Mahler Attila: Stabil házasságok

Stabil házasságok

Probléma megismerése (10 perc)

- **Házasság:** pontosan 1 férfi és pontosan 1 nő között lehet. ☺
- **Stabil:** ne legyen olyan pár (*blokkoló pár*), akik jobban szeretik egymást, mint a házastársukat.
- Ennek eldöntéséhez kell **preferencia sorrend:** mindenki felállít egy sorrendet, kezdve azzal, akivel a legszívesebben házasodna, egészen az utolsóig.
  - Mindenkinek szerepelnie kell a preferencia sorrendben.
  - Nincs „döntetlen", azaz bármelyik két jelölt közül el kell tudni döntenem, hogy melyiküket szeretném inkább.
- Azt szeretnénk, hogy mindenkinek legyen házastársa ⇒ feltesszük, hogy ugyanannyi férfi és nő van.

<u>Megjegyzés:</u>

- Azért kell mindenkit felvenni a listára, és azért tesszük fel, hogy ugyanannyi fiú és lány van, hogy mindenkinek legyen házastársa. Ezektől eltekintve is beszélhetünk stabil házasságrendszerről.

Játék (10+10+5 perc)

- Nemek és nevek sorsolása
- Felállnak 1-1 sorba a fiúk és a „lányok", mindenki megnézi a lehetséges házastársait, majd összeállítja a saját preferencia sorrendjét
- **Feladat:** Stabil házasságrendszert kell létrehozni
- Ellenőrzés
  - Mindig létezik?
  - Ha sikerült ⇒ Van-e más?
  - Mi volt az algoritmus?

Algoritmusötletek kipróbálása (10+10+5 perc)

- Jó-e az alábbi algoritmus? Tipp, indoklás, észrevétel? Játsszuk le!

A fiúk körbekérdezik a lányokat, hogy hányadik helyen vannak a preferencia sorrendjükben, majd mindenkinél hozzáadják azt a számot, hogy az adott lány hányadik helyen áll náluk. Ez lesz a *„pár összege"*. Ezt követően kiválasztják ezek közül a legkisebbet, és azzal a lánnyal összeházasodnak.

  - Megbeszélés: Nem jó! Hibák:
    - Minimum nem feltétlen egyértelmű. (Sőt előfordulhat, hogy minden „pár összege" ugyanannyi.) ⇒ Lehetőség: választunk egyet közülük.
    - Több fiú kéri meg ugyanannak a lánynak a kezét. („Összeg" = 1+3 = 2+2.) ⇒ Lehetőség: ilyenkor a lány a legszimpatikusabbat választja.
    - Ilyenkor biztosan lefut az algoritmus és mindenkinek lesz házastársa, de nem feltétlen lesz stabil a rendszer! (<u>Gondolkodnivaló:</u> konstruáljunk ellenpéldát!)

- Jó-e az alábbi algoritmus? Tipp, indoklás, észrevétel? Játsszuk le!

Minden fiú megkéri a preferencia sorrendjében első helyen álló lány kezét. A lány azt válaszolja, hogy „*talán*". Majd, ha új ajánlatot kap a lány, akkor a szimpatikusabbnak mondja, hogy talán, a másiknak nemet mond. Ekkor a visszautasított fiú megy és megkéri a sorrendjében következő lány kezét. Amikor már nincs visszautasított fiú, akkor a „talán"-ból „igen" lesz.

  - Megbeszélés: Jó!

Bizonyítás:

1. Véget ér az algoritmus és mindenkinek lesz házastársa.
   - Ha egy fiú megkéri egy lány kezét, akkor onnantól annak a lánynak mindig lesz vőlegénye.
   - Ha egy fiúnak nincs menyasszonya, akkor kell lennie olyan lánynak is, akinek nincs vőlegénye. Akkor viszont még nem kérték meg a kezét, tehát a fiú sorrendjében még hátra van. A fiú megkéri a kezét, a lány azt mondja, hogy talán, hiszen nincs konkurencia.
   - Azaz minden fiúnak lesz felesége, így véget ér az algoritmus.
2. Stabil házasságrendszert kapunk.
   - Tegyük fel, hogy nem stabil $\Rightarrow$ létezik X fiú és Y lány, akik miatt nem stabil
   - X jobban kedveli Y-t, mint a feleségét, akkor korábban megkérte a kezét. Ha Y dobta, akkor jobbat talált. Tehát nem létezhet ilyen X-Y pár.

Észrevételek:

- Fiúknál romlik, lányoknál javul a pár „minősége" $\Rightarrow$ Akkor kinek jó? Mi történik, ha fordítva csináljuk?
- **Fiú-optimális megoldás**: nincs olyan fiú, aki bármelyik másik stabil párosításban jobban járna.
- Fiúknak a lehető legjobb, ugyanakkor a lányoknak a lehető legrosszabb!
- Általános esetben is **mindig létezik** stabil házasságrendszer.
- Ha ugyanannyi fiú és lány van, és mindenki mindenkit felvesz a preferencia sorrendjébe, akkor **mindenkinek lesz házastársa**.

