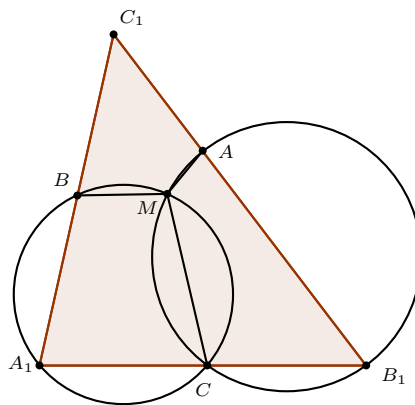


# Hubert Györgyné: Napóleon-háromszög

Matematika tábor 2011. október  
(Kétszer másfél órás foglalkozás a 9. 10. osztályos csoportnak)

A továbbiakban mindig hegyesszögű háromszögekkel dolgozunk. (Az egyes problémák megoldásánál a diskusszió kérdése egy egészen más irányba vinne minket.)

1. Tekintsünk először egy közismert feladatot. Az  $A_1B_1C_1$  háromszög oldalain vegyük fel az  $A, B, C$  pontokat. Állítás: Az  $A_1CB$ ,  $B_1AC$ ,  $C_1BA$  háromszögek körülírt körei egy ponton mennek át.

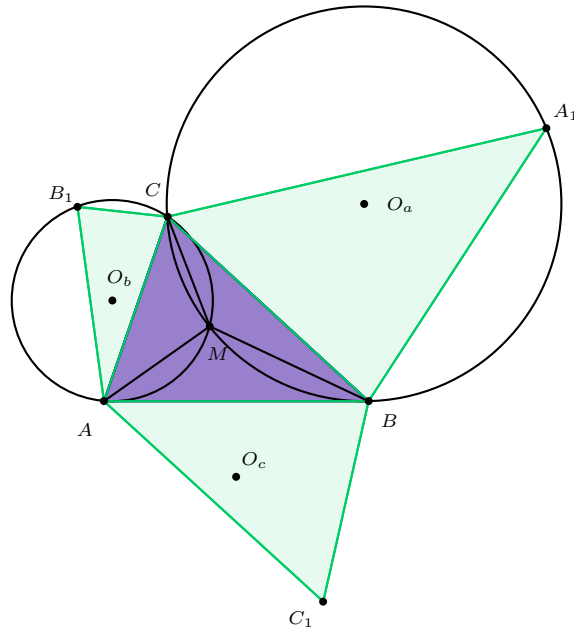


1. ábra

Bizonyítása közismert:  $M$  legyen az  $A_1CB$  és a  $B_1AC$  háromszögek körülírt körének metszéspontja. Ekkor a  $BMA$  szög  $= 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ , tehát a  $C_1BMA$  négyszög húrnégyszög, azaz az  $M$  pont rajta van a  $C_1BA$  háromszög körülírt körén.

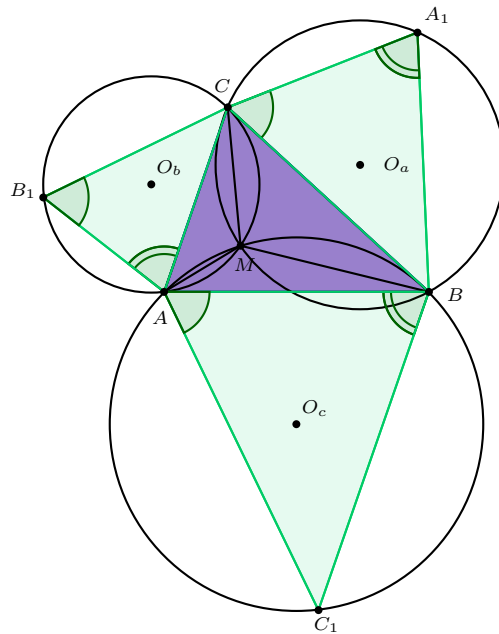
Nézzük meg, hogy a bizonyítás során mit is használtunk fel a feltételek közül! Csak annyit, hogy az  $A_1, B_1, C_1$  csúcsoknál lévő szögek összege  $180^\circ$ .

2. Tehát bizonyítottuk azt a tételt is, hogy: Ha az  $ABC$  háromszög oldalai „fölé” (kifelé) olyan háromszögeket rajzolunk, melyekben az „új” csúcsoknál lévő szögek összege  $180^\circ$ , akkor az új háromszögek körülírt körei egy ponton mennek át.



