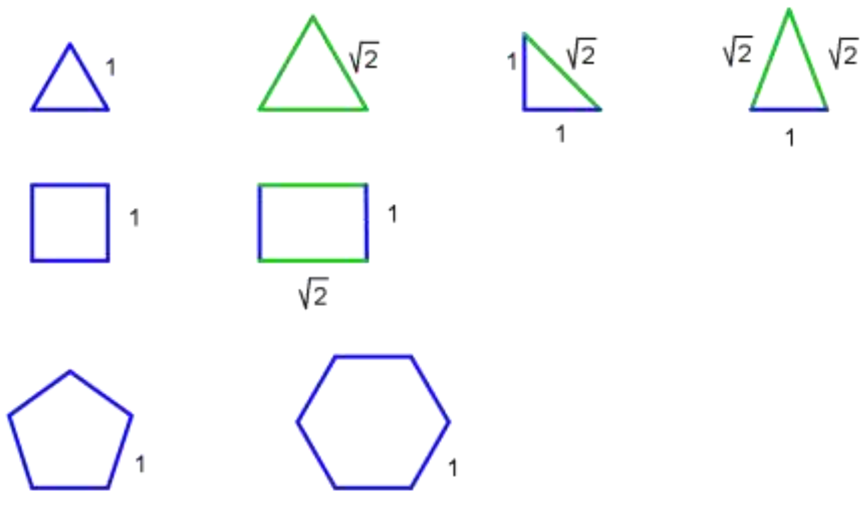
Geometriai szemléletfejlesztés Polydron készlet segítségével, szabályos és félig szabályos testek

Bevezetés

A Polydron készlet egy nagyszerű segédeszköz a tanulók geometria szemléletének, térszemléletének fejlesztéséhez. Lényegében játék közben fejlődik a látásmód, örömmel merülnek el a gyerekek a „LEGO-zás” élményében, s maga az összerakás erőteljesen fejleszti a kézügyességet is. A nagy testek összerakása már nem lehet egyéni feladat. Egyrészt, mert nagyon sok idő lenne, másrészt, mert nagyon sok elem kell hozzá. Össze kell dolgozni néhány gyereknek, meg kell szervezni a munkát. Mindenképpen jó közösségfejlesztő játék. Főleg 7-8. osztályosoknak ajánlom, de szívesen játszanak vele kisebbek vagy nagyobbak is egy-egy „lazítós” óra keretében. Az alábbi feladatsort hetedikesekkel csináltuk végig 6-8 tanóra alatt. Közben sokszor megálltunk az építkezésben, és összefoglaltuk, leírtuk az elméleti tapasztalatokat.

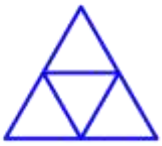
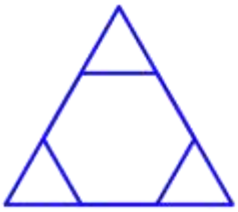
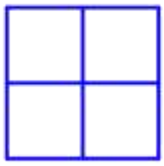
A Polydron készlet színes műanyag sokszögeket tartalmaz, melyek éleik mentén egymáshoz kapcsolhatók. Így számtalan síkidom és térbeli alakzat összerakható belőle. A gyerekek ezeket kezükbe fogva könnyedén állapítják meg a tulajdonságaikat, fedeznek fel általános összefüggéseket.
A készlet elemei a következők:
háromszögek, négyzet, téglalap, szabályos ötszög és hatszög
A sokszögek oldalainak hosszúsága **1** ill. $\sqrt{2}$

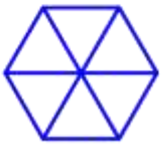


Feladatok síkban

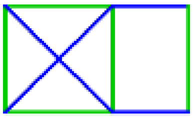
- *Rakj össze többféle méretű szabályos háromszöget, négyzetet, szabályos hatszöget! Használj hozzá minél több* ***féle*** *elemet!*

Néhány lehetséges példa. Rakhatunk össze több darabból álló alakzatokat is. Fontos, hogy előkerüljön a $\sqrt{2}$ oldalú négyzet előállítása.

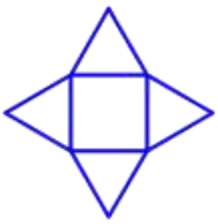
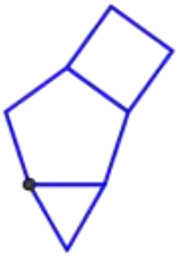
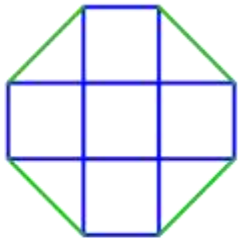
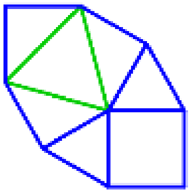



- *Rakj egy téglalapidom hosszabbik oldalához illeszkedő négyzetet!*



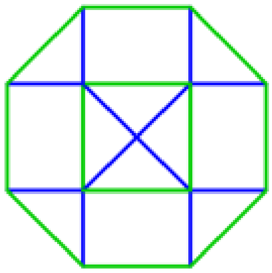
- *Rakj össze nyolcszöget! Milyen lett, konvex vagy konkáv? Rakj össze a másik feléből is egyet!*

Néhány lehetséges példa. Leginkább konkávokat tudunk összerakni. Érdemes külön megfigyelni a második nyolcszög megjelölt csúcsánál lévő szöget, ami 168^o, ill. a homorú szögeket, amik 198^o-osak. (Esetleg egyenes szögnek nézik a gyerekek.)

