C, ezért AC is átmegy P-n. (Az olvasó még bebizonyíthatja, hogyha KL és MN párhuzamos egymással, akkor AC is párhuzamos velük.)

Nem tűnik valamiért rossznak ez a bizonyítás? Mire kellett a beírt kör? Hamarosan meg fogjuk találni a választ, ahogy megpróbálunk megszerkeszteni egy megfelelő $A_1B_1C_1D_1$ négyszöget. Állítsunk merőlegeseket az $ABCD$ síkra a négyszög csúcsaiban. Vegyük fel A_1-et az A-ra merőleges egyenesen valahol. Kössük össze A_1-et K-val. Ez kimetszi B_1-et a B-ben állított merőlegesből. Kössük össze B_1-et L-lel. Ez kimetszi C_1-et a C-ben állított merőlegesből. Kössük össze C_1-et M-mel. Ez hasonlóan kimetszi D_1-et. Tehát a négyszög A_1B_1, B_1C_1 és C_1D_1 oldalainak megszerkesztése nem jelent problémát. Azonban nem lehetünk biztosak abban, hogy az A_1D_1 oldal átmegy az N ponton. Ez akkor teljesül, ha $A_1NA\sphericalangle = D_1ND\sphericalangle$, így ezt be kell bizonyítanunk. Itt jön a képbe a kör.

Mivel az AK és AN érintők egyenlőek, ezért az A_1AN és A_1AK háromszögek egybevágóak, így $A_1NA\sphericalangle = AK_1A\sphericalangle$. $A_1KA\sphericalangle = B_1KB\sphericalangle$, mert csúcsszögek. Az előzőek miatt $B_1KB\sphericalangle = B_1LB\sphericalangle$. $B_1LB\sphericalangle = C_1LC\sphericalangle$, mivel csúcsszögek. Az előzőek miatt $C_1LC\sphericalangle = C_1MC\sphericalangle$. $C_1MC\sphericalangle = D_1MD\sphericalangle$, mert csúcsszögek. Az előzőek miatt $D_1MD\sphericalangle = D_1ND\sphericalangle$. Tehát

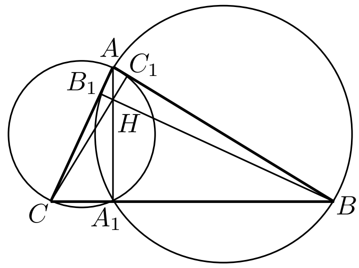
$$A_1NA\sphericalangle = D_1ND\sphericalangle,$$

azaz elkészíthető a megfelelő négyszög, így a bizonyítás is jó.

A harmadik-dimenzió hozzáadásával kicseréltük három egyenes metszetét három sík metszetére. A következő példában három egymást metsző gömbbel bizonyítunk.

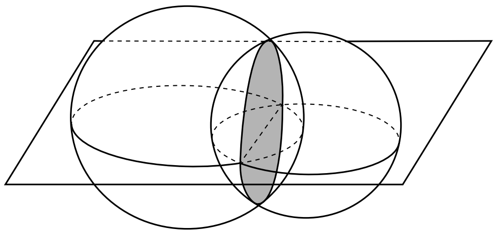
Magasságpont. *A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.*

Igazából csak az ABC hegyesszögű háromszögre fogunk bizonyítani (7. ábra), mivel csak így lehet hatékonyan használni a síkból való kilépést. Az AA_1 magasságvonal mindkét körnek húrja, amelyeknek AC illetve AB az átmérőjük. A körök fölé írt ugyanakkora átmérőjű gömbök metszésvonala egy ω kör, amelynek átmérője AA_1, és merőleges a háromszög síkjára (8. ábra). Így AA_1, az ω kör ABC síkra való merőleges vetülete. Hasonlóan a másik két magasság is merőleges vetülete a két gömbnek a harmadik (BC átmérőjű) gömbbel alkotott metszetének.