2. ábra

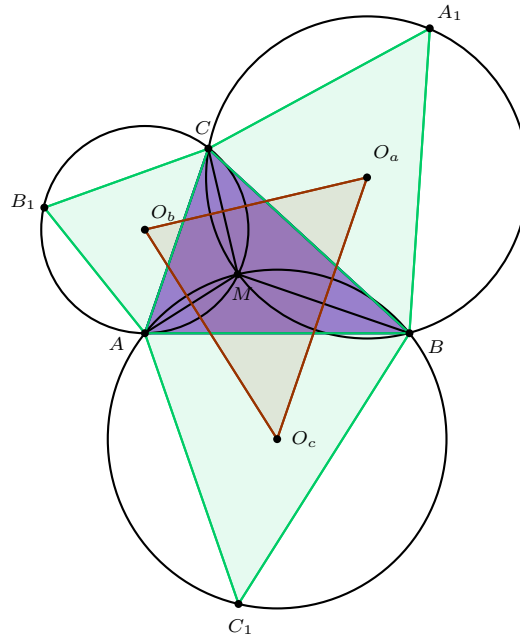
3. Az előző tétel egyenes következménye, hogy ha az  $ABC$  háromszög oldalai fölé (persze a 2. feladatnak megfelelően) egymáshoz hasonló háromszögeket írunk, akkor e három háromszög három körülírt köre is egy ponton megy keresztül.



3. ábra

(Persze, a megfelelő hasonló háromszögeket nem csupán egyféleképpen helyezhetjük el.)

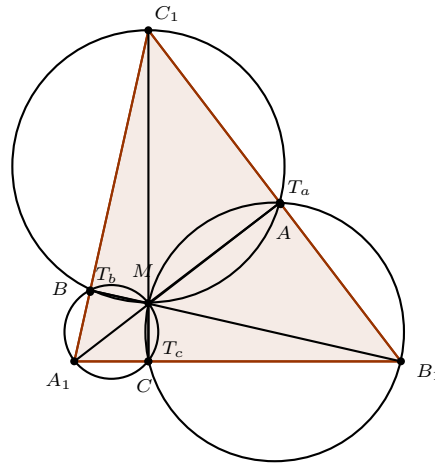
4. Érdekes megnézni a 3. ábra 3 db körének középpontja alkotta háromszöget. Ez a háromszög hasonló a „rárajzolt” háromszögekhez.



4. ábra

(Bizonyításához elegendő a merőleges-szárú szögekre koncentrálnunk.)

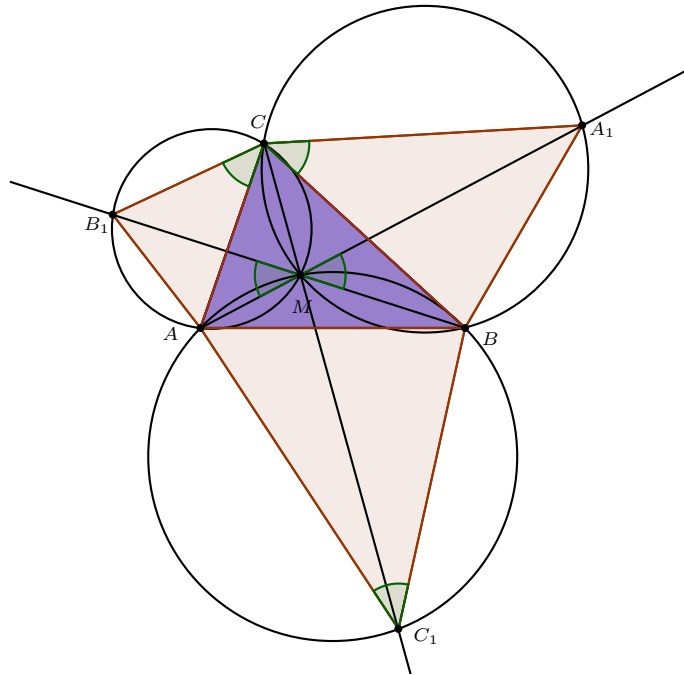
5. Térjünk vissza az 1. feladathoz. Ennek speciális esete az, ha az oldalakon felvett pontok a magasságtalppontok. Közismert, hogy ekkor a körök közös pontja az eredeti háromszög magasságpontja.



5. ábra

Fogalmazhatjuk ezt úgy is, hogy ebben az esetben az  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  egyenesek is átmennek a három kör közös pontján. Találunk-e ilyen esetet a 2. problémánál?

6. Konkrét  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  szögek esetében szerkesszünk ilyen  $A_1, B_1, C_1$  pontokat! A megfelelő körívekből az  $AM, BM, CM$  egyenesek metszik ki a megfelelő  $A_1, B_1, C_1$  pontokat.

