Geometriai módszerek algebrai egyenlőtlenségeknél
Matektábor 2011

1. Milyen valós x valós szám esetén lesz legkisebb a $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-20x+101}$ kifejezés értéke?

(ADMV H/III/ 2010/11 1. forduló)

Mo.:

Alakítsuk át a kifejezést: $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-20x+101}=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(10-x^2)+1}$

Helyezzük el a koordinátarendszerben a $A(0;3), B(10;1)$ és $P(x;0)$ pontokat.

Ekkor $PA=\sqrt{x^2+9}$ és $PB=\sqrt{(10-x^2)+1}$

Tehát a $PA+PB$ szakaszok összegének a minimumát keressük. Nyilván valóan a minimum csak a $0<x<10$ intervallumból kerülhet ki. Tükrözzük a B pontot az x tengelyre, legyen a tükörkép B'. A $PA+PB=PA+PB'$ akkor minimális, ha a P pont az AB' szakasz és az x tengely metszéspontjában van. AZ AB' egyenes egyenlete $y=-\frac{2}{5}x+3$. Metszéspont $P(\frac{15}{2};0)$.

Tehát az eredeti kifejezés az $x=7,5$ esetén lesz miniméális.

2. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget (a,b valós számok):

$$8a+15b\le 17\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

Mo.1.: Ha $8a+15b<0$, akkor teljesül az egyenlőtlenség, különben emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$8^2a^2+15^2b^2+2\cdot 8\cdot 15\cdot ab\le 17^2\cdot(a^2+b^2)$$

Nullára rendezve:

$$0\le 15^2a^2+8^2b^2-2\cdot 8\cdot 15\cdot ab=(15a-8b)^2$$

És ez mindig teljesül.

Mo.2.: Legyen $\underline{p}(8;15)$ és $\underline{q}(a;b)$. A skaláris szorzat tulajdonságából adódik, hogy

$$8a+15b\le\sqrt{8^2+15^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=17\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

És ez a bizonyítandó állítás.

3. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget (a,b,c valós számok):

$$3a+4b+12c\le 13\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Mo.1.:

Itt nem működik a négyzetre emelés. Legyen $\underline{p}(3;4;12)$ és $\underline{q}(a;b;c)$. A skaláris szorzat tulajdonságából adódik, hogy

$$3a+4b+12c\le\sqrt{3^2+4^2+12^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=13\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

És ez a bizonyítandó állítás.

4. Legyenek a, b, c olyan valós számok, amelyekre $a+b+c=1$ és $a,b,c\ge -0{,}25$. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le\sqrt{21}.$$

NMMV 1994. 11. évfolyam

Mo.1.: Használjuk fel a számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le 3\cdot\sqrt{\frac{4a+1+4b+1+4c+1}{3}}$$

A jobb oldalon a gyökjel alatt pontosan $\frac{7}{3}$ fog állni, hiszen $a+b+c=1$, ha a 3-at bevisszük a gyökjel alá, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le 3\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}=\sqrt{21}$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Mo.2.: Legyen $\underline{a}(1;1;1)$ és $\underline{b}(\sqrt{4a+1};\sqrt{4b+1};\sqrt{4c+1})$

Vegyük a két vektor skaláris szorzatát

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4a+1+4b+1+4c+1}\cdot\cos(\varphi)$$

Mivel $\cos(\varphi)\le 1$, ezért

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le\sqrt{3}\cdot\sqrt{4a+1+4b+1+4c+1}=\sqrt{21}$$

5. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{5\left(x^2+2yz\right)}+\sqrt{6\left(y^2+2zx\right)}+\sqrt{5\left(z^2+2xy\right)}=4(x+y+z)!$$

NMMV 2003. 12. évfolyam

Mo.: Egyrészt az egyenlet bal oldala miatt $x+y+z\geq 0$, másrészt ez az oldal felírható az $\left(\sqrt{5};\sqrt{6};\sqrt{5}\right)$ és a $\left(\sqrt{x^2+2yx};\sqrt{y^2+2zx};\sqrt{z^2+2xy}\right)$ vektorok skaláris szorzataként. A jobb oldalon pedig ezen vektorok nagyságának szorzata áll. Ez pedig a feltételek miatt akkor és csak akkor állhat fenn, ha az egyik vektor a másik skalárszorosa, vagyis

$$\frac{x^2+2yz}{5}=\frac{y^2+2zx}{6}=\frac{z^2+2xy}{5}.$$

Ebből az egyenletrendszerből $x^2-z^2=2y(x-z)$ adódik, így vagy $x=z$, vagy $x+z=2y$ lehetséges.

Ha $x=z$, akkor $\frac{x^2+2yz}{5}=\frac{y^2+2x^2}{6}$ azaz $4x^2-12xy+5y^2=0$, ahonnan $y=\frac{2}{5}x$ vagy $y=2x$ adódik. Ezekből kapjuk a következő megoldásokat: $\left(a;\frac{2}{5}a;a\right)$ és $(a;2a;a)$, ahol a tetszőleges nemnegatív szám.