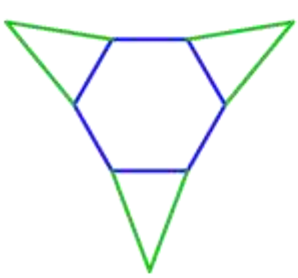
- *Rakj össze nyolcszöget, aminek minden szöge 135^o! Szabályos lett? Rakj össze szabályosat is!*

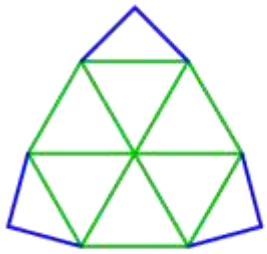
Az előző feladatnál ábrázolt harmadik nyolcszög minden szöge 90^o+45^o=135^o, de oldalai nem egyenlőek. Van $\mathbf{1}$ és $\sqrt{\mathbf{2}}$ hosszúságú oldala is. A szabályos nyolcszög középső négyzetének $\sqrt{\mathbf{2}}$ oldalúnak kell lennie, amihez téglalapok csatlakoznak. Így a szögek nem változnak és minden oldal hossza $\sqrt{\mathbf{2}}$ lesz.



- *Rakj össze kilencszöget! Milyen lett, konvex vagy konkáv? Rakj össze egy másik félét is!*

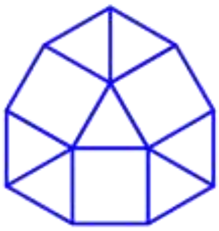
Egy-egy példa konkávra és konvexre. Mindkettő szabályos hatszög bővítésével készül. Érdemes végiggondoltatni, hogy ha szabályos háromszögeket teszünk a hatszöghöz, egy háromszög keletkezik (ld. fentebb). Természetesen összerakhatunk kevesebb szimmetriát tartalmazó kilencszöget is.





- *Rakj össze kilencszöget, aminek minden oldala egyenlő! Szabályos lett? Tudsz összerakni szabályosat is?*

Egyenlő oldalú kilencszöget összerakhatunk az ábra szerint, de itt a szögek nem egyenlőek, hisz van 120^o-os és 150^o-os szög is. Akár előre is végiggondolható, hogy nem tudunk szabályosat készíteni, a rendelkezésre álló sokszögek szögei nem adnak ki 140^o-ot.



Feladatok térben

- *Rakj össze egy tetszőleges testet! Számold meg a csúcsait, éleit és lapjait!*

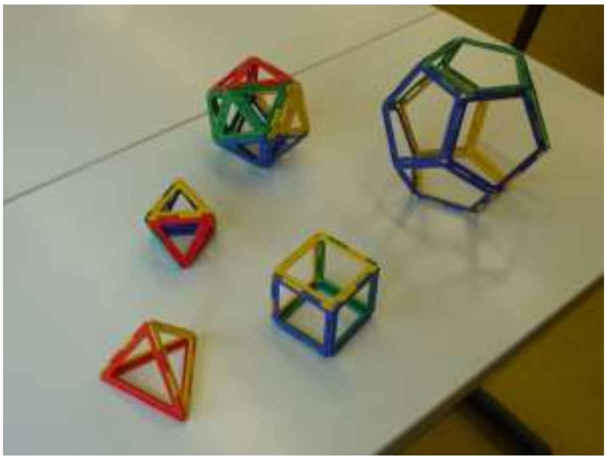
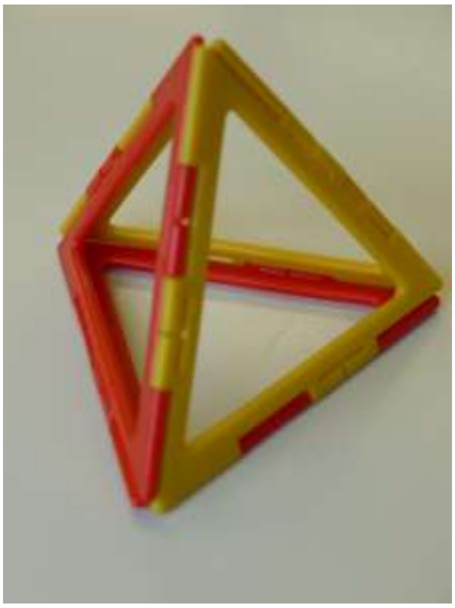
A gyerekek különböző testeket raknak össze. A megszámolt adatokból táblázatot készítünk. Könnyedén észreveszik a z összefüggést, sőt az esetleges egy-két számolási hiba is kiderül. Máris előttük áll az Euler-féle poliéder tétel, miszerint egy poliéder csúcsai és lapjai számának összege kettővel több, mint az élek száma. Természetesen nem cél ennél a korosztálynál a tétel bebizonyítása, ill. annak vizsgálata, hogy pontosan milyen poliéderekre igaz a tétel. (Nem nagyon tudnak összerakni olyan poliédert a készletből, amire ne lenne igaz a tétel.) Tehetségesebbeknek megemlíthetjük, hogy van ilyen is.