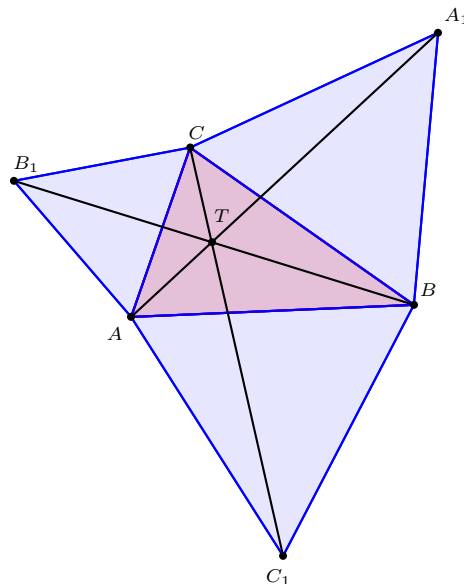


6. ábra

Milyenek a rárajzolt háromszögek? Egymáshoz hasonlók! De nem akárhogy helyezkednek el: az eredeti háromszög egy csúcsához azonos szögek illeszkednek. (Bizonyítása kerületi szögek ill. húrnégyszögek tételéből azonnal jön.) (A tétel megfordítása is igaz.)

Ellenőrzésként térjünk vissza az 5. ábrához, tételünk ott is él (még jó!). (Persze ezt régen is tudtuk: a talpponti háromszög szögfelezői az eredeti háromszög magasságvonalai.)

7. Az  $ABC$  (hegyesszögű) háromszög oldalai fölé („kifelé”) írjunk szabályos háromszögeket!



7. ábra

Mit tudunk már?

a.  $k(ABC_1)$ ,  $k(BCA_1)$  és  $k(CAB_1)$  egy ponton ( $T$ ) megy át. (Hiszen  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ , ld. 2. feladat.)

b. Az  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  egyenesek illeszkednek  $T$ -re (, hiszen a rárajzolt háromszögek „megfelelően” hasonlóak egymáshoz – ld. a 6. feladatot).

De itt még más is igaz:

c. Állítás:  $AA_1 = BB_1 = CC_1$

(Bizonyítás: Az  $AA_1$  szakasz  $C$  körül  $60^\circ$ -kal elforgatva átmegy a  $B_1B$  szakaszba, majd a  $B_1B$  szakasz  $A$  körül  $60^\circ$ -kal elforgatva átmegy  $CC_1$  szakaszba.)

d. Az előző bizonyításból következik az is, hogy az  $AA_1$ ,  $B_1B$  egyenesek  $60^\circ$ -os szöget zárnak be, azaz a  $T$  belső pontból a háromszög oldalai  $120^\circ$ -os szögben látszanak.

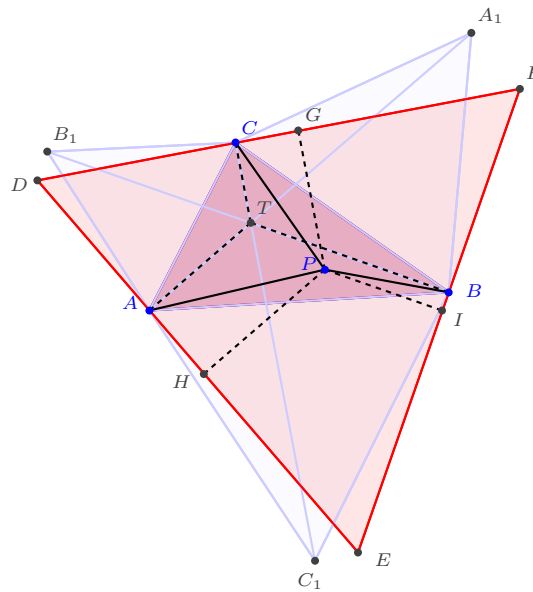
(Ha nem tudnánk már, hogy a 3 db egyenes és a 3 db kör egy ponton megy át, itt bizonyítani tudnánk e tételeket –  $T$ -t definiálhatnánk  $AA_1$  és  $BB_1$  metszéspontjaként, majd forgatás... , húr-négyszögek...)

8. Milyen tulajdonságú még ez a (belső)  $T$  pont?

Állítás: A „ $T$ ” az  $ABC$  háromszög azon belső pontja, melyre igaz, hogy a csúcsoktól mért távolságainak összege minimális (s ez az összeg megegyezik az  $AA_1 = BB_1 = CC_1$  szakaszok hosszával).

