# Boole algebra és alkalmazása a gyakorlatban

Fejér Attila

2011. október 1.

## Tartalomjegyzék

# 1. foglalkozás

## 1.1. Bemelegítő feladatok

**Feladat**

Tengerparton pihen Apa, Mama,Fiuk, L1 lányuk, L2 lányuk.

(1) Ha az Apa úszik, akkor a Mama és Fiuk is megy.

(2) Ha a Fiú úszik, akkor nővére, L1 is.

(3) L2 lány pontosan akkor úszik, ha a Mama is.

(4) Minden reggel úszik valamelyik szülő.

(5) Vasárnap reggel csak az egyik lány úszott.

Kik úsztak vasárnap reggel?

**Megoldás**

Egy egyszerű megoldási lehetőség, ha kiindulunk a szülőkből. Tegyük fel, hogy vasárnap reggel az Apa úszott. (1) miatt úszott Mama és a Fiuk is. (2) miatt L1, (3) miatt L2 is úszott, azaz ha Apa úszik, akkor úszik mindenki, de ez ellentmond (5)-nek, vagyis Apa nem úszott. (4) miatt ezért Mama mindenképp úszott, (3) miatt L2 is. Azt tudjuk, hogy apa nem úszott, (5) miatt pedig L1 sem. Kérdés, hogy a Fiú úszott-e? Ha igen, akkor (2) miatt L1 is, ami ellentmond (5)-nek, ha nem úszott, akkor nincs ellentmondás, vagyis csak a Mama és L2 úsztak.

**Feladat**

A 7 törpe házikójában valaki eltört egy tányért. Hófehérkének így számoltak be a történtekről:

Tudor: Nem Szundi volt. Én voltam.

Morgó: Nem én voltam. Nem Hapci volt.

Vidor: Tudor volt. Nem Morgó volt.

Ki törte el a tányért, ha a törpék egyik állítása igaz, a másik hamis?

**Megoldás**

Ha Vidor első állítása igaz, akkor a második hamis, azaz Tudor is, Morgó is tettes, ami nem lehet. Tehát Vidor első állítása hamis, a második igaz. Ezért Morgó első állítása igaz és a második hamis, melyből adódik, hogy Hapci volt a tettes.

**Feladat**

Másnap egy pohár törik el, a következő vallomások hangzanak el:

Kuka: Nem én voltam. Nem Szende és nem is Tudor volt.

Szundi: Én voltam. Tudor vagy Vidor volt.

Szende: Hapci vagy Tudor tette. Szundi második állítása hamis.

Hapci: Nem én voltam. Kuka volt.

Az állítások közül megint az egyik igaz, a másik hamis. Ki volt a tettes? Melyik állítás igaz, melyik hamis?

**Megoldás**

Ha Hapci első állítása hamis, akkor a második igaz, vagyis egyszerre tette ő és Kuka, ami nem lehet, így az első igaz, a második a hamis. Így kuka első állítása igaz, a második pedig hamis, azaz Szende vagy Tudor tette. Ha Szundi első állítása igaz, akkor a második hamis, azaz se nem Tudor, se nem Vidor nem tette, az eddigiekkel összevetve pedig egyszerre lenne Szende és Szundi a tettes, ami megint nem lehet, így Szundi első állítása hamis, a második igaz, vagyis Tudor volt. Ebből Szende első állítása igaz, a második hamis.

**Feladat**

Törpapának van két háromjegyű, kettes számrendszerbeli száma, legyenek ezek $A_3A_2A_1$ és $B_3B_2B_1$. Meg akarja határozni az $S_4S_3S_2S_1 = A_3A_2A_1 + B_3B_2B_1$ összeget, de sehogyan sem boldogul vele, ezért arra kéri Okoskát, segítsen neki meghatározni, az összeg egyes számjegyei mikor lesznek egyesek az összeadandók számjegyeinek függvényében. Például $S_1$ pontosan akkor lesz 1, ha $A_1$ és $B_1$ közül pontosan az egyik 1, a másik 0. Segíts Okoskának!

