Gyürke Csaba: Csoportok bevezetés

Először egy szabályos háromszög egybevágósági transzformációival dolgozunk. Legyenek A, B, C a háromszög csúcsai pozitív körüljárás szerinti sorrendben. Legyen id az identikus leképezés, f_1 a 120 fokos forgatás, f_2 a 240 fokos forgatás, és jelölje t_1, t_2 és t_3 a három tükrözést, úgy, hogy t_1 tükörtengelye az A csúcson, t_2 tükörtengelye a B csúcson, t_3 tükörtengelye a C csúcson haladjon át.

Mivel a háromszöghöz csak ez a hat egybevágósági transzformáció tartozik, és egybevágósági transzformációk egymás utáni elvégezése is egybevágósági transzformációnak felel meg, ezért bevezethetünk egy kétváltozós műveletet az $\{id, f_1, f_2, f_3, t_1, t_2, t_3\}$ halmazon, olyan módon, hogy két transzformációhoz hozzárendeljük az egymás utáni elvégzésüket helyettesítő transzformációt. Ezt a $\cdot$ műveletjellel jelöljük.

Készítsünk művelettáblázatot! A legfelső sorba és a baloldali oszlopba írjuk be a transzformációk jeleit, az egyes cellákba pedig a művelet eredményét, ha az első változót a baloldali oszlop, a második változót pedig a legfelső sor mutatja. Azaz, a sor mutatja az először végrehajtandó transzformációt, az oszlop a másodikként végrehajtandót, a cellába pedig a kettő egymás utáni elvégzését helyettesítő transzformáció kerül.

$\cdot$	id	f_1	f_2	t_1	t_2	t_3
id	id	f_1	f_2	t_1	t_2	t_3
f_1	f_1	f_2	id	t_2	t_3	t_1
f_2	f_2	id	f_1	t_3	t_1	t_2
t_1	t_1	t_3	t_2	id	f_2	f_1
t_2	t_2	t_1	t_3	f_1	id	f_2
t_3	t_3	t_2	t_1	f_2	f_1	id

1.) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a szabályos háromszög egybevágósági transzformációinak halmazán!

$f_2 \cdot x = t_3$
$x \cdot t_2 = f_1$
$(f_1 \cdot x) \cdot t_1 = id$
$(f_2 \cdot x) \cdot (t_1 \cdot t_2) = f_1$
$t_1 \cdot (x \cdot t_3) = f_2$
$f_2 \cdot (f_1 \cdot x) = f_1$

A feladatok megoldásánál használjuk fel a művelettáblázatot! Például az első egyenletet úgy oldhatjuk meg, hogy az f_2 transzformáció sorában megkeressük, hogy hol áll t_3, és a megfelelő oszlop adja meg a megoldást, ami t_1.

A második egyenlet megoldásához a t_2 oszlopában kell f_1-et megkeresnünk. Hasonlóan járhatunk el a zárójeles feladatoknál is. Itt először megkeressük, hogy a zárójelbe tett kifejezés melyik transzformáció lehet, majd abból az előbb használt módszerrel kikeressük a megoldást. Azaz például a harmadik egyenlet megoldásához először t_1 oszlopában megkeressük id-t, ami t_1 sorában van, tehát azt kaptuk, hogy $f_1 \cdot x = t_1$, ezt pedig az első két egyenlethez használt módszerrel tudjuk megoldani.

Olyan egyenletekkel is foglalkozhatunk, ahol az ismeretlen négyzetre van emelve. Az x^2 lehetséges értékeit a művelettáblázat főátlójából tudjuk kiolvasni. Így az alábbi egyenleteket is megoldhatjuk. Itt már előfordulhat, hogy több megoldás is van, vagy esetleg nincs megoldás.

2.) Oldjuk meg az egyenleteket a szabályos háromszög egybevágósági transzformációinak halmazán!
$x^2 \cdot t_1 = t_2$
$t_3 \cdot x^2 = t_3$
$t_2 \cdot x^2 = f_1$

Az $id \cdot x = x$ és az $x \cdot id = x$ egyenletek minden x egybevágósági transzformációra teljesülnek, ezért azt mondjuk, hogy id a $\cdot$ művelet egységeleme.

A $t_1 \cdot x = id$ és $x \cdot t_1 = id$ egyenleteknek csak a t_1 tükrözés a megoldásuk, azt mondjuk, hogy t_1 inverze t_1. Hasonlóan, az $f_2 \cdot f_1 = f_1 \cdot f_2 = id$ egyenlőségek is fennállnak, ezért f_1 inverze f_2-nek. A szabályos háromszög egybevágósági transzformációinak halmazán minden transzformációnak pontosan egy inverze van. Az inverzelemet a továbbiakban a kitevőbe írt $^{-1}$ jelöli.

3) Számítsuk ki az alábbi transzformációszorzatokat!
$(t_1 \cdot f_2) \cdot t_3 =$
$t_1 \cdot (f_2 \cdot t_3) =$
$(f_1 \cdot id) \cdot f_2 =$
$f_1 \cdot (id \cdot f_2) =$
$(t_1 \cdot f_2) \cdot t_1 =$
$t_1 \cdot (f_2 \cdot t_1) =$

Azt tapasztaljuk, hogy az első kettő műveletsor eredménye megegyezik, hasonlóan a harmadik és negyedik illetve az ötödik és hatodik is. A $\cdot$ művelet nem csak ezekben az esetekben, hanem mindig átzárójelezhető, azaz a művelet asszociatív.