(A bizonyításban felhasználjuk azt a közismert tételt, hogy a szabályos háromszög bármely belső pontjának az oldalaktól mért távolságainak összege konstans, éppen a szabályos háromszög magassága.)

Bizonyítás:



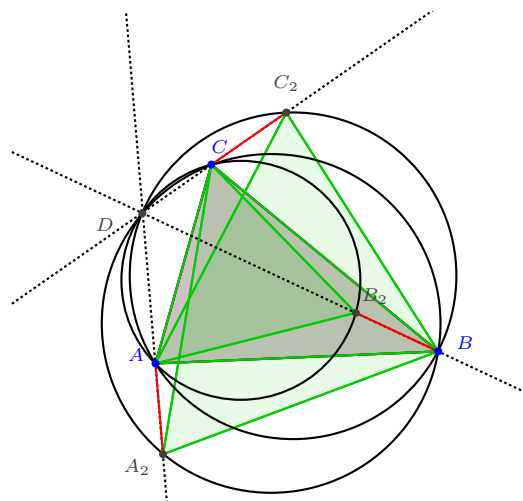
8. ábra

Belefoglaljuk az  $ABC$  háromszöget egy  $DEF$  szabályos háromszögbe úgy, hogy  $DE$  merőleges legyen  $AT$ -re,  $EF$   $BT$ -re,  $FD$  pedig  $CT$ -re.

Legyen  $P$  az  $ABC$  háromszög tetszőleges belső pontja. Ekkor  $PG + PH + PI = TA + TB + TC$ , de ha  $P$  nem azonos  $T$ -vel, akkor  $PA > PH$ ,  $PB > PI$ ,  $PC > PG$  egyenlőtlenségek közül legalább az egyik fennáll... Tehát az  $ABC$  háromszög belsejében a  $T$  pont csúcsoktól mért távolságösszege a legkisebb.

Mekkora ez a távolságösszeg? A felhasznált tételünk szerint megegyezik a  $DEF$  szabályos háromszög magasságával, de ez megegyezik pl. a  $CC_1$  szakasz hosszával (, hiszen  $EC_1$  párhuzamos  $DF$ -fel, mert  $DEC_1$  szög is  $60^\circ$ -os...).

9. Ha az  $ABC$  háromszög oldalaira „befelé” rajzoljuk a szabályos háromszögeket, az előző tulajdonságokból jó néhány megmarad.

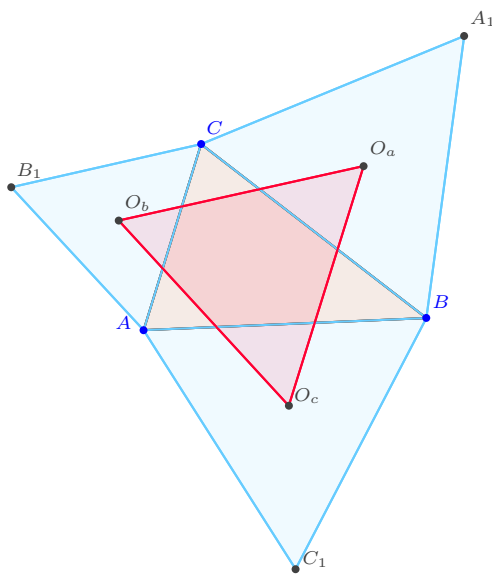


9. ábra

A három szabályos háromszög körülírt köre egy ponton ( $D$ ) megy át. Az  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  egyenesek is átmennek  $D$ -n. Az  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  szakaszok egyenlőek.

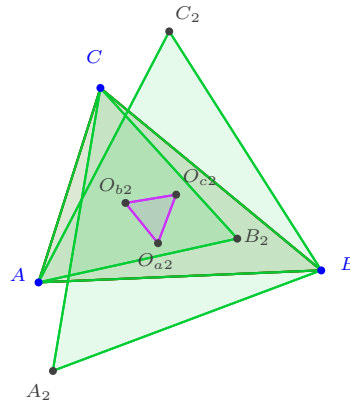
Mіндеzen tulajdonságok az előzőekhez hasonlóan bizonyíthatóak.

10. Térjünk vissza a „kifele” rajzolt szabályos háromszögekhez. Ezen háromszögek középpontjai is szabályos háromszöget alkotnak. (A továbbiakban: „külső” Napóleon-féle háromszög). Ezen állítás egyenesen következik a 4. tételünkből.



10a. ábra

Ugyanígy a „befelé” írt szabályos háromszögek középpontjai is szabályos háromszöget alkotnak. (A továbbiakban: „belső” Napóleon-féle háromszög).



