Matektábor, Tata, Berzsenyi Dániel Gimnázium
2011. október 7, 7-8. osztályos csoport - Darabolósdi

A 7-8-os csoportban nekem kedves feladatok közül válogattam úgy, hogy mindegyik megfogalmazásában volt valami darabolás, a háttérben pedig szimmetriák, invariáns tulajdonságok szerepeltek.

Bemelegítés

Két gyors, bemelegítő feladat után – még mindig bemelegítésként - négyrét hajtottam egy A/4-es papírt. Majd kivágtam az élek mentén különböző alakzatokat. A diákok feladata az volt, hogy lerajzolják, hogy milyen mintázatot kapunk, ha szétnyitjuk a papírlapot!

Az alábbi problémák egyszerre hangzottak el. Tetszőleges sorrendben lehetett rajtuk gondolkodni. Aki készen volt a feladattal, az további kérdéseket kapott a feladat megoldásával kapcsolatban. Ezeket ☞-lal jelölöm. A feladatok után azok vázlatos megoldása is szerepel.

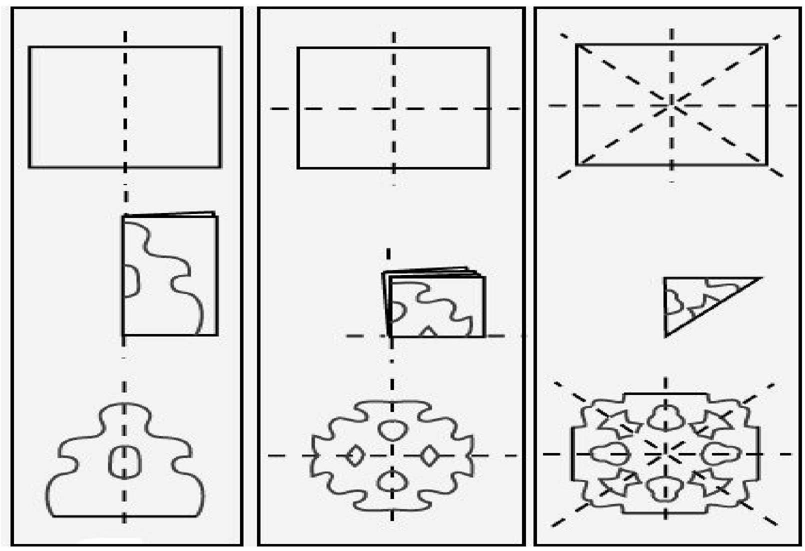
Feladatok gondolkodásra

1. Miután összehajtottad négyrét a papírlapot, úgy vágj ki alakzatokat az élek mentén, hogy a széthajtás után 3 négyzetet, 2 téglalapot (ami nem négyzet), 4 szabályos háromszöget, 4 negyedkört és 2 rombuszt kapjunk (ami nem négyzet).

   ☞ Adj meg olyan alakzatok sorozatát, amiket nem lehet kivágni a fenti módszerrel!

   Mo.: Nem lehet olyan sorozatot kivágni, amiben legalább két páratlan számú alakzat szerepel.

   ☞ Milyen és hány alakzatot kaphatok, ha a négyrét hajtott papírt a lenti ábra szerint még az átló mentén összehajtom?

2. Az előző feladat után egy megmaradt A/4-es lapot kezd el darabolni Marci. Először a lapot négy, nem feltétlenül azonos részre vágja fel. Majd kiválaszt egy papírlap darabot és azt vagy négy, vagy hét részre vágja fel. Utóbbi eljárást folytatja az óra végéig. Mikor kicsöngetnek megszámolja a papírfecniket, és legnagyobb meglepetésére azt tapasztalja, hogy éppen 2011 darabra vágta fel az A/4-es lapot. Matyi -Marci padtársa- titkon egész végig figyelte Marci órai ügyködését. Szerinte Marci rosszul számolt, és valójában 2012 lapocskát sikerült előállítania. Melyikőjüknek lehetett igaza?

