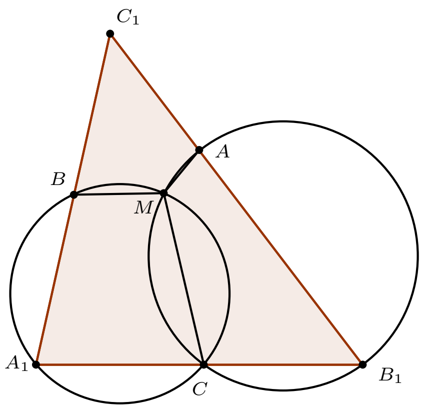
Hubert Györgyné: Napóleon-háromszög

Matematika tábor 2011. október
(Kétszer másfél órás foglalkozás a 9. 10. osztályos csoportnak)

A továbbiakban mindig hegyesszögű háromszögekkel dolgozunk. (Az egyes problémák megoldásánál a diszkusszió kérdése egy egészen más irányba vinne minket.)

1. Tekintsünk először egy közismert feladatot. Az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalain vegyük fel az A, B, C pontokat. Állítás: Az A_1CB, B_1AC, C_1BA háromszögek körülírt körei egy ponton mennek át.

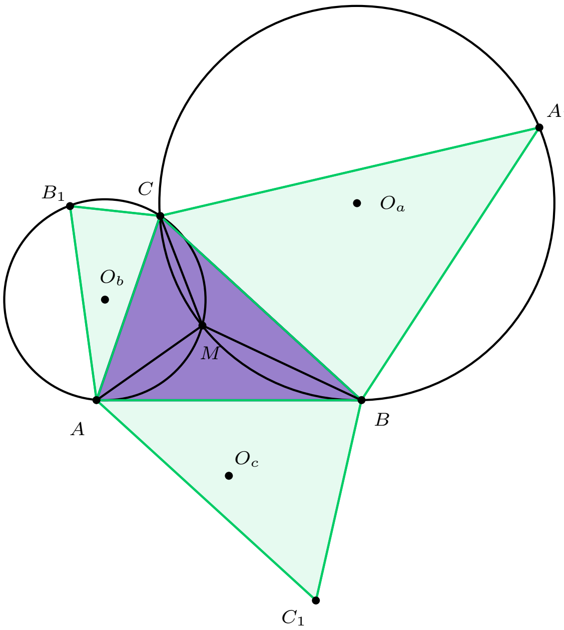


1. ábra

Bizonyítása közismert: M legyen az A_1CB és a B_1AC háromszögek körülírt körének metszéspontja. Ekkor a $BMA\sphericalangle = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$, tehát a C_1BMA négyszög húrnégyszög, azaz az M pont rajta van a C_1BA háromszög körülírt körén.

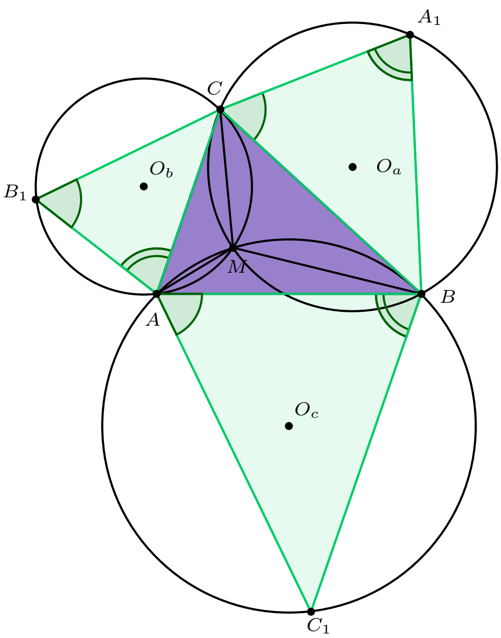
Nézzük meg, hogy a bizonyítás során mit is használtunk fel a feltételek közül! Csak annyit, hogy az A_1, B_1, C_1 csúcsoknál lévő szögek összege 180°.

2. Tehát bizonyítottuk azt a tételt is, hogy: Ha az ABC háromszög oldalai „fölé” (kifelé) olyan háromszögeket rajzolunk, melyekben az „új” csúcsoknál lévő szögek összege 180°, akkor az új háromszögek körülírt körei egy ponton mennek át.