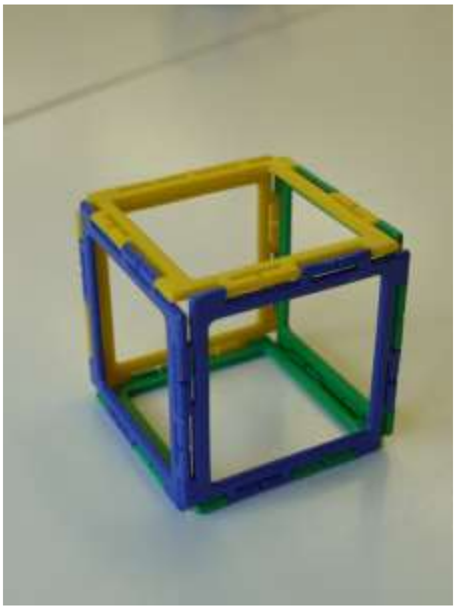
- *Fogalmazzuk meg, mit nevezünk szabályos testnek! Nézzük meg, milyen szabályos testek létezhetnek! Számoljuk meg a csúcsait, éleit, lapjait!*

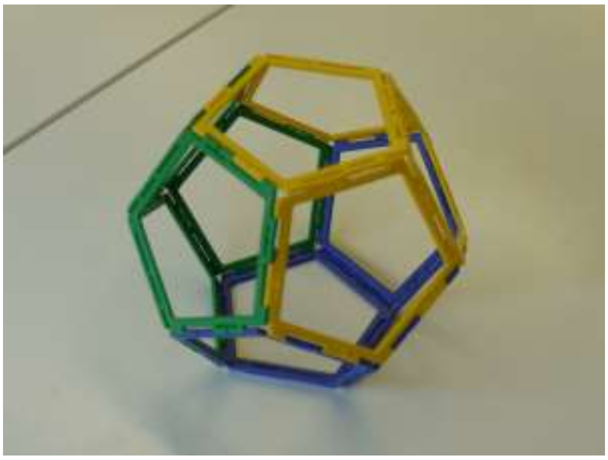
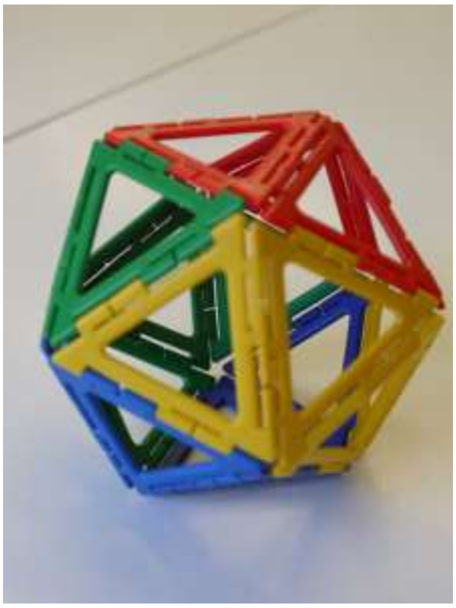
Nézzük végig a szabályos sokszögeket! Határozzuk meg a szögeiket, és számoljuk ki, ill. próbáljuk ki, hány darab csatlakozhat belőlük egy csúcsban! Építsük is össze a testeket!

Háromszögek:	3 db egy csúcsban – tetraéder	4 csúcs,	6 él,	4 lap
	4 db egy csúcsban – oktaéder	6 csúcs,	12 él,	8 lap
	5 db egy csúcsban – ikozaéder	12 csúcs,	30 él,	20 lap
	6 db már egy síkban van			
Négyzetek:	3 db egy csúcsban – kocka	8 csúcs,	12 él,	6 lap
	4 db már egy síkban van			
Ötszögek:	3 db egy csúcsban –dodekaéder	20 csúcs,	30 él,	12 lap
	4 db már több, mint 360^o			

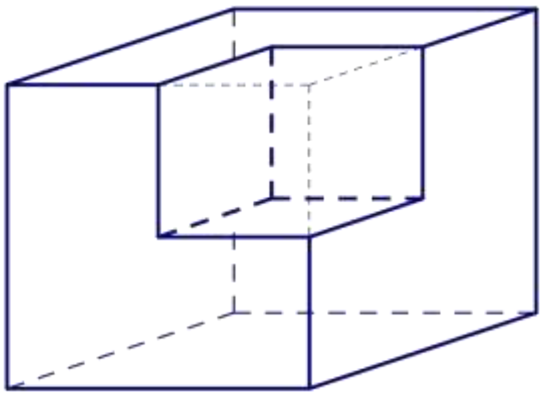
Ennél nagyobb szögszám esetén már 3db szögeinek összege is nagyobb, mint 180^o.
Tehát ötféle szabályos test létezhet, és létezik is,
a készletből összerakhatjuk őket.