**Megoldás**

Ld. a Boole algebrai bevezető után.

Na de mi lenne, ha több és/vagy bonyolultabb feltételünk lenne, esetleg még több szereplőnk is? Ezek a módszerek túl intuitívak, elvégre többnyire az egyenleteket sem megérzések alapján oldjuk meg, kell egy általánosabb módszer. Ez nekünk a Boole algebra lesz.

## 1.2. Egy kis elmélet

**Miről szól?**

Logikai kifejezések elemzéséhez, átalakításához ad módszereket.

**Miért Boole?**

George Boole angol matematikus a logikai algebra (tiszteletére Boole algebrának hívjuk) teremtette meg.

**Miért algebra?**

Mert a "hagyományos" algebrához hasonlóan épül fel, ahhoz hasonlóan kezeli a logikai változókat és a kifejezéseket.

**Pontosan mi is a Boole algebra?**

Boole algebra: $\mathcal{B} = \{B, +, \cdot, \}$ azaz Boole-halmaz, logikai VAGY, logikai ÉS, valamint NEGÁCIÓ

Boole-halmaz: $B = \{0, 1, \alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$ a logikai konstansok és ismeretlenek halmaza

Kétfajta érték létezik: 0 és 1 (létezik többértékű algebra is, de azzal nem foglalkozunk).

És végül a válasz a kérdésre: a Boole algebra adja meg a Boole halmazon elvégezhető műveleteket **axiómákkal és definíciókkal**.

## 1.3. Axiómák, definíciók

Kommutativitás:
A1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ A2. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Disztributivitás:
A3. $\alpha + (\beta \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)$ A4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$
Műveletek konstansokkal
A5. $\alpha + 0 = \alpha$ A6. $\alpha \cdot 1 = \alpha$

Az inverz elem ($\overline{\alpha}$) definíciója:

Létezik minden $\alpha$-hoz egyértelműen $\overline{\alpha}$, melyre:

1. $\alpha \cdot \overline{\alpha} = 0$ és

2. $\alpha + \overline{\alpha} = 1$

teljesül.

A fentiekből minden Boole algebrai azonosság ellentmondásmentesen levezethető.

Dualitás elve: A + és · műveletek illetve a 0 és 1 konstansok felcserélésével a Boole algebrai azonosságok igazak maradnak.

Pl.: A3→A4, A5→A6

## 1.4. A Boole algebra fontos tulajdonságai

T1. $\alpha + \alpha = \alpha$ T2. $\alpha \cdot \alpha = \alpha$
T3. $\alpha + 1 = 1$ T4. $\alpha \cdot 0 = 0$
Elnyelés:
T5. $\alpha + \alpha \cdot \beta = \alpha$ T6. $\alpha \cdot (\alpha + \beta) = \alpha$
T7. $\overline{0} = 1$ T8. $\overline{1} = 0$
T9. $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$
Asszociativitás:
T10. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ T11. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
De' Morgan azonosságok:
T12. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$ $\overline{\sum \alpha_i} = \prod \overline{\alpha_i}$
T13. $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ $\overline{\prod \alpha_i} = \sum \overline{\alpha_i}$

## 1.5. Példák

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1. $Y1 = \overline{A} + A \cdot B$

2. $Y2 = \overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C} + (\overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C)$

Megoldások:

1. A4 és a negáció definíciója alapján:
$Y1 = \overline{A} + A \cdot B = (\overline{A} + A) \cdot (\overline{A} + B) = 1 \cdot (\overline{A} + B) = \overline{A} + B$

$X = \overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C}$ helyettesítéssel, elnyelés miatt, majd az előző példa alapján:
$Y2 = X + X \cdot (\overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) = X = \overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C} = \overline{A} + A \cdot (B \cdot \overline{C}) = (\overline{A} + A) \cdot (\overline{A} + B \cdot \overline{C}) = 1 \cdot (\overline{A} + B \cdot \overline{C}) = \overline{A} + B \cdot \overline{C}$

Térjünk vissza a szöveges feladatainkhoz!