10b. ábra

11. Állítás: A külső és belső Napóleon-féle háromszögek területének különbsége megegyezik az eredeti háromszög területével.

A bizonyításban felhasználjuk a koszinusz-tételt, a szabályos háromszög területképletét, az addíciós tételt és a trigonometrikus területformulát.

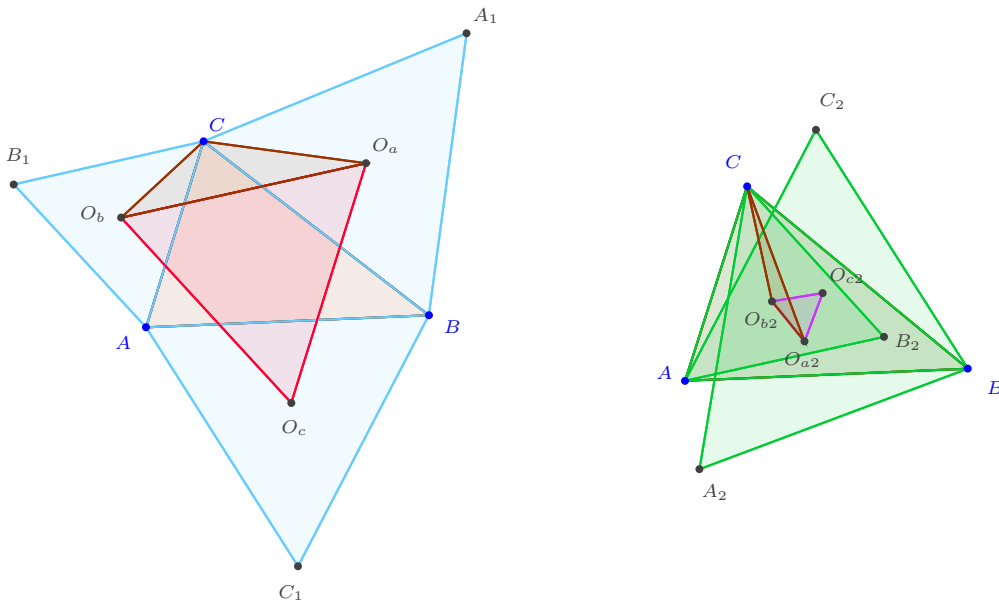
Először koszinusz-tétellel kiszámoljuk a „Napóleon-féle” háromszögek oldalait.

A 11a. ábra  $O_bCO_a$  háromszögében az  $O_aCO_b$  szög  $\sphericalangle = \gamma + 60^\circ$ , így:

$$O_aO_b^2 = 1/3 \cdot (b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma + 60^\circ)).$$

A 11b. ábra  $O_{b2}CO_{a2}$  háromszögében  $O_{b2}CO_{a2}$  szög  $\sphericalangle = \gamma - 60^\circ$ , így:

$$O_{a2}O_{b2}^2 = 1/3 \cdot (b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma - 60^\circ)).$$

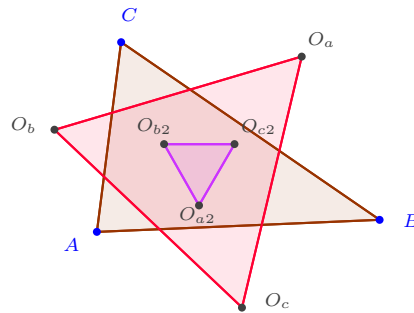


11a-b. ábra

A két szabályos háromszög területének különbsége:

$$T_k - T_b = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (O_aO_b^2 - O_{a2}O_{b2}^2) = \dots = 1/2 \cdot ab \cdot \sin \gamma = T(ABC).$$

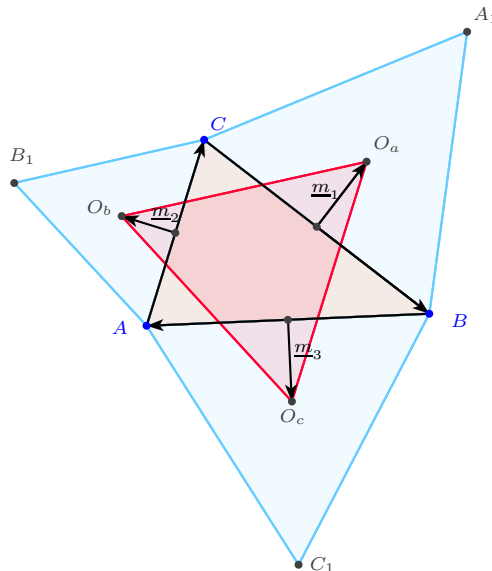
12. Állítás: Az  $ABC$  háromszöghöz tartozó két Napóleon-féle háromszög középpontja megegyezik.