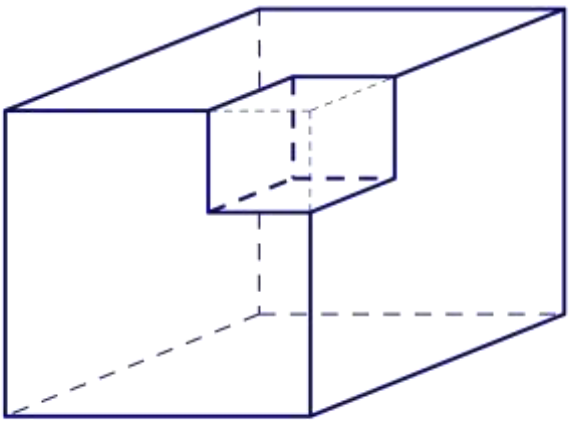


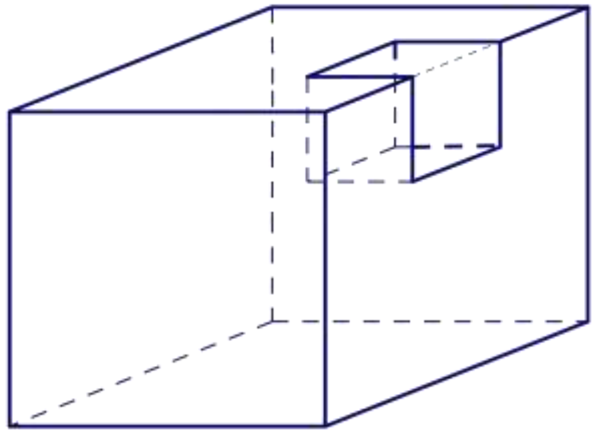
- *Rakj össze egy nagy kockát, amiből hiányzik egy kis kocka! Hányféleképpen lehet? Mik lehetnek az arányok? (Rakd össze a különböző eseteket!) Mekkora a keletkezett testek térfogata, ill. felszíne?*



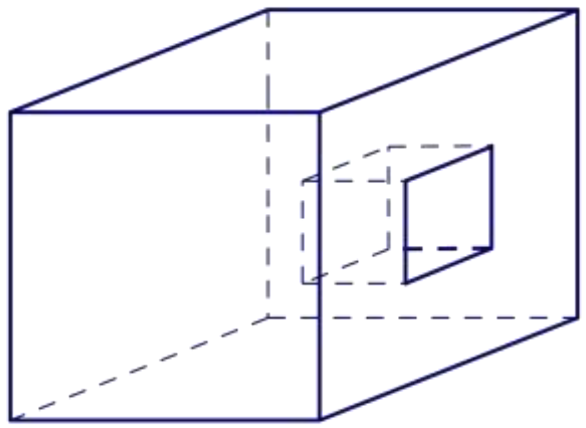
Lehet a kocka oldala 2 egység
Ebben az esetben a térfogat 8 – 1 = 7 egység, a felszín változatlanul 24 egység.



Lehet a kocka oldala 3 egység
Ebben az esetben a térfogat 27 – 1 = 26 egység, a felszín változatlanul 54 egység.



Ebben az esetben a térfogat 26egység, a felszín 56 egység.



Ebben az esetben a térfogat 26 egység, a felszín 58 egység.

Változtathatjuk még a két kocka méretének arányát. (Praktikusan nem építenek 3 egységnél nagyobb oldalú kockát, mert túl nagy.)

- *Hiányozzon most a kocka minden csúcsánál egy kis kocka! Mekkora a felszín és térfogat?*

Láttuk az előbbi példán, hogy minden csúcsnál elvett egységnyi élű kocka eggyel csökkenti a térfogatot, de nem változtatja a felszínt. Így 3 egység oldalú kocka esetén a térfogat 27-8=19, a felszín 54 egység.

- *Rakj össze egy kockát, amit középen egy négyzet alakú „alagút” szel át! Rakd össze a hiányzó darabot is! Mekkora a testek térfogata, ill. felszíne?*

Most is 3 egység oldalú kockából indulunk. Az alagút egy 1x1x3 e méretű hasáb. Térfogata 3 e, így a maradék térfogat 27-3=24 e. A felszín csökkent 2-vel a kocka lapjain, és növekedett 4x3-mal belül, így 64 egység.
A kivágott darab térfogata 3, felszíne 4x3+2= 14 egység.

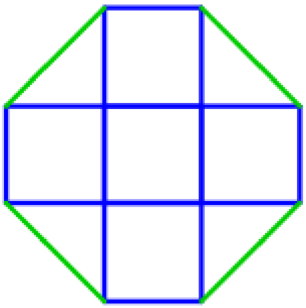
- *Oldd meg az előző feladatot 2, ill. 3 db egymásra merőleges „alagút”-tal is!*

Két alagút esetén:
A térfogat csökken még 2-vel, így 22 egység. A felszín csökken 2+2-vel a kocka lapján, ill. az alagút falánál, és növekszik 2x4-gyel az új alagút falainál. Most a felszín 68 egység.
A kivágott „kereszt” térfogata 5, felszíne 4x5=20 egység.
Három alagút esetén:
A térfogat csökken még 2-vel, így 20 egység. A felszín csökken 2+2-vel a kocka lapján, ill. az alagút falánál, és növekszik 2x4-gyel az új alagút falainál. Most a felszín 72 egység.
A kivágott darab térfogata 7, felszíne 6x5=30 egység.

- *Egy kocka egy csúcsát levágjuk egy olyan vágással (síkkal), ami az oldalak csúcshoz közelebbi harmadoló pontján megy át. Rakd össze a két keletkezett testet!*

Itt a kérdéses csúcsnál derékszögű háromszögeket, ill. a síkmetszetnél $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszögeket kell használnunk az építéshez.