**1.**

Amiket tudunk:

| | |
|---|---|
| (1) Ha az Apa úszik, akkor a Mama és Fiuk is megy. | $A \cdot M \cdot F + \overline{A} = 1$ |
| (2) Ha a Fiú úszik, akkor nővére, L1 is. | $L1 + \overline{F} = 1$ |
| (3) L2 lány pontosan akkor úszik, ha a Mama is. | $M \cdot L2 + \overline{M} \cdot \overline{L2} = 1$ |
| (4) Minden reggel úszik valamelyik szülő. | $A + M = 1$ |
| (5) Vasárnap reggel csak az egyik lány úszott. | $L1 \cdot \overline{L2} + \overline{L1} \cdot L2 = 1$ |

Igaz állítások logikai szorzata is igaz. Szorozzuk össze ezeket az állításokat úgy, hogy minél több tag kiessen!

| | | |
|---|---|---|
| (6): | (1)·(4) | $(AMF + \overline{A})(A + M) = AMF + AMF + \overline{A}A + \overline{A}M = AMF + \overline{A}M$ |
| (7): | (6)·(3) | $(AMF + \overline{A}M)(ML2 + \overline{ML2}) = \cdots = AMFL2 + \overline{A}ML2$ |
| (8): | (7)·(5) | $(AMFL2 + \overline{A}ML2)(L1\overline{L2} + \overline{L1}L2) = \cdots = AMFL2\overline{L1} + \overline{A}ML2\overline{L1}$ |
| (9): | (8)···(2) | $(AMFL2\overline{L1} + \overline{A}ML2\overline{L1})(FL1 + \overline{F}) = \cdots = \overline{A}ML2\overline{L1F}$ |

Vagyis Mama és a második lány úsztak.

**2.**

Hasonlóan felírva a törpék állításait (belevéve, hogy pontosan az egyik igaz):

Tudor: Nem Szundi volt. Én voltam. $\overline{SZU} \cdot \overline{T} + SZU \cdot T$

Morgó: Nem én voltam. Nem Hapci volt. $\overline{M} \cdot H + M \cdot \overline{H}$

Vidor: Tudor volt. Nem Morgó volt. $T \cdot M + \overline{T} \cdot \overline{M}$

Tudor és Vidor állításai között szerepel 1-1 olyan tag, amelyek szerint két tettes is van, ezek nyilván nem teljesülhetnek, azaz nem Szundi, nem Tudor és nem is Morgó tette. Ezt Morgó állításaival összevetve kiderül, hogy Hapci volt.

**3.**

Az előzőhöz hasonlóan:

Kuka: Nem én voltam. Nem Szende és nem is Tudor volt. $\overline{K}(SZE + T) + K\overline{SZE}\,\overline{T}$

Szundi: Én voltam. Tudor vagy Vidor volt. $SZU\overline{T}\,\overline{V} + \overline{SZU}(T + V)$

Szende: Hapci vagy Tudor tette. Szundi második állítása hamis. $(H + T)(T + V) + \overline{H}\,\overline{T}\,\overline{V}$

Hapci: Nem én voltam. Kuka volt. $HK + \overline{H}\,\overline{K}$

Bontsunk ki minden zárójelet és tüntessük el azokat a tagokat, amikben két változó is ponáltan szerepel! Így a következőkre jutunk:

(1) $\overline{K}SZE + \overline{K}T + K\overline{SZE}\,\overline{T}$

(2) $\overline{SZU}T + \overline{SZU}V + SZU\overline{T}\,\overline{V}$

(3) $T + \overline{H}\,\overline{T}\,\overline{V}$

(4) $\overline{H}\,\overline{K}$

Ezután a következők szerint járunk el:

| | | |
|---|---|---|
| (5) | (1)·(4) | $(\overline{K}SZE + \overline{K}T + K\overline{SZE}\,\overline{T})(\overline{H}\,\overline{K}) = \cdots = \overline{H}\,\overline{K}SZE + \overline{H}\,\overline{K}T$ |
| (6) | (5)·(2) | $(\overline{H}\,\overline{K}SZE + \overline{H}\,\overline{K}T)(\overline{SZU}T + \overline{SZU}V + SZU\overline{T}\,\overline{V}) = \cdots = \overline{H}\,\overline{K}\,\overline{SZU}T$ |
| (7) | (6)·(3) | $(\overline{H}\,\overline{K}\,\overline{SZU}T)(T + \overline{H}\,\overline{T}\,\overline{V}) = \cdots = \overline{H}\,\overline{K}\,\overline{SZU}T$ |

Vagyis Tudor a bűnös.

**4.**

Az összeadást ugyanúgy kell itt kezelni, ahogy az általános iskolában tanultuk a kézzel való összeadásnál. De ehhez be kell vezetni egy új fogalmat, mégpedig az átvitelt (**carry**): ez a „maradék”, amit hozzá kell adnunk a következő jegyekhez, ha az előző két számjegynál 9-nél (ez esetben 1-nél) nagyobb eredmény jött ki.

Mivel az első jegyeknél még nincs átvitel, ezért

$C_1 = 0$, $\forall i > 0$-ra $C_i + 1 = A_iB_i + A_iC_i + B_iC_i = A_iB_i + (A_i + B_i)C_i$, mert akkor van átvitel, ha legalább 2 egyes volt

$S_i = A_i \oplus B_i \oplus C_i$, ugyanis pontosan akkor lesz az összeg egy jegye 1, ha páratlan darab 1-es volt $A_i$, $B_i$ és $C_i$ között.

A következő táblázat tartalmazza 1-től 4-ig a $C_i$-ket:

| $i$ | $C_i$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | $A_1B_1$ |
| 3 | $A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1$ |
| 4 | $A_3B_3 + (A_3 + B_3)(A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1)$ |

Ennek megfelelően az összeg egyes számjegyei:

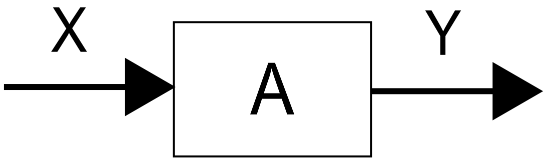
| $i$ | $S_i$ |
|---|---|
| 1 | $A_1 \oplus B_1$ |
| 2 | $A_2 \oplus B_2 \oplus A_1B_1$ |
| 3 | $A_3 \oplus B_3 \oplus (A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1)$ |
| 4 | $A_3B_3 + (A_3 + B_3)(A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1)$ |

# 2. foglalkozás

Eddig csak és kizárólag a matematikai háttérrel foglalkoztunk, most elmozdululnk egy kicsit gyakorlatiasabb irányba, az elmélet gyakorlati felhasználása felé.

## 2.1. Digitális automata

Leggyakrabban a digitálisan működő eszközök tervezéséhez használjuk a Boole algebrát. A digitális automata vázlatrajza:




**X**: $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ bemeneti logikai változók

**Y**: $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ kimeneti logikai változók

X*, Y*: bemeneti (kimeneti) sorozat, a bemeneti (kimeneti) változók időben egymást követő értékei.

A digitális automata az X*→Y* leképezést állítja elő.

### 2.1.1. Sorrendi automata

$Y^t = g(X^t, Q^t)$, azaz a $t$ időpillanatban a kimenet értéke függ az aktuális bemenettől és a belső állapottól.

$Q^{t+1} = f(X^t, Q^t)$, vagyis a következő belső állapot függ az aktuális bemenettől és belső állapottól.

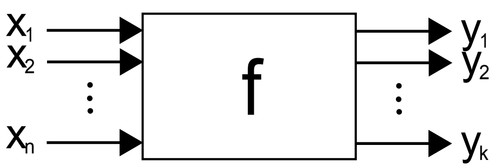
A kimenet a bemenetet ért változások sorrendjétől is függ.