2. ábra

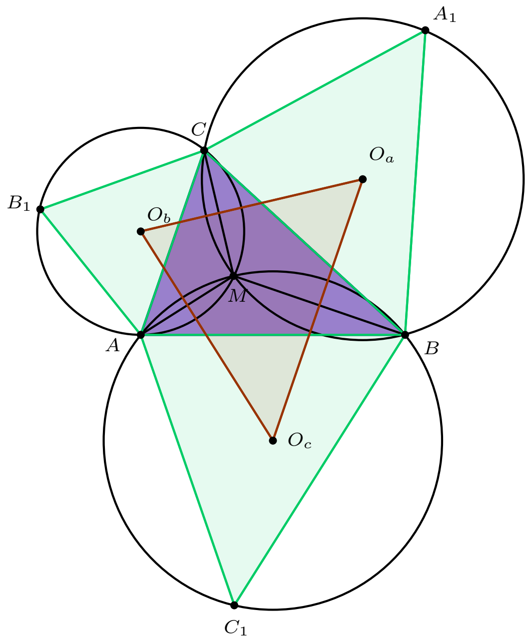
3. Az előző tétel egyenes következménye, hogy ha az ABC háromszög oldalai fölé (persze a 2. feladatnak megfelelően) egymáshoz hasonló háromszögeket írunk, akkor e három háromszög három körülírt köre is egy ponton megy keresztül.



3. ábra

(Persze, a megfelelő hasonló háromszögeket nem csupán egyféleképpen helyezhetjük el.)

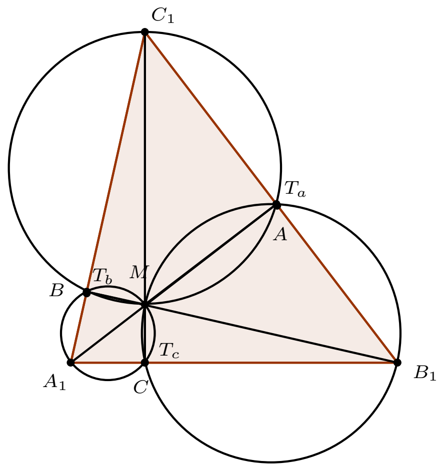
4. Érdemes megnézni a 3. ábra 3 db körének középpontja alkotta háromszöget. Ez a háromszög hasonló a „rárajzolt” háromszögekhez.



4. ábra

(Bizonyításához elegendő a merőleges-szárú szögekre koncentrálnunk.)

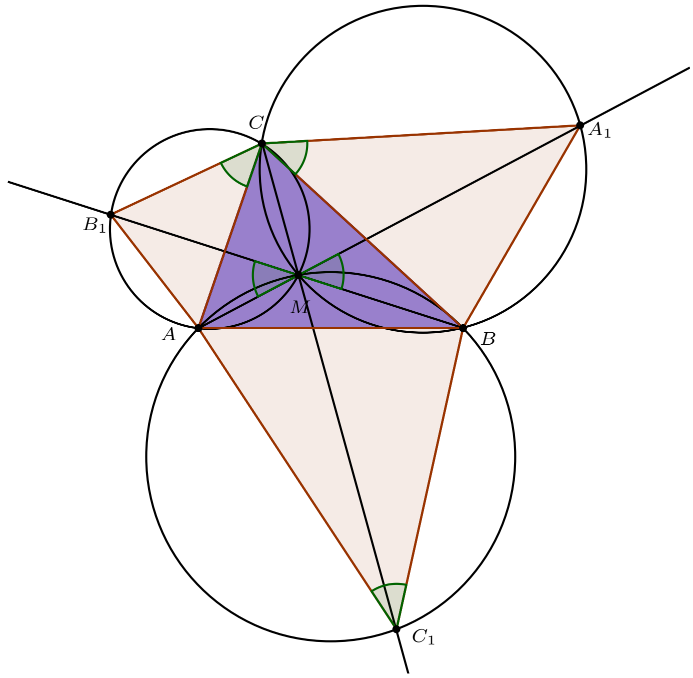
5. Térjünk vissza az 1. feladathoz. Ennek speciális esete az, ha az oldalakon felvett pontok a magasságtalppontok. Közismert, hogy ekkor a körök közös pontja az eredeti háromszög magasságpontja.



5. ábra

Fogalmazhatjuk ezt úgy is, hogy ebben az esetben az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek <u>is</u> átmennek a három kör közös pontján. Találunk-e ilyen esetet a 2. problémánál?

6. Konkrét $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ szögek esetében szerkesszünk ilyen A_1, B_1, C_1 pontokat! A megfelelő körívekből az AM, BM, CM egyenesek metszik ki a megfelelő A_1, B_1, C_1 pontokat.