- *Egy kocka minden csúcsát levágjuk az előbbi módon. Rakd össze a maradék testet! Milyen sokszögek határolják? Hány csúcsa, éle, lapja van?*



Az eredeti kockacsúcsok helyén $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszögek keletkeznek (8 db), az oldallapokból nyolcszögek lesznek. Összesen 8x3=24 csúcs, 6+8=14 lap és 36 él van.

- *Rakj össze egy olyan testet, aminek a felépítése olyan, mint az előbbié, de a határoló nyolcszögek is szabályosak!*

Fel kell használni az elején összerakott szabályos nyolcszöget.

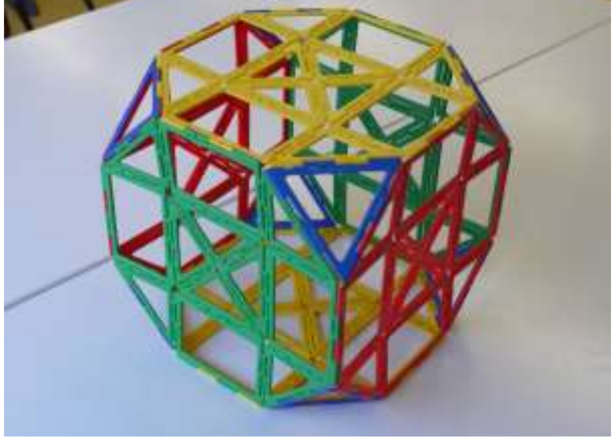
- *Hol kell elmetszeni a kocka éleit, hogy ilyen testet kapjunk?*

A kocka oldalát 1-nek, a keletkező test élét a-nak véve:

$1 = a + 2\frac{\sqrt{2}}{2}a,$ amiből $a = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$

A keletkező test egy **félig szabályos,** avagy **archimédeszi** test. Ezeknek a testeknek lapjai szabályos sokszögek, testszögletei egybevágóak. (Azaz minden csúcsban ugyanolyan sokszögek találkoznak, ugyanolyan sorrendben.)
A következőkben előállítjuk ezeket a testeket:

1. csonkolt kocka

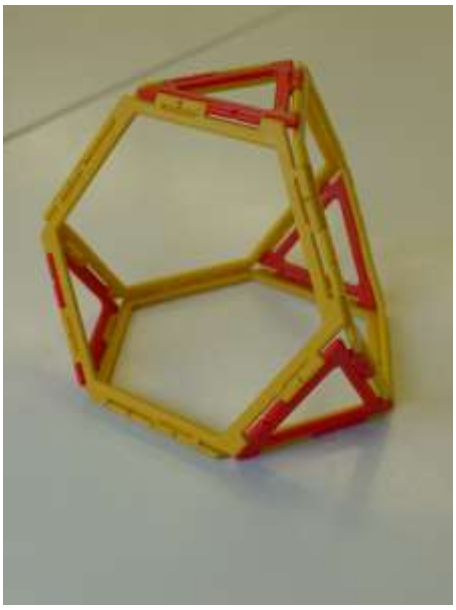


csúcsok száma: 24
élek száma: 36
lapok száma: 14, ebből 8 háromszög, 6 nyolcszög
egy szögletben találkozó lapok: (3, 8, 8)

- *Hasonló módon vágjuk le egy szabályos tetraéder csúcsait! Rakd össze a keletkezett testet! Határozd meg a test csúcsainak, éleinek, lapjainak számát!*

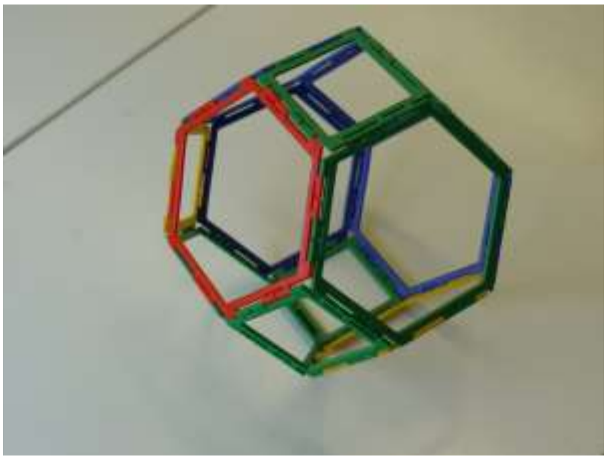
Itt a harmadoló pontokon kell elmetszeni az oldalakat.

2. csonkolt tetraéder
csúcsok száma: 12
élek száma: 18
lapok száma: 8, ebből 4 háromszög, 4 hatszög
egy szögletben találkozó lapok: (3, 6, 6)



- *Vágjuk le hasonlóan a többi szabályos test csúcsait is! Rakd össze! Határozd meg a test csúcsainak, éleinek, lapjainak számát!*