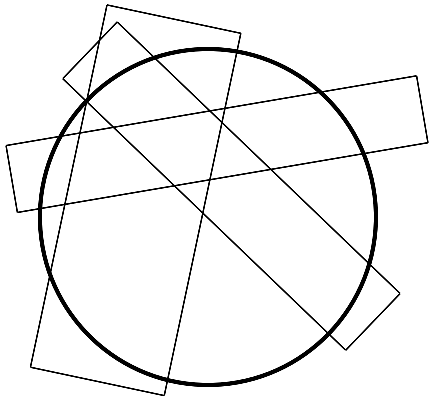
7. ábra

Most meg kell mutatnunk, hogy a három gömbnek van közös pontja, mivel ennek az ABC síkra vett merőleges vetülete (H) bármely két gömb metszetének merőleges vetületén rajta van, így rajta van a három magasságvonalon. Mivel az A-nál lévő szög hegyesszög, ezért A kívül esik a BC átmérőjű gömbön. Mivel a B-nél és C-nél lévő szögek is hegyesszögek, ezért A_1 pont rajta van BC szakaszon, tehát a gömbben is benne van. Az előzőek alapján az ω kör két pontban metszi a BC átmérőjű gömböt. Ezt a két pontot mindhárom gömb tartalmazza, tehát készen vagyunk.



8. ábra

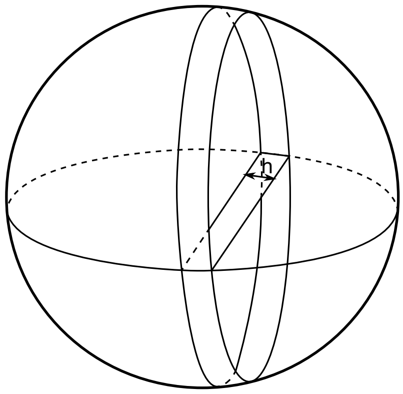
Mindeddig mikor kiléptünk a síkból, hogy három dimenzióban oldjunk meg egy síkbeli feladatot, a megoldások mindig nagyon tiszták és érthetőek voltak. Eddig megúsztuk mindenféle formulák és tételek használata nélkül. Egyes megoldások elképesztően gyönyörűek, és nagyon könnyűnek tűnnek. A következő példa, talán pont ezeknek az ellenkezője lesz. Használnunk kell majd csak felsőfokon tanított térgeometriai tételeket. A kérdés csak az, hogy ezeket hogyan tudjuk használni a „teljesen síkbeli" problémáknál.



9. ábra

Csíkok a körön. *Bizonyítsd be, hogy egy kör nem fedhető le pár olyan csíkkal, amelyek össz-szélessége kisebb, mint a kör átmérője (9. ábra).*

Tekintsünk egy gömböt az adott körrel megegyező középpontal és sugárral. A kör egy olyan részét, amely le van fedve egy tetszőleges csíkkal, tekintsük a gömb két párhuzamos sík közé eső részének (a síkok merőlegesek a kör síkjára – 10. ábra). A gömb egy ilyen részének felszíne a "gömböv", amelynek felülete πDh, ahol D a gömb átmérője és h a csík szélessége. Ekkor a csíkok által alkotott teljes lefedettség ekkor πDH, ahol H a csíkok össz-szélessége. Mivel $H < D$, az összlefedettség kisebb, mint a gömb felszíne (πD^2). Mivel a gömbövek nem fedik le a teljes gömböt, ezért a gömbövek vetületei sem fedik le az egész kört.

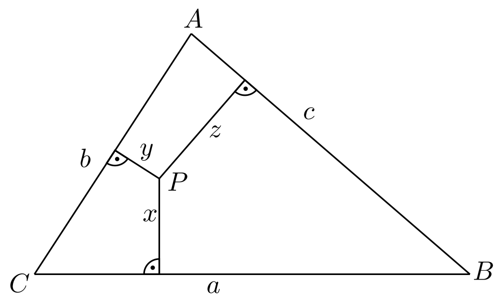


10. ábra

Az utolsó példánk egy háromdimenziós koordinátarendszert használ egy kétdimenziós problémához.

A Lemoin-pont. *Legyen x, y és z a P pont távolsága az ABC háromszög a, b illetve c oldalaitól (11. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + y^2 + z^2$ akkor a legkisebb, ha*

$$x : y : z = a : b : c.$$

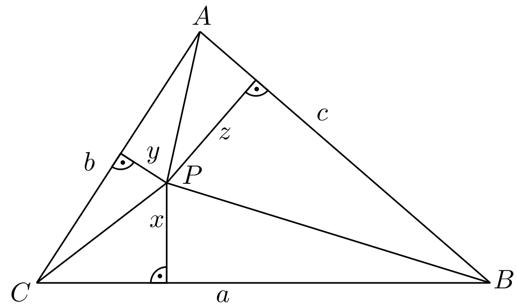


11. ábra

Bármely P pontnak megfeltethető egy térbeli (x, y, z) koordinátájú pont, ahol x, y és z a kérdésben szereplő távolságok. Az (x, y, z) pont a koordinátarendszer első térnyolcadában van (ahol nincsenek negatív koordináták) és kielégíti az

