

Tangram

A 7-8-os foglalkozás első részében minden diák kapott 16 darab egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszöget.

1. Készíts sokszögeket a háromszögek felhasználásával (a háromszögek hézagmentesen kerüljenek egymás mellé, belső szakaszok mindkét oldalán végig kell hogy "érjenek" a háromszögek).
2. Készíts konvex sokszögeket az előző feltételek figyelembe vételével.

A négyzethálós táblára több konvex alakzatot felrajzoltak.

A sokszögek kirakása után a következő észrevételeket tették a diákok:

Az egyenlőszárú háromszög befogóit r -el az átfogóját i -vel jelöltük. (Racionális, irracionális) Az állításokat nem bizonyítottuk!

1. Az egyenlőszárú derékszögű háromszögekből alkotott konvex alakzat belsejében található szakaszok két oldalán csak azonos számú r illetve i típusú szakasz van.

Megjegyzés: Bizonyítás: ha a szakasz egyik oldalán a db egységnyi és b darab $\sqrt{2}$ hosszúságú oldal van, a másikon pedig c illetve d . Akkor fenn áll a következő:

$$\begin{aligned}a + b\sqrt{2} &= c + d\sqrt{2} \\ a - c &= (d - b)\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $a - c = 0 \Rightarrow a = c$ illetve $b - d = 0 \Rightarrow b = d$.

2. Egy belső szakasz két oldalán nincs egyszerre r és i típusú szakasz.
3. A konvex alakzat oldalain vagy minden háromszög oldal r vagy i típusú.
4. Az oldalak 45° -ként váltanak típust. Vagyis ha két szomszédos oldal r és i , akkor a sokszög szöge 45° vagy 135° ha azonos típusú oldalak szomszédosak, akkor a szögük 90° .
5. A kirakott konvex sokszög legfeljebb nyolcszög lehet.

Megjegyzés: Ezt az állítást bizonyítottuk is. Mivel a legnagyobb szög 135° lehet, ezért az n szög belső szögeinek összege legfeljebb $n \cdot 135^\circ$ lehet.

$$\begin{aligned}n \cdot 135^\circ &\geq (n - 2) \cdot 180^\circ \\ n \cdot 135^\circ &\geq n \cdot 180^\circ - 360^\circ \\ 360^\circ &\geq 45^\circ \cdot n \\ 8 &\geq n\end{aligned}$$

6. A konvex sokszögek mindegyike beírható egy téglalapba úgy, hogy a téglalap oldalain az r típusú oldalak legyenek.

Ezek után a gyerekek mind a 16 háromszöget felhasználva raktak ki konvex sokszögeket. A megoldások felkerültek a táblára, majd módszeresen megpróbáltuk az összes lehetséges esetet megtalálni.

A módszer során a lehetséges téglalapokat vettük sorra.

Ábrák!!!!

Összesen 20 eset van.

Ezután kapták meg a gyerekek a klasszikus kínai tangramot, melyben az alakzatok összesen 16 egyenlőszárú háromszöget tartalmaznak. A kínai tangram összesen 7 elemből áll (2 db nagy (8-8 kis háromszögből álló) egyenlőszárú derékszögű háromszög, 1 közepes (4 kis háromszögből álló) egyenlőszárú derékszögű háromszög, 2 kicsi (2-2 kis háromszögből álló) egyenlőszárú derékszögű háromszög, 1 négyzet (4 kis háromszögből álló), 1 paralelogramma (4 kis háromszögből álló)).

A következő amire nem maradt idő a foglalkozáson az lett volna, hogy az adott alakzatokból melyik konvex sokszöget lehet kirakni.

A foglalkozás végén különböző alakokat, paradoxonokat raktak ki a diákok.