12a. ábra

(Sőt, azonos az eredeti háromszög súlypontjával. – Ez a megjegyzés persze már segít a bizonyításban is.)

Bizonyítás:



12b. ábra

Az eredeti háromszög csúcsait az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  helyvektorokkal jellemezzük, majd felírjuk a rárajzolt szabályos háromszögek középpontjainak helyvektorait, s ezekből meghatározzuk a Napóleon-féle háromszög(ek) középpontját.

$$\underline{O}_a = \frac{1}{2} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) + \underline{m}_1$$

$$\underline{O}_b = \frac{1}{2} \cdot (\underline{a} + \underline{c}) + \underline{m}_2$$

$$\underline{O}_c = \frac{1}{2} \cdot (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{m}_3, \text{ ebből:}$$

$$\underline{S}_o = 1/3 \cdot (\underline{O}_a + \underline{O}_b + \underline{O}_c) = 1/3 \cdot (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3) = \underline{s}(ABC) + 1/3 \cdot (\underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3),$$

De:  $\underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 = \underline{0}$ , mert:

$$\underline{m}_1 = (\underline{b} - \underline{c})' \cdot \lambda,$$

$$\underline{m}_2 = (\underline{c} - \underline{a})' \cdot \lambda,$$

$$\underline{m}_3 = (\underline{a} - \underline{b})' \cdot \lambda,$$

ahol  $(\underline{b} - \underline{c})'$ ,  $(\underline{c} - \underline{a})'$ ,  $(\underline{a} - \underline{b})'$  az eredeti háromszög  $+90^\circ$ -os elforgatottjának oldalvektorai,  $\lambda$  pedig (jelenleg)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ .



Így:  $m_1 + m_2 + m_3 = \lambda \cdot [(b - c)' + (c - a)' + (a - b)'] = 0$ , azaz:  $S_o = \underline{s}(ABC)$ .

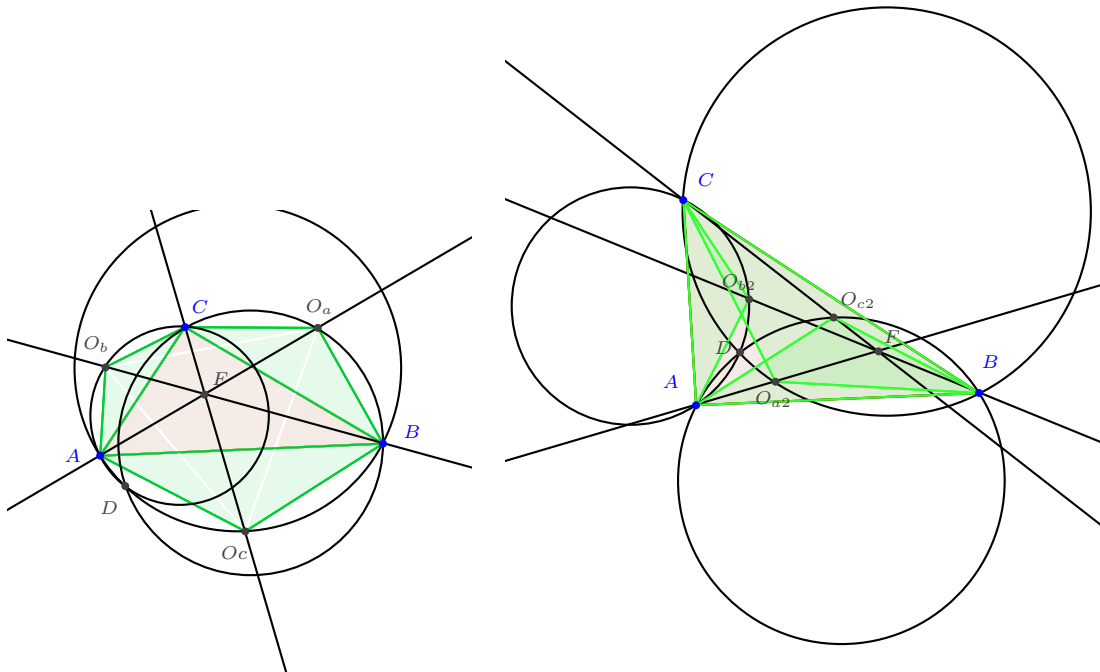
(A „belső” „Napoleon-féle” háromszög esetében ugyanígy számolunk, csak  $-m_1, -m_2, -m_3$ -mal.)