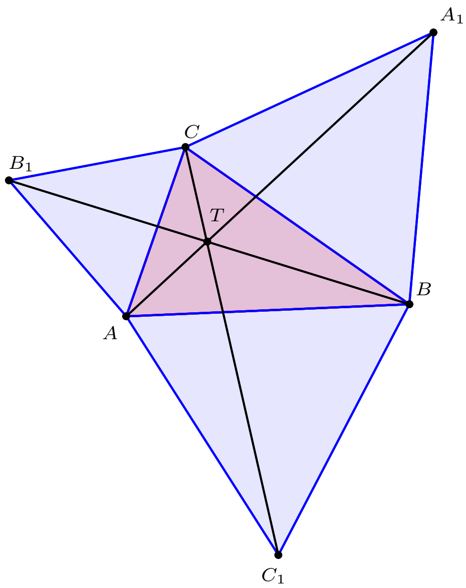


6. ábra

Milyenek a rárajzolt háromszögek? Egymáshoz hasonlóak! De nem akárhogy helyezkednek el: az eredeti háromszög egy csúcsához azonos szögek illeszkednek. (Bizonyítása kerületi szögek ill. húrnégyszögek tételéből azonnal jön.) (A tétel megfordítása is igaz.)

Ellenőrzésként térjünk vissza az 5. ábrához, tételünk ott is él (még jó!). (Persze ezt régen is tudtuk: a talpponti háromszög szögfelezői az eredeti háromszög magasságvonalai.)

7. Az ABC (hegyesszögű) háromszög oldalai fölé („kifelé") írjunk szabályos háromszögeket!



7. ábra

Mit tudunk már?

a. $k(ABC_1)$, $k(BCA_1)$ és $k(CAB_1)$ egy ponton (T) megy át. (Hiszen $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 3\cdot 60° = 180°$, ld. 2. feladat.)

b. Az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek illeszkednek T-re (, hiszen a rárajzolt háromszögek „megfelelően" hasonlóak egymáshoz – ld. a 6. feladatot).

De itt még más is igaz:

c. Állítás: $AA_1 = BB_1 = CC_1$

(Bizonyítás: Az AA_1 szakasz C körül 60°-kal elforgatva átmegy a B_1B szakaszba, majd a B_1B szakasz A körül 60°-kal elforgatva átmegy CC_1 szakaszba.)

d. Az előző bizonyításból következik az is, hogy az AA_1, B_1B egyenesek 60°-os szöget zárnak be, azaz a T belső pontból a háromszög oldalai 120°-os szögben látszanak.

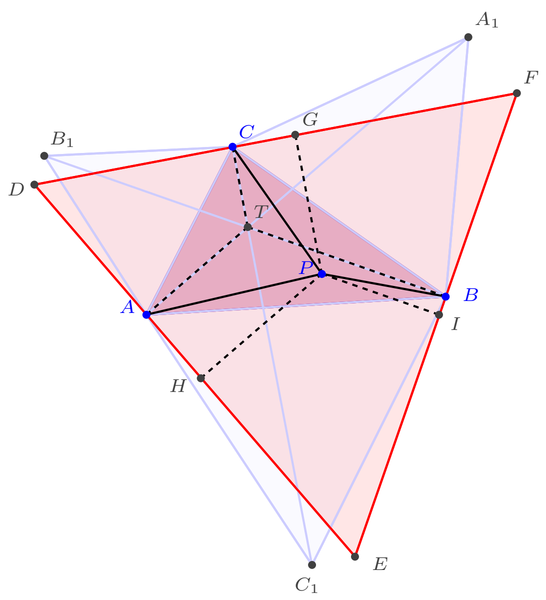
(*Ha nem tudnánk már, hogy a 3 db egyenes és a 3 db kör egy ponton megy át, itt bizonyítani tudnánk e tételeket – T-t definiálhatnánk AA_1 és BB_1 metszéspontjaként, majd forgatás..., húrnégyszögek...*)

8. Milyen tulajdonságú még ez a (belső) T pont?

Állítás: A „T" az ABC háromszög azon belső pontja, melyre igaz, hogy a csúcsoktól mért távolságainak összege minimális (s ez az összeg megegyezik az $AA_1 = BB_1 = CC_1$ szakaszok hosszával).

(A bizonyításban felhasználjuk azt a közismert tételt, hogy a szabályos háromszög bármely belső pontjának az oldalaktól mért távolságainak összege konstans, éppen a szabályos háromszög magassága.)