$$ax + by + cz = 2T_{ABC}$$

egyenlőséget, mivel az ABC háromszög három részre darabolható: BCP, CAP és ABP, amelyek területe redre: $\frac{ax}{2}$, $\frac{by}{2}$ és $\frac{cz}{2}$ (12. ábra).



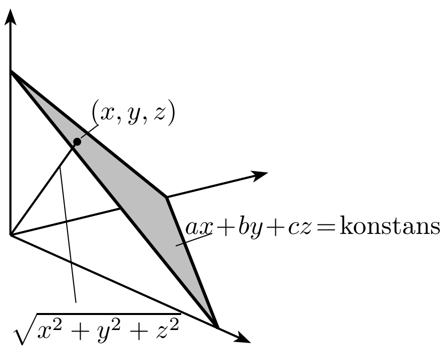
12. ábra. $T_{ABC} = T_{BCP} + T_{CAP} + T_{ABP}$

Most felhasználunk két állítást, amely minden háromdimenziós koordinátarendszerre teljesül:

(1) Az $ax + by + cz =$ konstans függvény képe egy sík, amely merőleges az (a, b, c) vektorra (hacsak nem nullvektor).

(2) Az (x, y, z) pont origótól mért távolsága: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Az (1)-ből következik, hogy a térnek azon pontjai, amik megfelelnek az ABC háromszög belső pontjainak, szintén egy háromszöget alkotnak (13. ábra) – ez az a háromszög, amely az előbbi sík pozitív térnyolcadba eső része. (Egyébként a három koordinátatengely síkkal alkotott metszéspontjának távolsága az origótól egyenlő az ABC háromszög három magasságával – bizonyítsd be!) (2)-ből következik, hogy az ABC háromszög azon pontja, amelyre $x^2 + y^2 + z^2$ a lehető legkisebb (Lemoine-pont) a háromszögnek az origóhoz legközelebb eső (x, y, z) pontja – vagyis az origóból a síkra állított merőleges talppontja. Azonban – ahogy korábban is mondtuk – az (a, b, c) vektor is merőleges a síkra. Tehát az (a, b, c) vektor párhuzamos az (x, y, z) vektorral, így (a vektorgeometria egy alapvető tényéből következően) a koordinátáik aránya azonos. Ezzel kész a bizonyítás.



13. ábra

Az olvasóra hagyjuk, hogy az előzőekből bebizonyítsa, hogy a Lemoine-pont az úgynevezett szimmediánok metszéspontja – ezek a háromszög súlyvonalainak a megfelelő szögfelezőkre vett tükörképei.

Feladatok:

1. Adott három egy pontból induló félegyenes, amelyek három részre osztják a síkot. Mindegyik félsíkban adott egy pont. Szerkesszünk háromszöget, melynek csúcsai az adott félegyeneseken vannak, és oldalai átmennek az adott pontokon.

2. Az adott K, L, M és N pont rendre rajta van az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD és DA oldalán. Bizonyítsuk be, hogyha KL, MN és AC egy ponton mennek át vagy párhuzamosak, akkor ez ugyanúgy igaz LM-re, NK-ra és BD-re.

3. Bizonyítsuk be a következő tételt:

   BRIANCHON TÉTELE. Az érintőhatszög szemköztes csúcsait összekötő átlók egy ponton mennek át.

4. Három körből mindegyik metszi a másik kettőt. Bizonyítsuk be, hogy a közös húrok egyenesei egy ponton mennek át.

5. Húzzuk meg egy kör húrjait, a benne lévő fix A ponton keresztül. A húr végpontjaiban állított érintők az M pontban metszik egymást. Mi az M pontok halmaza?

6. Négy gyalogos A, B, C és D állandó sebességgel haladnak négy egyenes úton. Egyik út sem páruzamos a másikkal. A, B és C találkoznak egymással, D találkozik A-val és B-vel. Bizonyítsuk be, hogy D is találkozik C-vel.