13. Végignézve az előző tétel bizonyítását, kiderül, hogy nem csupán azt láttuk be, hogy a két „Napoleon-féle” háromszög középpontja azonos az eredeti háromszög súlypontjával, hanem azt is beláttuk, hogy:

Ha egy (hegyesszögű) háromszög oldalai fölé kifelé (befelé) egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögeket írunk, akkor az „új csúcsok” alkotta háromszög súlypontja megegyezik az eredeti háromszög súlypontjával (a bizonyításban csupán  $\lambda$  értéke változik meg).

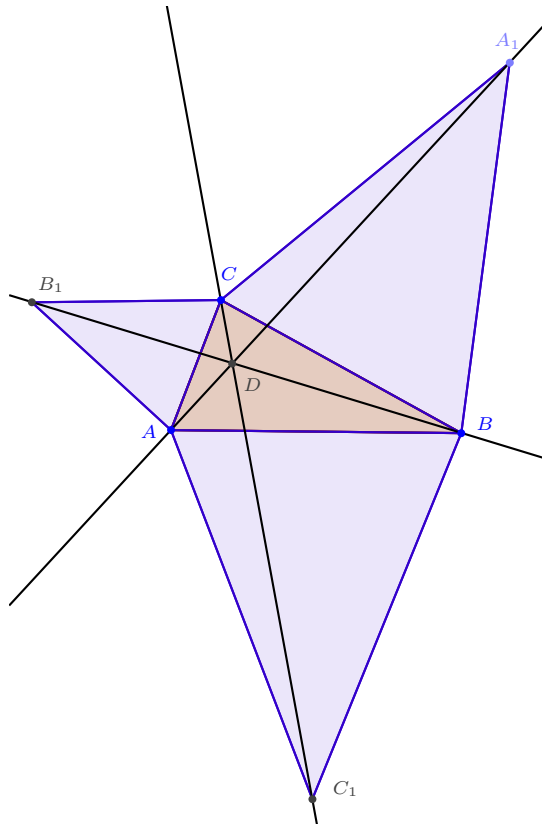
14. Érdemes megnézni, hogy az előző tételekből átvihető-e valamelyik az előbb említett, rárajzolt, egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögekre.

[Ha az egyenlő szárú háromszögek szárszöge  $120^\circ$ , akkor igaz, hogy e háromszögek köréírt körei is egy ponton mennek át. (Ennek bizonyításában már nem segít a 2. feladat, hisz  $3 \cdot 120^\circ \neq 180^\circ$ , de húrnégyszögekkel ez is belátható. Vagy egyszerűbben: ezek a körök azonosak a 9. ill. 7/a feladat köreivel...) – ezzel a problémával a táborban nem foglalkoztunk.]



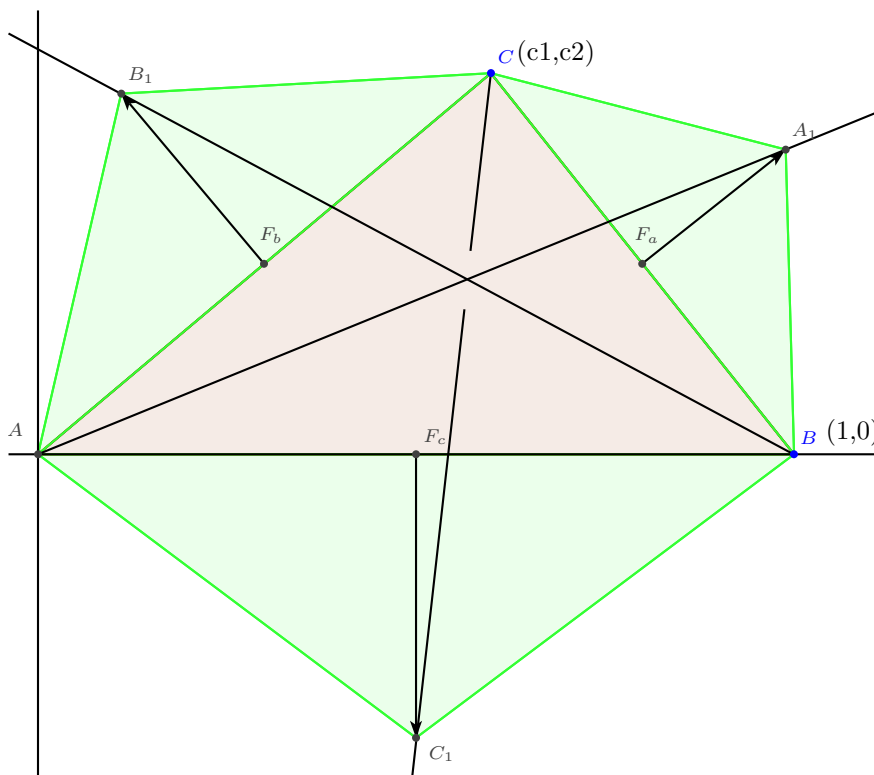
14a-b. ábra

[De:] Állítás: Ha a hegyesszögű háromszög oldalaira kifelé (befelé) egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögeket rajzolunk, akkor az új csúcsokat az eredeti háromszög szemköztes csúcsával összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül.



