Boole algebra és alkalmazása a gyakorlatban

Fejér Attila

2011. október 1.

Tartalomjegyzék

1. foglalkozás

1.1. Bemelegítő feladatok

Feladat

Tengerparton pihen Apa, Mama,Fiuk, L1 lányuk, L2 lányuk.

(1) Ha az Apa úszik, akkor a Mama és Fiuk is megy.

(2) Ha a Fiú úszik, akkor nővére, L1 is.

(3) L2 lány pontosan akkor úszik, ha a Mama is.

(4) Minden reggel úszik valamelyik szülő.

(5) Vasárnap reggel csak az egyik lány úszott.

Kik úsztak vasárnap reggel?

Megoldás

Egy egyszerű megoldási lehetőség, ha kiindulunk a szülőkből. Tegyük fel, hogy vasárnap reggel az Apa úszott. (1) miatt úszott Mama és a Fiuk is. (2) miatt L1, (3) miatt L2 is úszott, azaz ha Apa úszik, akkor úszik mindenki, de ez ellentmond (5)-nek, vagyis Apa nem úszott. (4) miatt ezért Mama mindenképp úszott, (3) miatt L2 is. Azt tudjuk, hogy apa nem úszott, (5) miatt pedig L1 sem. Kérdés, hogy a Fiú úszott-e? Ha igen, akkor (2) miatt L1 is, ami ellentmond (5)-nek, ha nem úszott, akkor nincs ellentmondás, vagyis csak a Mama és L2 úsztak.

Feladat

A 7 törpe házikójában valaki eltört egy tányért. Hófehérkének így számoltak be a történtekről:

Tudor: Nem Szundi volt. Én voltam.

Morgó: Nem én voltam. Nem Hapci volt.

Vidor: Tudor volt. Nem Morgó volt.

Ki törte el a tányért, ha a törpék egyik állítása igaz, a másik hamis?

Megoldás

Ha Vidor első állítása igaz, akkor a második hamis, azaz Tudor is, Morgó is tettes, ami nem lehet. Tehát Vidor első állítása hamis, a második igaz. Ezért Morgó első állítása igaz és a második hamis, melyből adódik, hogy Hapci volt a tettes.

Feladat

Másnap egy pohár törik el, a következő vallomások hangzanak el:

Kuka: Nem én voltam. Nem Szende és nem is Tudor volt.

Szundi: Én voltam. Tudor vagy Vidor volt.

Szende: Hapci vagy Tudor tette. Szundi második állítása hamis.

Hapci: Nem én voltam. Kuka volt.

Az állítások közül megint az egyik igaz, a másik hamis. Ki volt a tettes? Melyik állítás igaz, melyik hamis?

Megoldás

Ha Hapci első állítása hamis, akkor a második igaz, vagyis egyszerre tette ő és Kuka, ami nem lehet, így az első igaz, a második a hamis. Így kuka első állítása igaz, a második pedig hamis, azaz Szende vagy Tudor tette. Ha Szundi első állítása igaz, akkor a második hamis, azaz se nem Tudor, se nem Vidor nem tette, az eddigiekkel összevetve pedig egyszerre lenne Szende és Szundi a tettes, ami megint nem lehet, így Szundi első állítása hamis, a második igaz, vagyis Tudor volt. Ebből Szende első állítása igaz, a második hamis.

Feladat

Törpapának van két háromjegyű, kettes számrendszerbeli száma, legyenek ezek $A_3A_2A_1$ és $B_3B_2B_1$. Meg akarja határozni az $S_4S_3S_2S_1 = A_3A_2A_1+B_3B_2B_1$ összeget, de sehogyan sem boldogul vele, ezért arra kéri Okoskát, segítsen neki meghatározni, az összeg egyes számjegyei mikor lesznek egyesek az összeadandók számjegyeinek függvényében. Például S_1 pontosan akkor lesz 1, ha A_1 és B_1 közül pontosan az egyik 1, a másik 0. Segíts Okoskának!

Megoldás

Ld. a Boole algebrai bevezető után.

Na de mi lenne, ha több és/vagy bonyolultabb feltételünk lenne, esetleg még több szereplőnk is? Ezek a módszerek túl intuitívak, elvégre többnyire az egyenleteket sem megérzések alapján oldjuk meg, kell egy általánosabb módszer. Ez nekünk a Boole algebra lesz.

1.2. Egy kis elmélet

Miről szól?

Logikai kifejezések elemzéséhez, átalakításához ad módszereket.

Miért Boole?

George Boole angol matematikus a logikai algebra (tiszteletére Boole algebrának hívjuk) teremtette meg.

Miért algebra?

Mert a "hagyományos" algebrához hasonlóan épül fel, ahhoz hasonlóan kezeli a logikai változókat és a kifejezéseket.

Pontosan mi is a Boole algebra?