Bizonyítás:



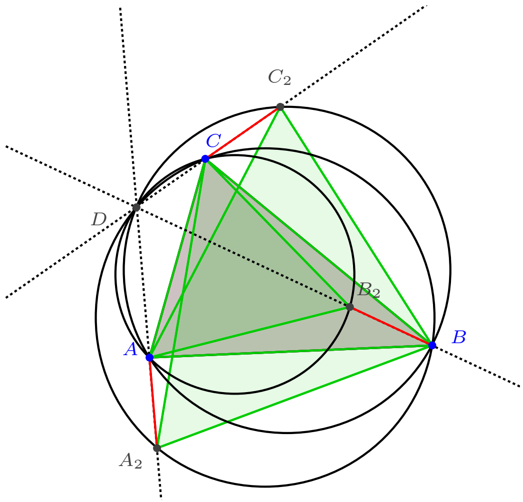
8. ábra

Belefoglaljuk az ABC háromszöget egy DEF szabályos háromszögbe úgy, hogy DE merőleges legyen AT-re, EF BT-re, FD pedig CT-re.

Legyen P az ABC háromszög tetszőleges belső pontja. Ekkor $PG+PH+PI = TA+TB+TC$, de ha P nem azonos T-vel, akkor $PA > PH$, $PB > PI$, $PC > PG$ egyenlőtlenségek közül legalább az egyik fennáll... Tehát az ABC háromszög belsejében a T pont csúcsoktól mért távolságösszege a legkisebb.

Mekkora ez a távolságösszeg? A felhasznált tételünk szerint megegyezik a DEF szabályos háromszög magasságával, de ez megegyezik pl. a CC_1 szakasz hosszával (, hiszen EC_1 párhuzamos DF-fel, mert DEC_1 szög is 60°-os...).

9. Ha az ABC háromszög oldalaira „befelé" rajzoljuk a szabályos háromszögeket, az előző tulajdonságokból jó néhány megmarad.

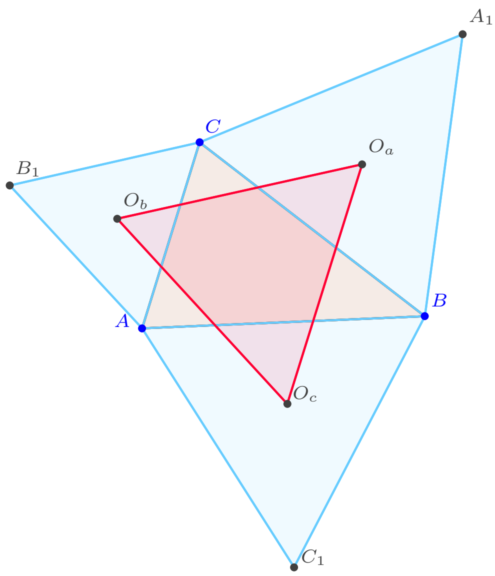


9. ábra

A három szabályos háromszög körülírt köre egy ponton (D) megy át. Az AA_2, BB_2, CC_2 egyenesek is átmennek D-n. Az AA_2, BB_2, CC_2 szakaszok egyenlőek.

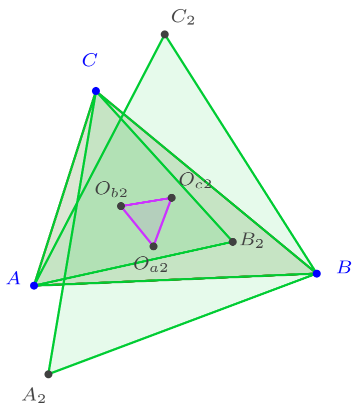
Mindezen tulajdonságok az előzőekhez hasonlóan bizonyíthatóak.

10. Térjünk vissza a „kifele" rajzolt szabályos háromszögekhez. Ezen háromszögek középpontjai is szabályos háromszöget alkotnak. (A továbbiakban: „külső" Napóleon-féle háromszög). Ezen állítás egyenesen következik a 4. tételünkből.



10a. ábra

Ugyanígy a „befelé” írt szabályos háromszögek középpontjai is szabályos háromszöget alkotnak. (A továbbiakban: „belső” Napóleon-féle háromszög).



10b. ábra

11. Állítás: A külső és belső Napóleon-féle háromszögek területének különbsége megegyezik az eredeti háromszög területével.

 A bizonyításban felhasználjuk a koszinusz-tételt, a szabályos háromszög területképletét, az addíciós tételt és a trigonometrikus területformulát.