14c. ábra

Bizonyítása koordináta-geometriai úton egészen egyszerű, ha alkalmasan választjuk meg a koordináta-rendszert. (ld. a 14d. ábrát):



14d. ábra

Megadjuk az  $A_1, B_1, C_1$  pontok koordinátáit, majd felírjuk a három kérdéses egyenes egyenletét, s megmutatjuk, hogy egy ponton mennek át.

$$\underline{a}_1 = \underline{f}_a + \lambda \cdot \underline{n}_a,$$

ahol  $\underline{f}_a = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ ,  $\underline{n}_a$  a  $\overrightarrow{CB}$  vektor  $+90^\circ$ -os elforgatottja.

Koordinátákkal:

$$\underline{f}_a(\frac{1}{2} \cdot \{c_1 + 1\}; \frac{1}{2} \cdot c_2), \quad \underline{n}_a(c_2; 1 - c_1) \text{ így:}$$

$$\underline{a}_1(\frac{1}{2} \cdot \{c_1 + 1\} + \lambda c_2; \frac{1}{2} \cdot c_2 + \lambda \cdot \{1 - c_1\}).$$

Ebből az  $AA_1$  egyenes egyenlete:

$$(-2\lambda c_1 + c_2 + 2\lambda) \cdot x + (-c_1 - 2\lambda c_2 - 1) \cdot y = 0$$

...

Hasonlóképpen a másik két egyenes egyenlete:

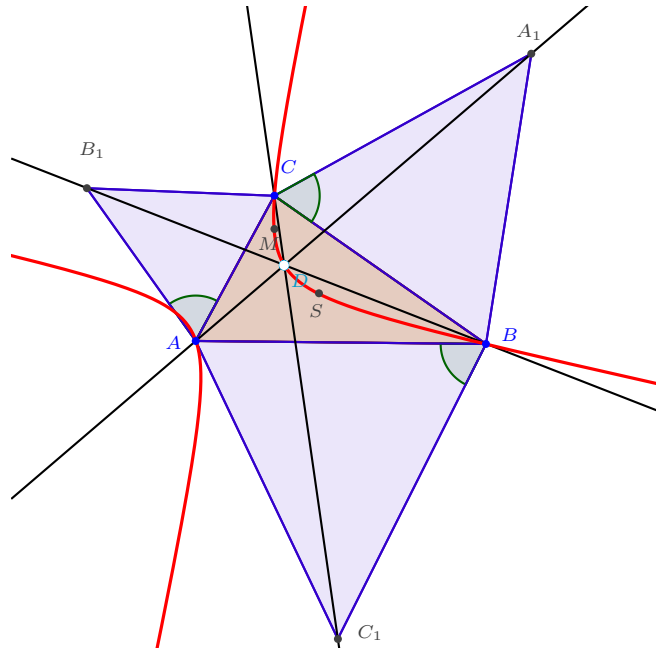
$$(-c_2 - 2\lambda c_1) \cdot x + (c_1 - 2\lambda c_2 - 2) \cdot y = -c_2 - 2\lambda c_1$$

$$(2c_2 + 2\lambda) \cdot x + (1 - 2c_1) \cdot y = c_2 + 2\lambda c_1.$$

E két egyenlet összege pont az  $AA_1$  egyenes egyenlete, ami azt bizonyítja, hogy mindhárman egy ponton mennek át.

(Ha  $\lambda$  pozitív, akkor a kifelé, ha negatív, akkor a befelé rajzolt háromszögekről van szó.)

15. Végül csak rajzon megnéztük, hogy az előbbi egyenesek közös pontja illeszkedik az eredeti háromszög csúcsai, magasság- és súlypontja által meghatározott derékszögű hiperbolára.



15. ábra

(Ezt a tételt nekem nem sikerült csak középiskolás ismeretekkel belátnom.)

E foglalkozás témájához Csiba Péternek a Polygon 2002. júniusi ill. 2007. júliusi számában megjelent cikke adta az ötletet.