Ha $x+z=2y$, azaz $z=2y-x$, akkor visszahelyettesítve a következőkhöz jutunk: $\frac{x^2+2y(2y-x)}{5}=\frac{y^2+2x(2y-x)}{6}$, amelyből $16x^2-32xy+19y^2=0$ adódik. Ennek az egyenletnek csak az $x=y=0$ triviális megoldása van a valós számok körében, mert az egyenlet diszkriminánsa negatív: $D=4(16^2-16\cdot 19)<0$. Így ebben az esetben $z=0$, ekkor a megoldás tehát: $(0;0;0)$.

6. Bizonyítsuk be, hogy négy különböző, nemnegatív valós szám közül kiválasztható kettő (x és y), amelyekre

$$\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

NMMV 2010. 12. évfolyam

Mo.1.: Minden a valós számhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhető az $\underline{a}(1,a)$ vektor. Így az x-hez az $\underline{x}(1,x)$, az y-hoz pedig az $\underline{y}(1,y)$ vektorok rendelhetők.
Legyen a két vektor hajlásszöge α. Két vektor skaláris szorzatának segítségével felírható, hogy

$$\cos\alpha=\frac{\underline{x}\cdot\underline{y}}{|\underline{x}|\cdot|\underline{y}|}=\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}.$$

Tehát a feladat állítása ekvivalens a $\cos\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenséggel, ahol α a két vektor hajásszögének mértéke. Az $\underline{a}(1,a)$ „típusú" vektorok végpontjai az $x=1$ egyenes I. síknegyedben lévő pontjai, valamint az abszcisszára eső pontja. Osszuk fel az I. síknegyedet 3 darab O középpontú, $30°$-os szögtartományra. A skatulya-elv értelmében a négy vektorból legalább kettő ugyanabba a szögtartományba (vagy annak határvonalára) esik. Így a két vektor hajlásszögére igaz, hogy $\alpha\leq 30°$, azaz $\cos\alpha\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ugyanakkor az y tengelyre nem illeszkedhet a szerkesztett vektorok közül egyik sem, tehát nem lehetséges az, hogy a négy vektor közül bármely kettő szögének mértéke $\geq 30°$. Emiatt az egyenlőtlenség szigorú.

Mo.2.: Minden $x\geq 0$ valós szám esetén létezik $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ úgy, hogy $x=\mathrm{tg}\varphi$. Ugyanakkor, ha $x=\mathrm{tg}\varphi$ és $y=\mathrm{tg}\omega$, akkor

$$\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}=\frac{1+\mathrm{tg}\varphi\cdot\mathrm{tg}\omega}{\frac{1}{\cos\varphi}\frac{1}{\cos\omega}}=\cos|\varphi-\omega|.$$

Ha $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ és φ_4 a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallum elemei, akkor létezik $i,j\in\{1,2,3,4\}$ úgy, hogy $\cos|\varphi_i-\varphi_j|>\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ennek igazolása érdekében feltételezhetjük, hogy $\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\varphi_4$, tehát a $\varphi_{i+1}-\varphi_i$ különbségek közül a legkisebb biztosan kisebb, mint $\frac{\pi}{6}$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\cos\min_{1\leq i\leq 3}|\varphi_{i+1}-\varphi_i|>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség:

Adott $a_1,a_2;\ldots,a_n$ és $b_1;b_2;\ldots,b_n$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

Egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

Bizonyítás 1.:

Tekintsük a $\underline{p}(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ és a $\underline{q}(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ vektorokat és ezek skaláris szorzatát:

$$\underline{p} \cdot \underline{q} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} \cdot \cos\phi$$

Melyből:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

következik. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\cos\phi = 1$, azaz $\phi = 0°$, tehát a két vektor azonos irányú, melyből következik, hogy $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Bizonyítás 2.: Tudjuk, hogy minden valós $a_1, a_2; \ldots a_n$ és $b_1; b_2; \ldots b_n$ és x számokra teljesül, hogy

$$(a_ix - b_i)^2 = a_i^2x^2 - 2a_ib_ix + b_i^2 \geq 0$$

Adjuk össze az egyenlőtlenségeket $i = 1, 2, \ldots, n$-re.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot x^2 - 2x(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq 0$$

teljesül minden valós x-re.

Ez csak úgy lehet ha a másodfokú polinóm diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$4 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \leq 0$$

Ebből a bizonyítandó állítás következik. Egyenlőség , akkor teljesül, ha $(a_ix - b_i)^2 = 0$, vagyis $a_ix - b_i = 0$.

7. Legyen $a_1, a_2; \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ és $d_1, d_2, \ldots, d_n$ négy pozitív valós számokból álló sorozat. Bizonyítsuk be, hogy igaz az

$$(a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_2 + \ldots + a_nb_nc_nd_n)^4 \leq (a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4)(b_1^4 + b_2^4 + \ldots + b_n^4)(c_1^4 + c_2^4 + \ldots + c_n^4)(d_1^4 + d_2^4 + \ldots + c_n^4)$$

egyenlőtlenség.