Mo.: Ha 4 részre vágunk egy kiválasztott papírdarabot, akkor 3-mal, ha 7 részre vágjuk a kiválasztott papírdarabot, akkor 6-tal növeljük a fecnik számát. Kezdetben egy lapunk volt. Mivel mindkét esetben hárommal osztható számokkal növeljük a részek számát, ezért tetszőleges vágás után is egy maradékot ad a lapok száma hárommal osztva. Ezért 2011 darab elképzelhető, 2012 nem. Matyinak biztosan nem volt igaza.

3. Egy disznóvágáson három nő: Anna, Borcsa és Cili kapott egy nagy darab sonkát. Anna gondosan fel is vágta a sonkát úgy, hogy minden darab értéke szerinte 4 petákot ért. Nem bízott a darabolásban Borcsa, így elvitte a henteséhez, aki megvizsgálta és lemérte a darabokat, és úgy találta, hogy azok rendre 3, 4 és 5 petákot érnek. Cili a fenti két mérés egyikében sem bízva önmaga is lemérte a húsokat, és a fenti elosztásoktól különböző végeredményre jutott. A sonka további darabolását nem megengedve, hogyan osszuk szét a három darab sonkát a három veszekedő nő közt úgy, hogy mindegyikük a saját felosztása szerint legalább 4 petáknyi (1/3 teljes sonka értékű) darabot kapjon, azaz mindegyik nő elégedetten távozzon a felosztást követően?

   Mo.: Először válasszon Cili. Bármit választ, Borcsa tud választani hiszen a 3, 4 és 5 peták értékű sonkák bármelyikét választja Cili, marad egy, ami legalább 4 petákot ér. Ezután bármi marad, az megfelel Annának, hiszen szerinte mindegyik hús azonos értékű volt.

4. Él az Üveghegyen túl egy Csodasárkány. Ennek a Csodasárkánynak 2011 feje van. Pontosan egy fejét levágva az egy fej helyére tíz fej nő vissza. Ha egyszerre pontosan 17 fejét vágjuk le, akkor helyére 14 fej nő vissza. Nem nő vissza egy feje se, ha egyszerre pontosan 21 fejét vágjuk le. Ha 33 fejét vágjuk le egy kardcsapással, akkor 48 fej nő vissza. Sikerülhet-e az összes fejét levágni a sárkánynak? Ha igen, hogyan? Ha nem, akkor miért nem?

   Hány év múlva sikerülhet levágni a fejét a sárkánynak, ha évente egy plusz fejet növeszt?

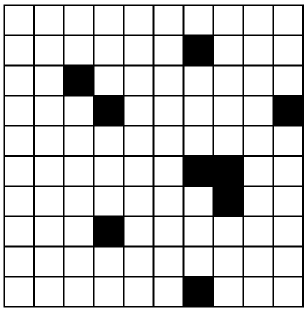
   Mo.: Bármelyik típusú fejlevágás során a sárkány fejeinek száma hárommal osztható számmal változik. Kezdetben hárommal osztva egy maradékot adott a fejek száma. Így bármely fejlevágás után is hárommal osztva egy maradékot ad majd a fejek száma. Mivel a nulla fej hárommal osztható, ezért nincs a fenti fejlevágás típusok közül egy sorozat sem, amivel levágható lenne a sárkány összes feje.
   Mo.: 2 év múlva hárommal osztható (2013) feje lesz a sárkánynak. Így a fejek levágásának szükséges feltétele teljesül. És valóban megoldható a fejek levágása, például úgy, hogy hatszor vágok le 17 fejet. Ekkor visszanő hatszor 14 fej, így összesen 18 fejjel lesz kevesebb feje a sárkánynak, azaz 1995 feje lesz. Ekkor 95-ször vágok le egymás után 21 fejet, amivel az összes fejét sikerül is levágnom.

5. Osszuk fel a természetes számok halmazát két végtelen elemszámú halmazra úgy, hogy bármelyikből hét elemet kivéve és azokat összeadva, az eredmény is ugyanabban a halmazban marad.

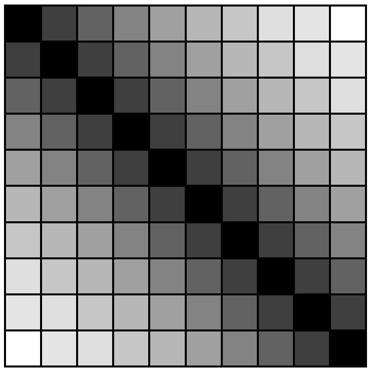
   Bizonyítsd be, hogy nem létezik másfajta felosztás!