Tehát az $\{id, f_1, f_2, t_1, t_2, t_3\}$ halmazon értelmezett $\cdot$ műveletre igaz, hogy van egységeleme, minden elemnek van inverze, és a művelet asszociatív. Ha ez a három tulajdonság egy halmazra és azon értelmezett műveletére teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a halmaz a művelettel csoportot alkot.

Most nézzük az $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz összes részhalmazát! Vizsgáljuk meg, hogy vajon U összes részhalmaza az unió művelettel csoportot alkot-e? Egységelem van, az üreshalmaz. Viszont nincs minden elemnek inverze, például $\{1; 4\} \cup A = \emptyset$ nem teljesül egyetlen A halmazra sem.

Viszont U összes részhalmaza a szimmetrikus különbség művelettel csoportot alkot. Az egységelem az üreshalmaz, és minden A halmaznak az inverze önmaga.

Ebben a csoportban is megoldhatunk egyenleteket.

4.) Legyen $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ alaphalmaz.
a) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!
$\{1; 2; 3\}\Delta X = \{1; 5\}$
$(\{2; 4\}\Delta X)\Delta\{3, 5\} = \{1\}$
$((\{1; 4\}\Delta X)\Delta\{1; 3; 4\})\Delta X = \{3\}$

b) Oldjuk meg az egyenletrendszert!
$$\begin{cases} X\Delta\{1; 4\} = Y\Delta\{2; 4\} \\ X\Delta\{2; 5\} = (X\Delta Y)\Delta\{3; 5\} \end{cases}$$

A permutációk is csoportot alkotnak a permutációszorzásra nézve. Permutációkra többféle írásmód is van, mi az úgynevezett kétsoros írásmódot használjuk. Tehát például az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ azt jelenti, hogy az 1-es szám elkerül a 3-as helyre, a 2-es a 2-es helyen marad, stb.

5.) Számítsuk ki az alábbi permutációszorzatokat!
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

A háromszög egybevágósági transzformációi közül kiválogatjuk azokat, amelyek megtartják a háromszög irányítását, ezeket mozgásoknak nevezzük. Három ilyen transzformáció van: id, f_1 és f_2. Mivel a $\cdot$ művelet asszociatív a háromszög egybevágósági transzformációinak halmazán, így biztosan asszociatív annak részhalmazán, a mozgások halmazán is. Leellenőrizhető, hogy a szabályos háromszög mozgásai is csoportot alkotnak a $\cdot$ művelettel. Ezért azt mondjuk, hogy $\{id, f_1, f_2\}$ részcsoportja az $\{id, f_1, f_2, t_1, t_2, t_3\}$ csoportnak.

Ahhoz, hogy leellenőrizzük, hogy egy részhalmaz részcsoport-e, arra van szükség, hogy megnézzük, hogy az egységelem benne van-e a részhalmazban, minden részhalmazbeli elem inverze benne van-e részhalmazban, illetve azt, hogy a művelet nem vezet ki a részhalmazból. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a részhalmazhoz elkészített művelettáblázat celláiban csak olyan elemek szerepelnek, amelyek az adott részhalmazból valóak.

6.) a) Az alábbiak közül melyek részcsoportjai a szabályos háromszög egybevágósági transzformációi által alkotott csoportnak?
$\{id, t_1, t_2\}$
$\{id, t_2\}$
$\{id, f_2, t_1\}$
$\{id\}$

b) Legyen U az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz részhalmazainak halmaza, vegyük rajta a szimmetrikus differencia műveletét! Ebben a csoportban az alábbiak közül melyek alkotnak részcsoportot?
$A = \{\ \{1; 2\}\}$
$B = \{\ \emptyset; \{5\}\}$
$C = \{\ \emptyset; \{4\}; \{5\}\}$
$D = \{\ \emptyset; \{1; 2; 3\}; \{1; 2\}; \{1\}\}$
$E = \{\ \emptyset; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}\}$
$F = \{\ \emptyset; \{1; 2; 3; 4; 5\}\}$
$G = \{\ \emptyset; \{1; 2\}; \{2; 4; 5\}; \{1; 2; 3; 4; 5\}\}$
$H = \{\ \emptyset; \{1\}; \{2; 3\}; \{4; 5\}; \{1; 2; 3; 4; 5\}\}$

c) Az $\{1; 2; 3\}$ halmaz permutációcsoportjának részcsoportja-e az alábbi részhalmaz?
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Az $\{1; 2; 3; 4\}$ halmaz permutációcsoportjának részcsoportja-e az alábbi részhalmaz?
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Visszatérünk a permutációk szorzásához.

7.) a) Adjuk meg az alábbi hatványokat!
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}^2 =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}^3 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}^7 =$$

Megfigyelhetjük, hogy a fenti permutáció második és hetedik hatványa megegyezik. Ez annak a következménye, hogy a permutáció ötödik hatványa az identikus leképezés.

A következő feladatoknál is érdemes keresni olyan hatványt, ami az identikus leképezést adja. Ezt legegyszerűbben úgy találhatjuk meg, hogy a permutációt mint ciklusokat képzeljük el, és az egyes ciklusok hosszainak legkisebb közös többszöröse megfelelő ilyen kitevő lesz.

7.) **b)** Adjuk meg az alábbi hatványokat!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{1433} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{2011} =$$

Legyen g egy csoport adott eleme. A legkisebb olyan pozitív egész kitevőt, amelyre g–t emelve az egységelemet kapjuk, a g elem rendjének nevezzük. Például a szabályos háromszög egybevágósági transzformációinak csoportjában az id rendje 1, a tükrözések rendje 2, a forgatások rendje pedig 3.

8.) Mennyi a rendje az alábbi permutációknak?

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$