Skljarszkij-Csencov-Jaglom

Mo.:

Használjuk kétszer egymás után a C-B-S egyenlőtlenséget. Először $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n; c_1d_1, c_2d_2, \ldots c_nd_n$ számpárokra, majd $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2, b_1^2, b_2^2, \ldots b_n^2; c_1^2, c_2^2, \ldots c_n^2; d_1^2, d_2^2, \ldots d_n^2$számokra.

$(a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_2 + \ldots + a_nb_nc_nd_n)^4 \leq (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + \ldots + a_n^2b_n^2)(c_1^2d_1^2 + c_2^2d_2^2 + \ldots + c_n^2d_n^2) \leq (a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4)(b_1^4 + b_2^4 + \ldots + b_n^4)(c_1^4 + c_2^4 + \ldots + c_n^4)(d_1^4 + d_2^4 + \ldots + d_n^4)$.

8. Az α, β, γ szögekről tudjuk, hogy $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 2$. Igazoljuk, hogy $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{5}$!

Szegedi, Radnóti

Mo.: Legyen $\underline{a}(\sin\alpha; \cos\alpha)$; $\underline{b}(\sin\beta; \cos\beta)$; $\underline{c}(\sin\gamma; \cos\gamma)$

Tudjuk, hogy $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1$, valamint

$|\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}|^2 = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 \geq 4 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2$ a feltétel miatt.

De $|\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}| + |\underline{c}| = 3$.

Összevetve az előzővel:

$$4 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 \leq 9$$

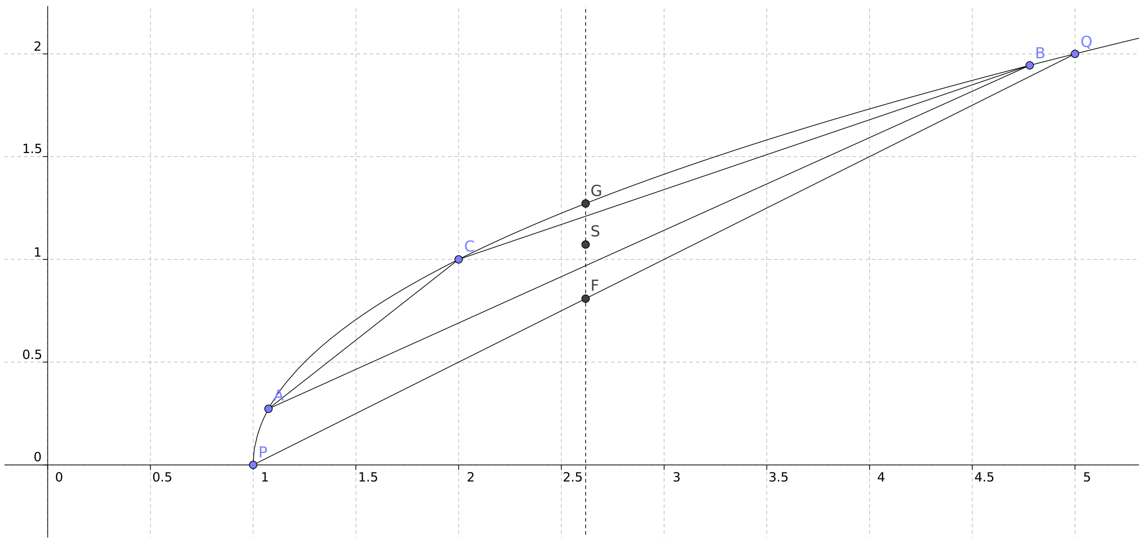
melyből a bizonyítandó állítás következik.

9. Az a, b, c valós számok összege 7 és egyik sem kisebb, mint 1. Igazoljuk, hogy ekkor

$$2 \leq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq 2\sqrt{3}$$

Szegedi, Radnóti

Mo.: Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x-1}$ függvényt



Legyen $A(a; \sqrt{a-1}), B(b; \sqrt{b-1}), C(c; \sqrt{c-1}), P(1; 0), Q(5; 2)$ ahol $1 \leq a, b, c \leq 5$.

A függvény konkáv így az ABC háromszög teljes egészében a PQ szakasz és a függvény grafikonja között van.

Nézzük az ABC háromszög súlypontját $S(\frac{7}{3}; \frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}}{3})$, mely a háromszög belsejében van.

Az $x = \frac{7}{3}$ egyenes metszéspontja a függvény grafikonjával $G(\frac{7}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3})$. Az egyenes és a PQ szakasz metszéspontja $F(\frac{7}{3}; \frac{2}{3})$. Az előbbiek miatt S ezen két pont közé esik, így

$$\frac{2}{3} \leq \frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}}{3} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

.

Megjegyzés:

A táborban 90 perc alatt az 1-6. feladatot és a 9-est beszéltük meg.