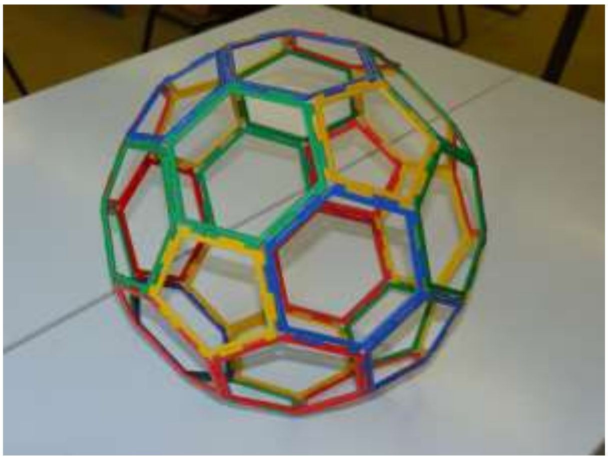
3. csonkolt oktaéder
csúcsok száma: 24
élek száma: 36
lapok száma: 14, ebből 6 négyzet, 8 hatszög
egy szögletben találkozó lapok: (4, 6, 6)



4. csonkolt dodekaéder *Ez a test nem összerakható a készletből.*
csúcsok száma: 60
élek száma: 90
lapok száma: 32, ebből 20 háromszög, 12 tízszög
egy szögletben találkozó lapok: (3, 10, 10)

5. csonkolt ikozaéder (focilabda, fullerén)

csúcsok száma: 60
élek száma: 90
lapok száma: 32, ebből 12 ötszög, 20 hatszög
egy szögletben találkozó lapok: (5, 6, 6)



Látható, hogy a kocka-oktaéder ill. a dodekaéder-ikozaéder párban a csonkolt test csúcsinak, éleinek, lapjainak száma megegyezik. Ennek oka, hogy a két-két test egymás duálisa. Ez azt jelenti, hogy a kocka lapjainak középpontjai oktaédert, az oktaéder középpontjai kockát határoznak meg. Ugyanez a helyzet a dodekaéder-ikozaéder párral is.

- *Vágjuk le egy tetraéder összes csúcsát úgy, hogy a síkok az oldalak felezőpontjain mennek át! Rakd össze a maradék testet! Hány csúcsa, éle, lapja van?*

Az előzőhöz hasonlóan a vágási felületek szabályos háromszögek, a maradék oldallapok szintén azok. Összesen 8 db, ami éppen egy oktaédert alkot. Ebben az esetben nem félig szabályos test keletkezik.

- *Vágjuk le egy kocka csúcsait egy-egy olyan vágással (síkkal), ami az oldalak felezőpontján megy át! Rakd össze a keletkezett testet! Határozd meg a test csúcsainak, éleinek, lapjainak számát!*

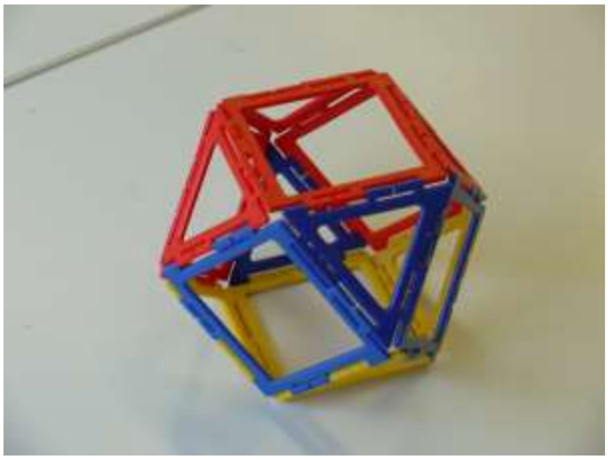
Az eredeti kockacsúcsok helyén $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszögek keletkeznek (8 db), az oldallapokból $\sqrt{2}$ oldalú négyzetek lesznek. Összességében egy félszabályos test keletkezik. Összesen (6x4)/2=12 csúcs, 6+8=14 lap és 24 él van.

- *Vágjuk le most ugyanígy egy oktaéder csúcsait felezőpontokon áthaladó síkokkal! Rakd össze a testet! Milyen test keletkezik?*

Az előzővel egybevágó test keletkezik. Ennek oka a kocka és oktaéder duális tulajdonsága.

6. kuboktaéder

csúcsok száma: 12
élek száma: 24
lapok száma: 14, ebből 8 háromszög, 6 négyzet
egy szögletben találkozó lapok: (3, 4, 3, 4)

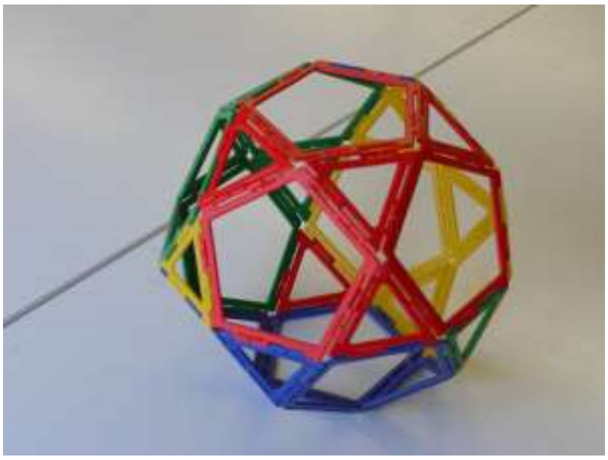


- *Vágjuk le a dodekaéder csúcsait oldalfelező pontokon átmenő síkokkal! Rakd össze a testet! Határozd meg a test csúcsainak, éleinek, lapjainak számát!*

- *Vágjuk le az ikozaéder csúcsait oldalfelező pontokon átmenő síkokkal! Rakd össze a testet! Milyen test keletkezik?*

A dualitás miatt most is két egyforma test keletkezik.