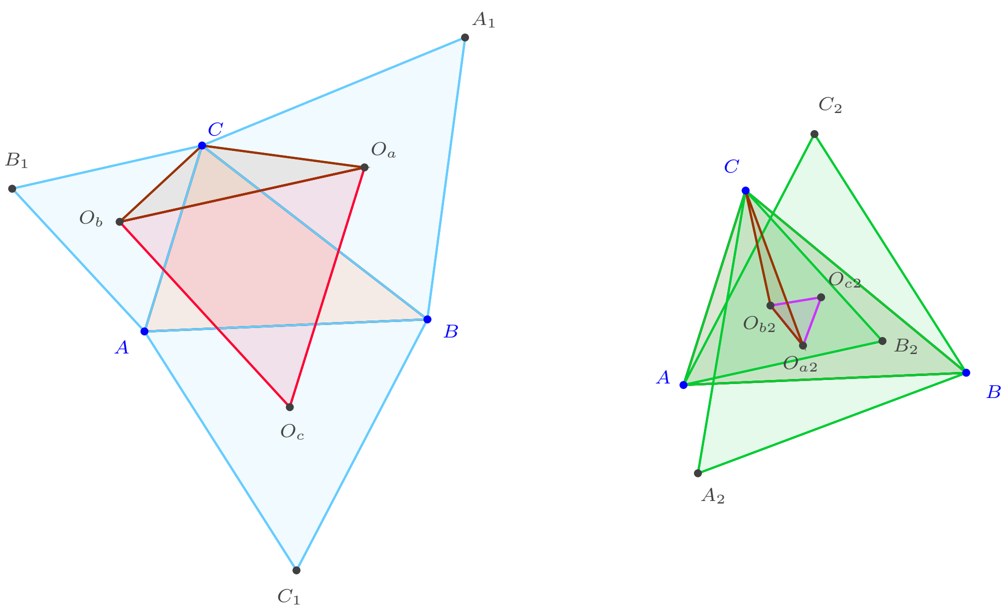
 Először koszinusz-tétellel kiszámoljuk a „Napóleon-féle” háromszögek oldalait.

 A 11a. ábra O_bCO_a háromszögében az $O_aCO_b\sphericalangle = \gamma + 60°$, így:

 $O_aO_b^2 = 1/3 \cdot (b^2 + a^2 - 2ab \cdot cos(\gamma + 60°))$.

 A 11b. ábra $O_{b2}CO_{a2}$ háromszögében $O_{b2}CO_{a2}\sphericalangle = \gamma - 60°$, így:

 $O_{a2}O_{b2}^2 = 1/3 \cdot (b^2 + a^2 - 2ab \cdot cos(\gamma - 60°))$.

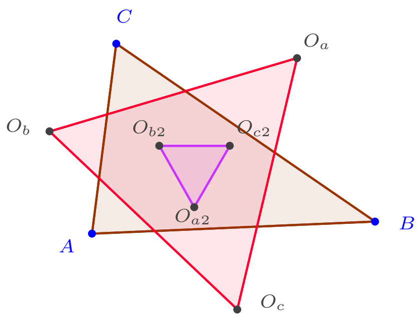


11a-b. ábra

A két szabályos háromszög területének különbsége:

$T_k - T_b = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (O_aO_b^2 - O_{a2}O_{b2}^2) = \cdots = 1/2 \cdot ab \cdot \sin\gamma = T(ABC)$.

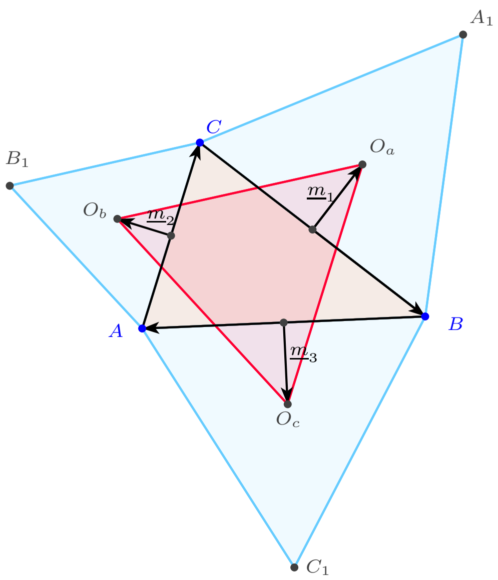
12. Állítás: Az ABC háromszöghöz tartozó két Napóleon-féle háromszög középpontja megegyezik.