   Mo.: Legyen az egyik halmaz elemei a páros, a másiké a páratlan számok.

6. Egy város lakóit egy fertőzés támadta meg. A város alaprajza egy 10x10-es négyzettel ábrázolható, minden 1x1-es négyzetben egy háztömb van. Egy háztömb lakói megfertőződnek, ha legalább két élszomszédos háztömbjük fertőzött. Kezdetben 8 fertőzött háztömb van. Megfertőződhet az egész város?
    - Mi történik 9 fertőzött háztömb esetén?
    - Mikor fertőződhet meg az egész város?
    - Mutass erre egy megfelelő konstrukciót!



Mo.: Se 8, se 9 fertőzött háztömb esetén nem képzelhető el olyan konstrukció, mely során az egész város megfertőződik. Vizsgáljuk a fertőzött háztömbök kerületét. A fertőzés módja miatt újonnan megfertőződött háztömbök nem változtatnak a fertőzött háztömbök kerületén. Azaz 9 fertőzött háztömb esetén végig $4\cdot 9=36$ egység marad, ami kevesebb, mint a $10x10$ -es város 40 egységnyi kerülete. Tehát annak a szükséges feltétele, hogy az egész város megfertőződhessen az, hogy legalább 10 háztömb legyen fertőzött kezdetben. Ez persze nem elégséges feltétel.
Megfelelő konstrukció az, ha a tíz fertőzött területet az átlóba helyezzük el. Ekkor leellenőrizhető, hogy az egész várost megfertőztük.



Bűvész trükkök

7. David Copperfield A kilencvenes évek végén bemutatott egy trükköt a magyar televízióban. Ezt a trükköt csináltam végig a csoport tagjaival – valószínűleg kevéssé teátrálisan, mint azt anno David Copperfield tette. Először is egy 3x3-as négyzet középső négyzetébe helyezte mindenki a bábuját. Mikor szóltam, mindenkinek egy élszomszédos négyzetre kellett lépnie. Ekkor én levettem egy mezőt, így arra már senki nem léphetett. Ezután újra lépni kellett- és én újra lehúztam egy mezőt. Végül mindenki ugyanazon a mezőn állt. És érdekes módon egyszer se húztam le olyan mezőt, amin valaki állt volna. Mi a bűvész trükkje?

Mo.: Színezzük a 3x3-as négyzet négyzeteit sakktáblaszerűen feketére vagy fehérre. A szomszédos négyzetek különböző színűek. Minden lépésben ellentétes színű mezőre lépünk. Függetlenül attól, hogy ki merre lépett, mindenki mindig ugyanolyan színű négyzeten áll. A bűvész is könnyen nyomon követheti, hogy éppen milyen színű négyzeteken állnak a játékosok, így mindig ellentétes színű mezőt húz le, persze figyelve arra, hogy a megmaradó négyzetek összefüggőek legyenek.

8. A következő trükk során mindenki kézbe kapott egy idei naptárat. A napok közül válasszunk ki egy 3x3-as blokkot, és a bennük szereplő számokat adjuk össze. A végeredmény ismeretében kitalálható, hogy mely 3x3-as területre gondolt az illető.

Mo.: Az összeg a középső szám kilencszerese lesz. Ez könnyen igazolható, ha felírjuk a dátumokat a középső számhoz viszonyítva, felhasználva, hogy az egymás fölötti napok egymástól 7 napnyi távolságra vannak.

H	K	Sz	Cs	P	Sz	V
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28						

Felhasznált irodalom:

1. , 4. és 5. feladatot Pósa Lajostól hallottam
2. és 6. feladat Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből (Typotex 2006) Invariáns tulajdonságok fejezetéből valóak
3. feladat Hugo Steinhaus One Hundred Problem in Elementary Mathematics (New York, 1964.) könyvből
7. és 8. feladat a Közös nevezőnk a Matematika (Kőszeg 2003.) című könyvben Pintér Klári Néhány bűvészmutatvány fejezetében találhatóak