Erben Péter: Ptolemaiosz hagyatéka

Bevezető

A következő feladatsor Stanley Rabinowitz *Ptolemy's Legacy* címet viselő készülő könyvének első néhány fejezetét dolgozza fel. A szerző a következő bevezetővel indítja írását:

> Our story begins around the year 150 AD when the Alexandrian mathematician, geographer, and astronomer Claudius Ptolemaeus published his monumental work, the *Almagest*, which provided the mathematical foundations for computing the future and past position of the planets. The theory was based on the prevailing geocentric model of the solar system in which the planets moved in circles around the Earth. To aid in his computations, Ptolemy proved a theorem connecting the distances between four points on a circle (see figure on right). This result has been so useful, that it has come to be known as Ptolemy's Theorem. Over the coming centuries, even to this day, mathematicians have been analyzing and generalizing this theorem in many different directions. Little did Ptolemy imagine the wealth of beautiful and intriguing mathematics that was generated by mathematicians over the years based on his innocuous theorem.
>
> This book is about pretty geometry results.

1. szakasz – Van Schooten tétele

Van Schooten tétele: Az ABC szabályos háromszög köréírt körének rövidebb AB ívén felvett tetszőleges P pontra:

$$PA + PB = PC.$$

Kérdezzünk!

1. Mi a helyzet, ha a háromszög csak egyenlő szárú: $AC = BC$ (például 2,2,1 oldalakkal)?
2. Általában mit mondhatunk egyenlő szárú háromszögekre?
3. Izogonális pont és a háromszög oldalaira kifele rajzolt szabályos háromszögek.
4. Mi a helyzet általános háromszög esetén?
5. Hogy szól és igaz-e a tétel megfordítása?

2. szakasz – Ptolemaiosz tétele

Ptolemaiosz tétele: Az $ABCD$ húrnégyszög oldalai és átló között fennáll a következő kapcsolat:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

Kérdezzünk!

1. Mi a helyzet, ha a $ABCD$ nem húrnégyszög? Hol romlik el a bizonyítás? Állíthatunk kevesebbet? Általánosabbat?

2. Vizsgáljuk meg a tétel állítását speciális négyszögekre!

   (a) négyzet;

   (b) téglalap;

   (c) húrtrapéz;

   (d) az egyik átló átmérő

3. Az oldalakat a, b, c, d-vel, az átlókat x-szel és y-nal, a félkerületet s-sel, a területet T-vel, a köréírt kör sugarát pedig R-rel jelöljük (x egyik végpontjában a és d találkozik). Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket:

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

$$x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

3. szakasz – Alkalmazások, általánosítások, következmények

1. Vegyünk fel az $A_1A_2A_2\ldots A_n$ páratlan oldalszámú szabályos sokszög köréírt körén egy P pontot, amely a rövidebb A_1A_n íven van. Jelölje a_i a PA_i szakasz hosszát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k = 0.$$

   Mit állíthatunk páros oldalszám esetén?

2. (*Dickson-tétel*) Az $A_1A_2A_2\ldots A_n$ páratlan oldalszámú szabályos sokszög köréírt körének sugara R, P az A_n-nel átellenes pont, és a_i a PA_i szakasz hossza. Ekkor igaz a következő:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^{k-1} a_k = R.$$

   Mit mond ki a tétel szabályos ötszögre? Írjuk át a tételt trigonometrikus alakra!

3. (*Fuhrmann-tétel*) Tetszőleges $ABCDEF$ húrhatszögre:

$$AD \cdot BE \cdot CF = AB \cdot CD \cdot EF + BC \cdot DE \cdot FA + AD \cdot BC \cdot EF + BE \cdot CD \cdot FA + CF \cdot DE \cdot AB$$