Ezzel az automata fajtával nem foglalkozunk.

### 2.1.2. Kombinációs automata

$Y^t = g(X^t)$, azaz a $t$ időpillanatban a kimenet értéke csak az aktuális bemenettől függ. A továbbiakban a kombinációs automatákat **logikai függvényeknek** fogjuk hívni.

Az általános, $n$ bementű, $k$ kimenetű logikai függvény:



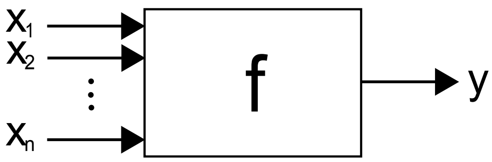
$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\vdots$

$y_k = f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Ez tulajdonképpen megegyezik $k$ db $n$ bemenetű, egy kimenetű logikai fügvénnyel:




Ezen okból a továbbiakban csak az egy kimenetű függvényekkel foglalkozunk.

## 2.2. Logikai függvények

A logikai függvények megadhatók:

- táblázatos formában, azaz **igazságtáblával**
- **általános Boole algebrai kifejezésként** – erről már volt szó
- **normál (kanonikus) alakok formájában** (diszjunktív, konjunktív normál alak, ez részhalmaza az előzőnek)
- **kapcsolási rajzzal**

### 2.2.1. Igazságtábla

Egy egyszerű táblázat, ahol minden bemenethez megadjuk a kimenetet.

Például a logikai VAGY igazságtáblája:

| $A$ | $B$ | $A+B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**Feladat**

Számoljuk ki, hogy hány különböző egy kimenetű, $n$ változós logikai függvény létezik! Mi a helyzet $k$ kimenet esetén?

**Megoldás**

$n$ változó esetén az igazságtáblának $2^n$ sora van, mindegyik sorba 2 féle érték kerülhet, így a $2^n$ sort összesen $2^{2^n}$ különböző módon lehet kitölteni. Mindegyik sor pontosan egy logikai függvénynek felel meg, és minden logikai függvényt biztosan felsoroltunk, így ez a megoldás.

**Feladat**

Mi a helyzet $k$ kimenet esetén?

**Megoldás**

Emlékezzünk vissza, a többkimenetű függvényeinket több egykimenetű függvénnyel modelleztük. Egy kimenet $2^{2^n}$ féle lehet, $k$ kimenetűből ezek szerint $(2^{2^n})^k = 2^{k \cdot 2^n}$ különböző létezik.

## 2.3. A kétváltozós logikai függvények

**Feladat** Írjuk fel egy igazságtáblába az összes kétváltozós, egykimenetű függvényt! Az előzőek alapján ebből $2^{2^n} = 16$ lesz.

**Megoldás**

| $A$ | $B$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ | $f_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

**Feladat**

Határozzuk meg ezek közül azokat, amiket már ismerünk!

**Megoldás**

| $A$ | $B$ | 0 | $A \cdot B$ | $f_3$ | $A$ | $f_5$ | $B$ | $A \oplus B$ | $A + B$ | $\overline{A + B}$ | $A \odot B$ | $\overline{B}$ | $f_{12}$ | $\overline{A}$ | $f_{14}$ | $\overline{A \cdot B}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Név | | | AND | | | | | EXOR | OR | NOR | EKV | INV | | INV | | NAND | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

**Feladat**

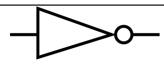
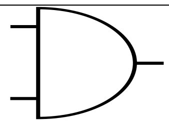
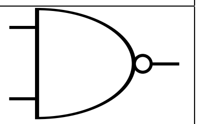
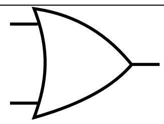
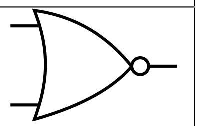
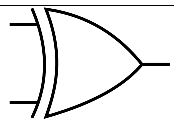
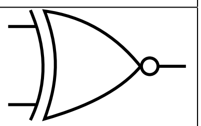
Azt láttuk, hogy az INVERTÁLÁS, az ÉS illetve a VAGY műveletek segítségével tetszőleges logikai függvényt ki tudunk fejezni, de vajon létezik-e olyan kétváltozós függvény, ami képes **egyedül** ugyanerre? Ha igen, adjuk is meg az összeset. Segítség: elég a fenti három műveletet kifejezni. Fejezzük is ki!