7. ikozidodekaéder
csúcsok száma: 30
élek száma: 60
lapok száma: 32, ebből 20 háromszög, 12 ötszög
egy szögletben találkozó lapok: (3, 5, 3, 5)

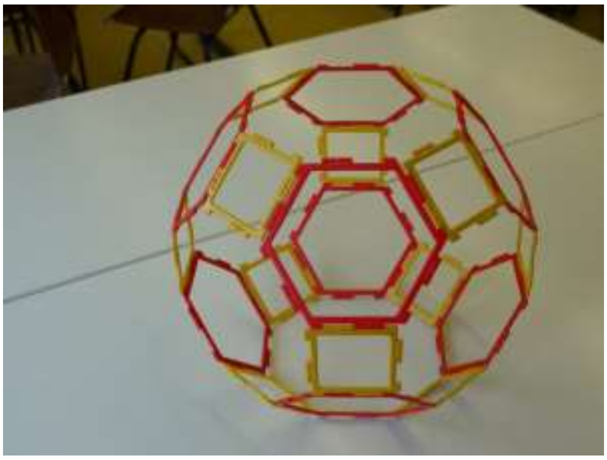


Mi történik, ha hasonló módon tovább csonkoljuk a félig szabályos testeket? Keletkeznek-e újabbak?
Az első öt test esetén 3 sokszög találkozik egy csúcsban, amik nem egybevágóak. Ha ezeket levágjuk, vagy a vágási felületen keletkezett háromszög nem lesz szabályos, vagy az oldallapokból megmaradó sokszögek. Ez tehát nem vezet célra.
Az utóbbi két test esetén sem jó látszólag a helyzet. Itt 4 sokszög találkozik egy csúcsban, és a szemköztiek egybevágóak. Az előbbi metszések nyomán a csúcsok helyén téglalapok keletkeznek. A maradék sokszögek egyik része tud szabályosak lenni. Mégis az a kép van előttünk, hogy ha ügyesen önmagukkal párhuzamosan eltolnánk a lapokat, elő tudna állni olyan állapot, hogy „közöttük" a téglalapok négyzetek lennének és minden sokszög szabályos lenne.

- *Vágjuk le a kuboktaéder csúcsit úgy, hogy a maradék oldallapok hatszögek ill. nyolcszögek legyenek! Rakj össze egy ilyen szerkezetű testet szabályos sokszögekből!*

A keletkezett test valóban félig szabályos.

8. csonkolt kuboktaéder
csúcsok száma: 48
élek száma: 72
lapok száma: 26, ebből 12 négyzet, 8 hatszög,
6 nyolcszög
egy szögletben találkozó lapok: (4, 6, 8)



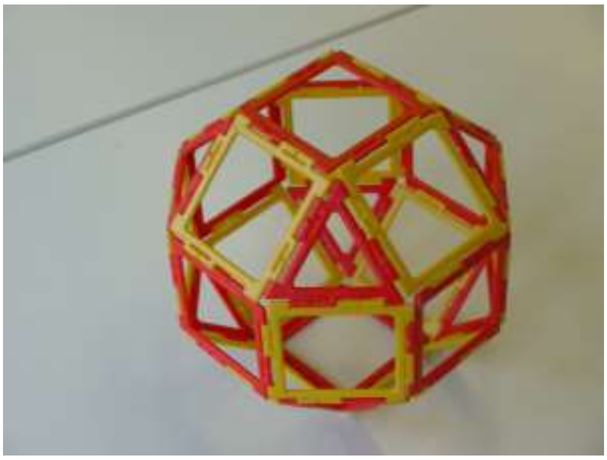
- *Hasonlóan vágjuk le az ikozidodekaéder csúcsait is!*

9. csonkolt ikozidodekaéder *Ez a test nem összerakható a készletből.*
csúcsok száma: 120
élek száma: 180
lapok száma: 62, ebből 30 négyzet, 20 hatszög, 12 tízszög
egy szögletben találkozó lapok: (4, 6, 10)

- *Vágjuk le a kuboktaéder csúcsit úgy, hogy a maradék oldallapok háromszögek ill. négyszögek legyenek! Rakj össze egy ilyen szerkezetű testet szabályos sokszögekből!*

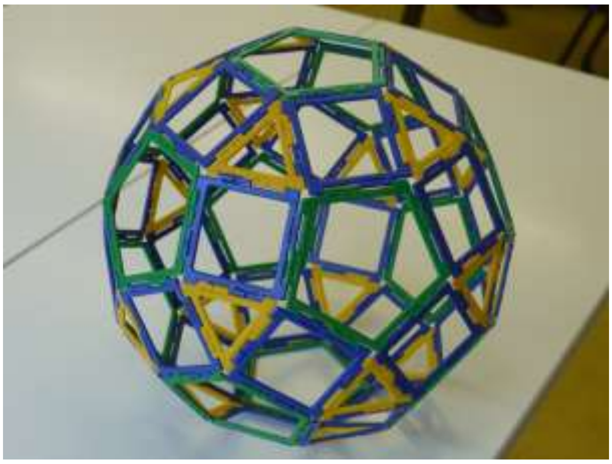
Ez a test is félig szabályos lett.