12a. ábra

(Sőt, azonos az eredeti háromszög súlypontjával. – Ez a megjegyzés persze már segít a bizonyításban is.)

Bizonyítás:



12b. ábra

Az eredeti háromszög csúcsait az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ helyvektorokkal jellemezzük, majd felírjuk a rárajzolt szabályos háromszögek középpontjainak helyvektorait, s ezekből meghatározzuk a Napóleon-féle háromszög(ek) középpontját.

$\underline{O_a} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) + \underline{m}_1$

$\underline{O_b} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{a} + \underline{c}) + \underline{m}_2$

$\underline{O_c} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{m}_3$, ebből:

$\underline{S_o} = 1/3 \cdot (\underline{O_a} + \underline{O_b} + \underline{O_c}) = 1/3 \cdot (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3) = \underline{s}(ABC) + 1/3 \cdot (\underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3)$,

De: $\underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 = \underline{0}$, mert:

$\underline{m}_1 = (\underline{b} - \underline{c})' \cdot \lambda$,

$\underline{m}_2 = (\underline{c} - \underline{a})' \cdot \lambda$,

$\underline{m}_3 = (\underline{a} - \underline{b})' \cdot \lambda$,

ahol $(\underline{b} - \underline{c})', (\underline{c} - \underline{a})', (\underline{a} - \underline{b})'$ az eredeti háromszög $+90°$-os elforgatottjának oldalvektorai, λ pedig (jelenleg) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Így: $\underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 = \lambda \cdot [(\underline{b} - \underline{c})' + (\underline{c} - \underline{a})' + (\underline{a} - \underline{b})'] = \underline{0}$, azaz: $\underline{S_o} = \underline{s}(ABC)$.

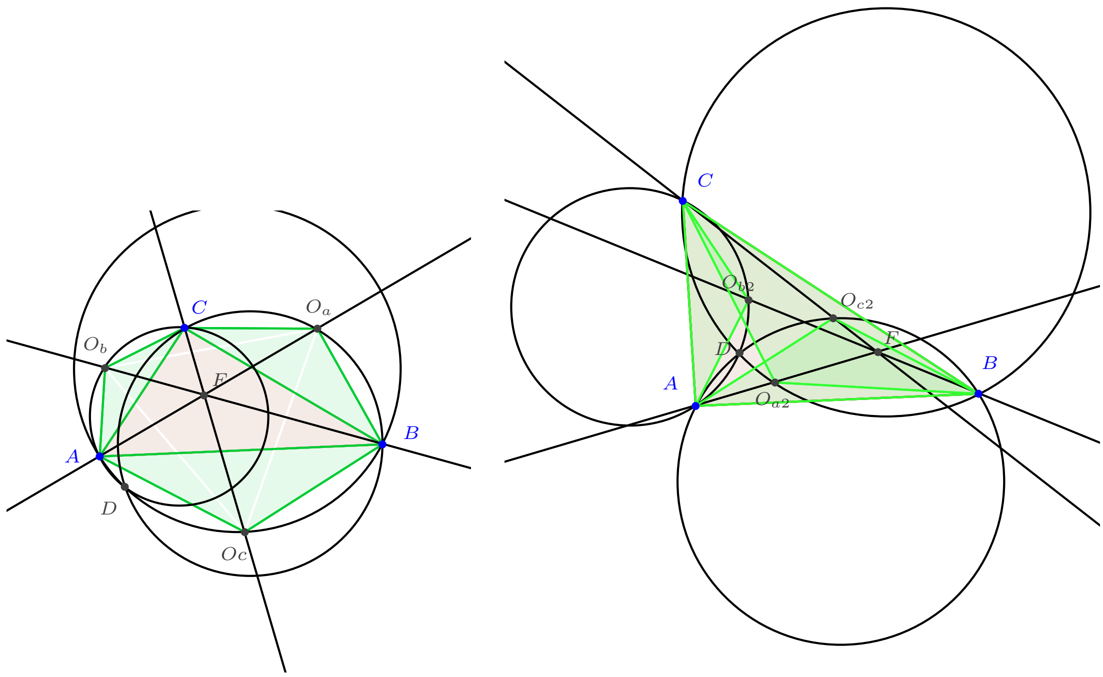
(A „belső” „Napóleon-féle” háromszög esetében ugyanígy számolunk, csak $-\underline{m}_1, -\underline{m}_2, -\underline{m}_3$-mal.)