**Megoldás**

A NAND és a NOR tudja ezeket.

## 2.4. Kapcsolási rajz

A gyakran használt áramköri elemeket az általuk megvalósított függvény nevével a következő táblázat tartalmazza:

| Függvény | Rajzjel |
|---|---|
| INVERTER |  |
| AND |  |
| NAND |  |
| OR |  |
| NOR |  |
| EXOR |  |
| EKVIVALENCIA |  |

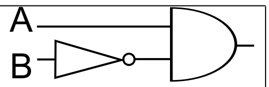
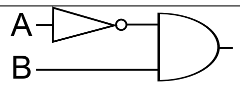
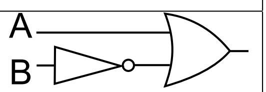
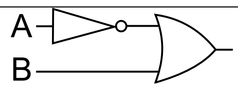
Egy logika függvény kapcsolási rajzát legegyszerűbben a Boole algebrai kifejezéséből tudunk felépíteni, annak hierarchiáját követve. Az alapszabály az, hogy a fenti kapuk kétbemenetű függvényekként működnek, vagyis a kimenetükön a bemenetek „leképezettje" jelenik meg.

**Példa**

Vegyük a kétváltozós függvényeink közül a „névteleneket", $f_3$-at, $f_5$-öt, $f_{12} - t$ és $f_{14}$-et! Ezek egy lehetséges algebrai alakja:

$f_3 = A\overline{B}$, $f_5 = \overline{A}B$, $f_{12} = A + \overline{B}$ és $f_{14} = \overline{A} + B$

Ebből pofonegyszerűen képezhetők a kapcsolási rajzok, melyek a következők lesznek:

| | |
|---|---|
| $f_3$ |  |
| $f_5$ |  |
| $f_{12}$ |  |
| $f_{14}$ |  |

## 2.5. További függvénymegadási módok

### 2.5.1. Diszjunktív normál alak

A diszjunktív normál alak nagyon egyszerűen kiolvasható az igazságtáblából.

**Felépítése**

Minden egyes tagban az összes bemeneti változó szerepel pontosan egyszer ponálva vagy negálva, ezek pedig logikai ÉS kapcsolatban vannak egymással, az egyes tagokat logikai VAGY kapcsolatba kell hozni.

A kiolvasása a következő módon történik: kiválasztjuk az igazságtábla minden egyes olyan sorát, amiben 1-es szerepel, ezeknek a soroknak fog megfelelni egy-egy tag. Ezután egy sorból úgy képezünk egy tagot, hogy az a változó, aminek az értéke 1 ponálva, aminek 0 pedig negálva jelenik meg. A módszerből következik, hogy minden függvénynek pontosan egy DNA-ja van.

Ezeket az 1-eseket reprezentáló tagokat **mintermeknek** hívjuk. Ha nem szerepel egy tagban minden változó, de mégis pontosan írja le az igazságtábla egy „területét”, akkor egyszerűen csak **termről** beszélünk, ez még fontos lesz később.

**Példa**

Az igazságtáblánkból $f_{12}$ DNA-ja a következőképp néz ki:

$\overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + AB$

### 2.5.2. Konjunktív normál alak

A KNA nagyon hasonló a DNA-hoz, ezért csak a különbségeket mondom el. A KNA esetén a tagokon belül VAGY, a tagok között pedig ÉS kapcsolat van.