10. rombikuboktaéder
csúcsok száma: 24
élek száma: 48
lapok száma: 26, ebből 8 háromszög, 18 négyzet
egy szögletben találkozó lapok: (3, 4, 4, 4)



- *Vágjuk le az ikozidodekaéder csúcsit úgy, hogy a maradék oldallapok háromszögek ill. ötszögek legyenek! Rakj össze egy ilyen szerkezetű testet szabályos sokszögekből!*

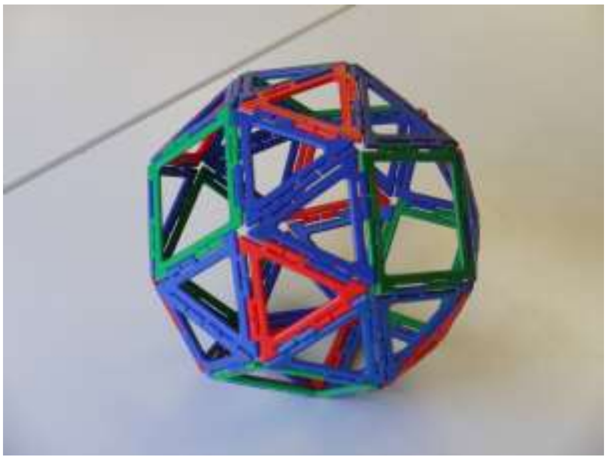
11. rombikozidodekaéder
csúcsok száma: 60
élek száma: 120
lapok száma: 62, ebből 20 háromszög, 30 négyzet, 12 ötszög
egy szögletben találkozó lapok: (3, 4, 5, 4)



Hová vezet, ha ez utóbbi testeket tovább csonkoljuk? Látható, hogy az egy szögletben találkozó sokszögek elhelyezkedésében nincs szimmetria, így nem keletkezhet félig szabályos test.
Van még két archimédeszi test, amit a kocka ill. a dodekaéder egy bonyolult, ferde csonkolásával kaphatunk. Ennek követése helyett egyszerűen rakjuk össze őket annak alapján, hogy milyen sokszögek találkoznak egy csúcsban!
Érdekessége ezeknek a testeknek, hogy kétféle körüljárással lehet őket összerakni. Tehát két összerakott test vagy eltolható egymásba, vagy egymás tükörképei.

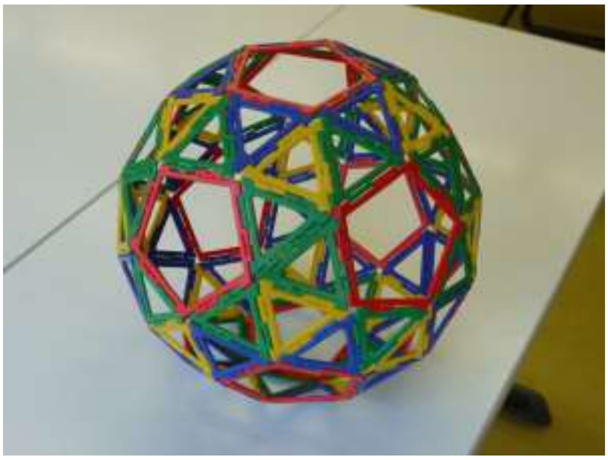
- *Rakd össze a (3, 3, 3, 3, 4) szögletű félig szabályos testet!*

12. pisze kocka
csúcsok száma: 24
élek száma: 60
lapok száma: 38, ebből 32 háromszög, 6 négyzet
egy szögletben találkozó lapok: (3, 3, 3, 3, 4)



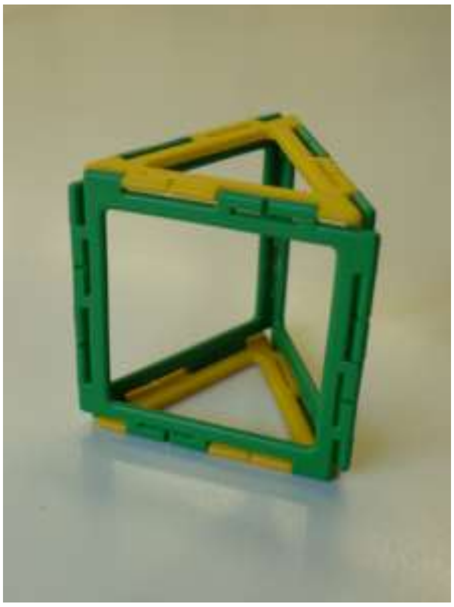
- *Rakd össze a (3, 3, 3, 3, 5) szögletű félig szabályos testet!*

13. pisze dodekaéder
csúcsok száma: 60
élek száma: 150
lapok száma: 92, ebből 80 háromszög, 12 ötszög
egy szögletben találkozó lapok: (3, 3, 3, 3, 5)



Van még kétféle test, amelyik rendelkezik a félig szabályos testek kritériumaival. Forgásszimmetriájuk miatt azonban nem soroljuk az archimédeszi testek közé.

Ezek a prizmák: szabályos sokszög alapú egyenes hasábok, melyeknek oldallapjai négyzetek.



És az antiprizmák: két szemben lévő lapjuk egybevágó szabályos sokszög egymáshoz képest elforgatva. Oldallapjai szabályos háromszögek.