13. Végignézve az előző tétel bizonyítását, kiderül, hogy nem csupán azt láttuk be, hogy a két „Napóleon-féle” háromszög középpontja azonos az eredeti háromszög súlypontjával, hanem azt is beláttuk, hogy:

    Ha egy (hegyesszögű) háromszög oldalai fölé kifelé (befelé) egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögeket írunk, akkor az „új csúcsok” alkotta háromszög súlypontja megegyezik az eredeti háromszög súlypontjával (a bizonyításban csupán λ értéke változik meg).

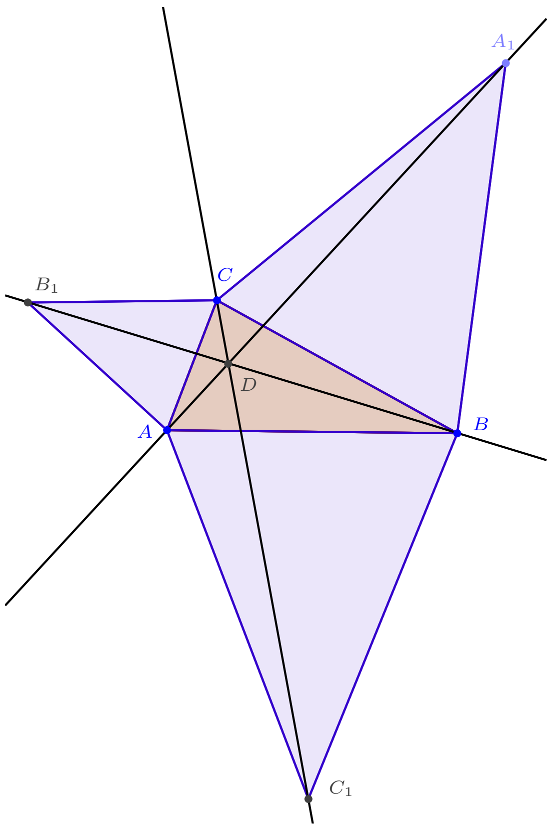
14. Érdemes megnézni, hogy az előző tételekből átvihető-e valamelyik az előbb említett, rárajzolt, egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögekre.

    [Ha az egyenlő szárú háromszögek szárszöge 120°, akkor igaz, hogy e háromszögek köréírt körei is egy ponton mennek át. (Ennek bizonyításában már nem segít a 2. feladat, hisz $3 \cdot 120° \neq 180°$, de húrnégyszögekkel ez is belátható. Vagy egyszerűbben: ezek a körök azonosak a 9. ill. 7/a feladat köreivel...) – ezzel a problémával a táborban nem foglalkoztunk.]



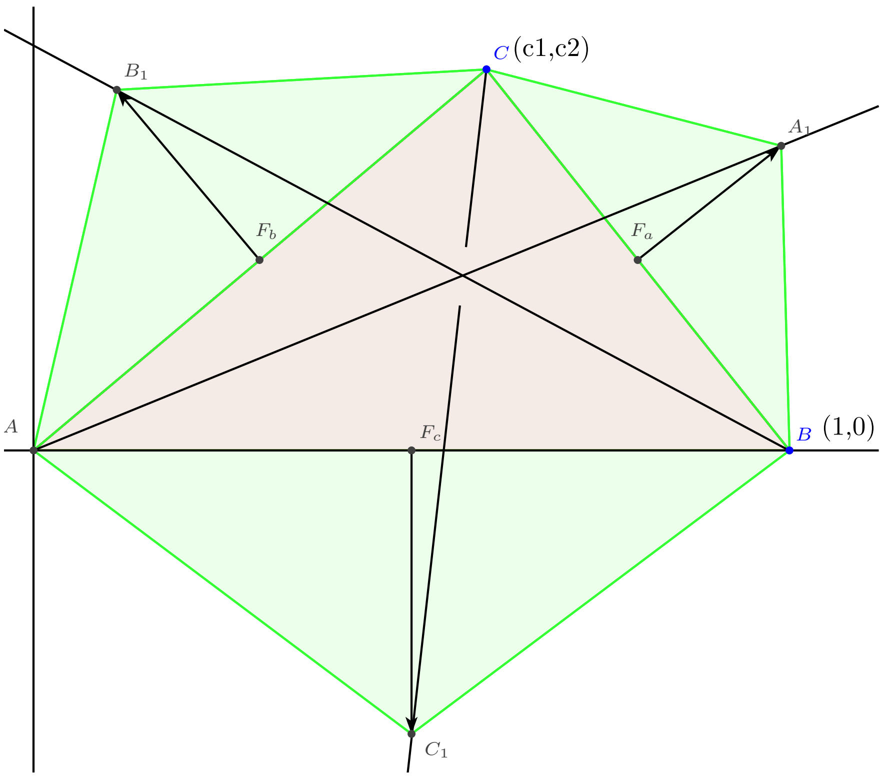
14a-b. ábra

[De:] Állítás: Ha a hegyesszögű háromszög oldalaira kifelé (befelé) egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögeket rajzolunk, akkor az új csúcsokat az eredeti háromszög szemköztes csúcsával összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül.