Igazságtáblából a 0-t tartalmazó sorokat kell kiválasztani, a változók ponálását és negálását fordítva kell elvégezni, azaz 0 esetén ponálunk és 1 esetén negálunk, a tagok neve pedig **maxterm** lesz.

**Példa**

$f_5$ KNA-ja:

$(A + B) \cdot (\overline{A} + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$

Vagyük észre, hogy $f_5 = \overline{f_{12}}$! Ha $f_5$ KNA-ját invertáljuk és alkalmazzuk a De' Morgan azonosságokat, akkor pontosan $f_{12}$ DNA-ját kapjuk!

Azt is megfigyelhetjük, hogy ha $f_5$ KNA-jánál kibontjuk a zárójeleket és leegyszerűsítjük a kifejezést, akkor a DNA-ját kapjuk meg.

**Feladat**

Írjuk fel a következő négyváltozós függvények normál alakjait!

| $A$ | $B$ | $C$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**Megoldás**

$$g_1 = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$g_2 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC = (A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

Vegyük észre, hogy $g_3$ pontosan $g_1$ negáltja, vagyis nem kell más tennünk, mint a tanultak alapján alkalmazni a De' Morgan azonosságokat, így automatikusan megkapjuk a kért alakokat:

$$g_3 = (A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

## 2.6. Karnaugh tábla

A Karnaugh tábla egy speciális igazságtábla, ami megkönnyíti, meggyorsítja a függvények **képletének** kiolvasását és optimalizálását. A lényege, hogy egyrészt kihasználjuk mindkét dimenziót a tábla kiterjedéséhez, másrészt úgy változnak az egyes változók értékei a sorok illetve oszlopok mentén, hogy könnyű, egyértelmű legyen a termek kiolvasása.

Egy 3 változós Karnaugh tábla a következő képpen néz ki:

| A\BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |

A kiolvasás a következő módon történik: keresünk minél nagyobb olyan „egybefüggő” „cellatömböket”, amikben egyes van, a következő kitételekkel:

- a „tömbök” minden oldalhossza kettőhatvány
- a változóknak létezik olyan részhalmaza, aminek az értéke a tömb minden elemére állandó
- ezen változók megfelelő értékekhez a „tömbön” kívül nem tartozik más cella.

Az ilyen „tömbök” neve term lesz.

Megjegyzés: az átláthatóság kedvéért sokszor csak az 1-eseket jelöljük, az üresen hagyott mezők nullának értendők.

**Példa**

A következő Karnaugh táblában 2 term található,

| A\BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | | |

ezek pedig: $\overline{B}$ és $\overline{AC}$.

**Feladat**

Rajzoljuk fel az előző feladatban szereplő $g_1$, $g_2$ és $g_3$ Karnaugh tábláját, és írjuk fel az azokban szereplő termeket!

**Megoldás**

Mivel megállapítottuk, hogy $g_3 = \overline{g_1}$, ezért elég $g_1$-et felrajzolni:

| A\BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | |

A termek: $A\overline{B}$, $AC$ és $\overline{A}B\overline{C}$.

Aki szemfüles két dolgot vehet észre. Az első, hogy ha $A$-t megnegálom, akkor pontosan $\overline{g_1}$-et, azaz $g_3$-at kapom, vagyis elég a termekben $A$ és $\overline{A}$ szerepét felcserélni, hogy megkapjuk a helyes termeket.

A másik, hogy a jobb oldalon van egy sakttábla szerű mintázat. Ezt sokkal takarékosabban le lehet fedni EKVIVALENCIA vagy EXOR műveletekkel, mégpedig ez esetben a következő képlettel: $B(A \odot C)$. Így a minimális formula: $\overline{AB} + B(A \odot C)$.

$g_2$ táblája:

| A\BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | 1 |
| 1 | 1 | | 1 | |

Az előzőhöz hasonlóan 3 termünk van: $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ és $ABC$, de a jobb oldali sakktáblát megint egyszerűbben le lehet írni. A legegyszerűbb alak: $\overline{BC} + B(A \odot C)$