Miért nem működik a valóságban? (5 perc)

- Nincs preferencia sorrend
  - Nem ismerjük egyszerre az összes „jelöltet", folyamatosan új embereket ismerünk meg
  - Ha lenne is, időről-időre változna a sorrend
  - Lehet „döntetlen"
- Házasság nem (mindenhol) bijektív kapcsolat férfi és nő között
  - Nem bijektív: poligámia (többnejűség) (pl.: Arab országok)
  - Nem férfi és nő között: homoszexuálisok (pl.: Hollandia)

Poligámia = Egyetemi felvételi rendszer (25 perc)

Kérdések

- Át tudjuk ültetni ezt a felvételire?
- Diák optimális vagy iskola optimális legyen?

Gale-Shapley algoritmus

- Annyit kell módosítani a második algoritmuson, hogy mivel az egyetemek („lányok”) nem egy, hanem több hallgatót („férjet”) vesznek fel, így a keretszámnak megfelelő jelentkezőnek mondanak talánt, és azoknak mondanak végleg nemet, akik kicsúsztak a keretszámból.
- A fenti algoritmust 1962-ben publikálta Gale és Shapley az egyetemi felvételi ponthatárok meghatározására. Az alábbiakat igazolják:
  - **Stabil:** Ha egy diákot visszautasítottak, akkor jobb került a helyére, tehát az eljárás végén is visszautasítanák.
  - **Diák optimális:** Nincs olyan diák, aki bármely másik stabil párosítás esetén jobban járna.
- További két fontos tulajdonsága:
  - **Gyors futásidő:** A körök száma nem lehet több a jelentkezők számánál, hiszen egy helyre nem kerülhet kétszer ugyanaz a jelentkezés. Jó megvalósítással lineáris az algoritmus futásideje.
  - **Stratégiailag biztos:** Nem manipulálható, azaz senki sem járhat jobban, ha nem a valóspreferencia sorrendjében jelentkezik a különböző helyekre.

A magyar felvételi rendszerek

- (A 2000-ben bevezetett) középiskolai felvételi az pontosan így működik.
- (A 2007-ben megújított) felsőoktatási program összetettebb, tekintettel az alábbi sajátosságaira:
  - **Holtversenyek:** Az egyenlő elbírálás elve alapján, az azonos pontszámú jelentkezőket vagy mind fel kell venni, vagy mind el kell utasítani. (Amerikában van, hogy sorsolással döntenek ilyen esetekben.) Az 500 pontos felvételi rendszerben a holtversenyek szerepe lecsökkent.
  - **Minimális keretszámok:** A felső korlátok mellett az is meg van határozva, hogy minimum hány felvett hallgató esetén indul el a szak. Ekkor nem igazságos, ha található egy bezárt szak annyi jelentkezővel, amennyi a szak alsó korlátja úgy, hogy egyik jelentkező se lett felvéve jobb helyre. Ilyenkor létrejöhet olyan szituáció, amelyre nincs igazságos megoldás!

    <u>Példa:</u> A jazz tanszéken egyetlen szaxofonost és pontosan két gitárost keresnek. A két jelentkező Ádám és Béla. Ádám mindkét hangszeren ügyesebb, mint Béla, és a gitár előbb szerepel a jelentkezési lapján, mint a szaxofon. Ezzel szemben Béla a szaxofont kedveli jobban. Mivel csak két jelentkező van, az egyik szak biztosan nem indul. Ha a gitár szakra vennék fel mindkettőjüket, akkor az nem lenne igazságos, mert Béla jobban szeretne szaxofonozni, és oda nem vettek fel senkit. Az sem lenne stabil megoldás, ha a szaxofon szak indulna el Béla felvételével, mert Ádám jobb zenész. Végül, ha Ádámot vennék fel a szaxofon szakra, akkor szintén igazságtalan megoldás születne, hiszen a gitár szak elindításának ebben a helyzetben mindketten jobban örülnének.

  - **Közös korlátok:** Van, hogy két szak közös korláttal rendelkezik. Például 100-100 hely van az orvosnak és a fogorvosoknak, de összesen legfeljebb 150 hallgatót vehet fel erre a két szakra.
- Ezek miatt jelentősen bonyolultabb a ponthatár húzás, nincs polinomiális futásidejű algoritmus, amely ezeket is figyelembe venné.

- Ezért *heurisztikák* szerepelnek a felvételi ponthatárokat számító algoritmusban! Azaz olyan ötleteket használ, amely a tapasztalat szerint gyors és jó megoldást szolgáltat, ám ez nem bizonyított.
- **A minimális keretszámoknál alkalmazott heurisztika:** Lefut a Gale-Shapley algoritmus a felső keretszámok figyelembevételével, majd ha van olyan szak, amely nem érte el az alsó korlátját, akkor az a szak kerül bezárásra, ahol a felvettek számának és a minimális létszámnak az aránya legkisebb. Hiszen itt a legkisebb az esély arra, hogy a szak a későbbiekben feltöltődjön. A szak bezárása után újra lefut az algoritmus, és így tovább, amíg szükséges.

Felhasznált irodalom

[1] Dr. Biró Péter - Dr. Fleiner Tamás: A magyarországi felvételi besoroló algoritmusok rövid bemutatása (Felvi.hu, 2008, letöltve: 2011. szeptember 24.)

[2] Dr. Grolmusz Vince: Diszkrét matematika blokk előadás (ELTE-TTK, 2010)

[3] Jankó Zsuzsanna: Stabil párosítások és egyetemi felvételi ponthatárok (ELTE-TTK Matematika BSc szakdolgozat, 2009)