14c. ábra

Bizonyítása koordináta-geometriai úton egészen egyszerű, ha alkalmasan választjuk meg a koordináta-rendszert. (ld. a 14d. ábrát):



14d. ábra

Megadjuk az A_1, B_1, C_1 pontok koordinátáit, majd felírjuk a három kérdéses egyenes egyenletét, s megmutatjuk, hogy egy ponton mennek át.

$\underline{a}_1 = \underline{f_a} + \lambda \cdot \underline{n_a}$,

ahol $\underline{f_a} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\underline{n_a}$ a $\overrightarrow{CB}$ vektor $+90°$-os elforgatottja.

Koordinátákkal:

$\underline{f_a}(\frac{1}{2} \cdot \{c_1 + 1\};\ \frac{1}{2} \cdot c_2)$, $\underline{n_a}(c_2; 1 - c_1)$ így:

$\underline{a}_1(\frac{1}{2} \cdot \{c_1 + 1\} + \lambda c_2;\ \frac{1}{2} \cdot c_2 + \lambda \cdot \{1 - c_1\})$.

Ebből az AA_1 egyenes egyenlete:

$(-2\lambda c_1 + c_2 + 2\lambda) \cdot x + (-c_1 - 2\lambda c_2 - 1) \cdot y = 0$

...

Hasonlóképpen a másik két egyenes egyenlete:

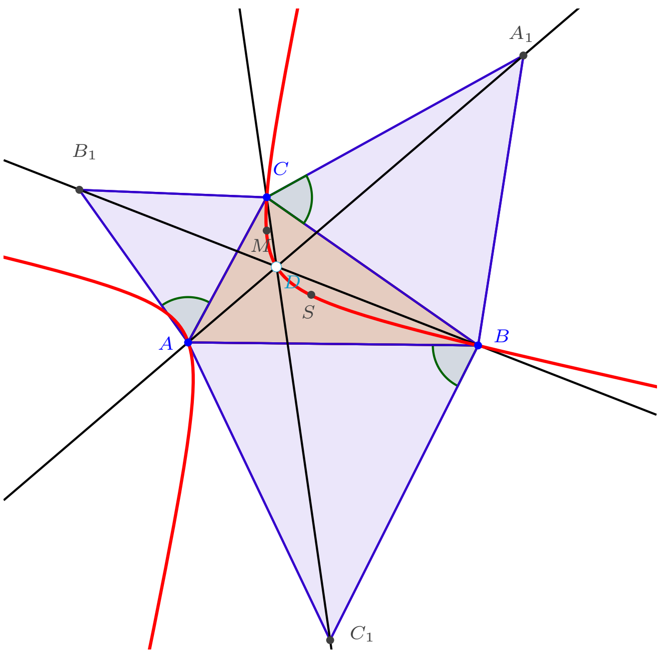
$(-c_2 - 2\lambda c_1) \cdot x + (c_1 - 2\lambda c_2 - 2) \cdot y = -c_2 - 2\lambda c_1$

$(2c_2 + 2\lambda) \cdot x + (1 - 2c_1) \cdot y = c_2 + 2\lambda c_1$.

E két egyenlet összege pont az AA_1 egyenes egyenlete, ami azt bizonyítja, hogy mindhárman egy ponton mennek át.

(Ha λ pozitív, akkor a kifelé, ha negatív, akkor a befelé rajzolt háromszögekről van szó.)

15. Végül csak rajzon megnéztük, hogy az előbbi egyenesek közös pontja illeszkedik az eredeti háromszög csúcsai, magasság- és súlypontja által meghatározott derékszögű hiperbolára.



15. ábra

(Ezt a tételt nekem nem sikerült csak középiskolás ismeretekkel belátnom.)

E foglalkozás témájához Csiba Péternek a Polygon 2002. júniusi ill. 2007. júliusi számában megjelent cikke adta az ötletet.