Boole algebra: $\mathcal{B} = \{B, +, \cdot, \}$ azaz Boole-halmaz, logikai VAGY, logikai ÉS, valamint NEGÁCIÓ

Boole-halmaz: $B = \{0, 1, \alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$ a logikai konstansok és ismeretlenek halmaza

Kétfajta érték létezik: 0 és 1 (létezik többértékű algebra is, de azzal nem foglalkozunk).

És végül a válasz a kérdésre: a Boole algebra adja meg a Boole halmazon elvégezhető műveleteket **axiómákkal és definíciókkal**.

1.3. Axiómák, definíciók

Kommutativitás:

A1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ A2. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

Disztributivitás:

A3. $\alpha + (\beta \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)$ A4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$

Műveletek konstansokkal

A5. $\alpha + 0 = \alpha$ A6. $\alpha \cdot 1 = \alpha$

Az inverz elem ($\overline{\alpha}$) definíciója:

Létezik minden α-hoz egyértelműen $\overline{\alpha}$, melyre:

1. $\alpha \cdot \overline{\alpha} = 0$ és

2. $\alpha + \overline{\alpha} = 1$

teljesül.

A fentiekből minden Boole algebrai azonosság ellentmondásmentesen levezethető.

Dualitás elve: A + és · műveletek illetve a 0 és 1 konstansok felcserélésével a Boole algebrai azonosságok igazak maradnak.

Pl.: A3→A4, A5→A6

1.4. A Boole algebra fontos tulajdonságai

T1. $\alpha + \alpha = \alpha$	T2. $\alpha \cdot \alpha = \alpha$
T3. $\alpha + 1 = 1$	T4. $\alpha \cdot 0 = 0$
Elnyelés:	
T5. $\alpha + \alpha \cdot \beta = \alpha$	T6. $\alpha \cdot (\alpha + \beta) = \alpha$
T7. $\overline{0} = 1$	T8. $\overline{1} = 0$
T9. $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$	
Asszociativitás:	
T10. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	T11. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
De' Morgan azonosságok:	
T12. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$	$\overline{\sum \alpha_i} = \prod \overline{\alpha_i}$
T13. $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$	$\overline{\prod \alpha_i} = \sum \overline{\alpha_i}$

1.5. Példák

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1. $Y1 = \overline{A} + A \cdot B$

2. $Y2 = \overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C} + (\overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C)$

Megoldások:

1. A4 és a negáció definíciója alapján:

$Y1 = \overline{A} + A \cdot B = (\overline{A} + A) \cdot (\overline{A} + B) = 1 \cdot (\overline{A} + B) = \overline{A} + B$

$X = \overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C}$ helyettesítéssel, elnyelés miatt, majd az előző példa alapján:

$Y2 = X + X \cdot (\overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) = X = \overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C} = \overline{A} + A \cdot (B \cdot \overline{C}) = (\overline{A} + A) \cdot (\overline{A} + B \cdot \overline{C}) = 1 \cdot (\overline{A} + B \cdot \overline{C}) = \overline{A} + B \cdot \overline{C}$

Térjünk vissza a szöveges feladatainkhoz!

1.

Amiket tudunk:

(1) Ha az Apa úszik, akkor a Mama és Fiuk is megy.	$A \cdot M \cdot F + \overline{A}$	$=$	1
(2) Ha a Fiú úszik, akkor nővére, L1 is.	$L1 + \overline{F}$	$=$	1
(3) L2 lány pontosan akkor úszik, ha a Mama is.	$M \cdot L2 + \overline{M} \cdot \overline{L2}$	$=$	1
(4) Minden reggel úszik valamelyik szülő.	$A + M$	$=$	1
(5) Vasárnap reggel csak az egyik lány úszott.	$L1 \cdot \overline{L2} + \overline{L1} \cdot L2$	$=$	1

Igaz állítások logikai szorzata is igaz. Szorozzuk össze ezeket az állításokat úgy, hogy minél több tag kiessen!

(6):	(1)·(4)	$(AMF + \overline{A})(A + M) = AMF + AMF + \overline{A}A + \overline{A}M = AMF + \overline{A}M$
(7):	(6)·(3)	$(AMF + \overline{A}M)(ML2 + \overline{ML2}) = \cdots = AMFL2 + \overline{A}ML2$
(8):	(7)·(5)	$(AMFL2 + \overline{A}ML2)(L1\overline{L2} + \overline{L1}L2) = \cdots = AMFL2\overline{L1} + \overline{A}ML2\overline{L1}$
(9):	(8)$\cdots$(2)	$(AMFL2\overline{L1} + \overline{A}ML2\overline{L1})(FL1 + \overline{F}) = \cdots = \overline{A}ML2\overline{L1F}$

Vagyis Mama és a második lány úsztak.

2.

Hasonlóan felírva a törpék állításait (belevéve, hogy pontosan az egyik igaz):

Tudor: Nem Szundi volt. Én voltam. $\overline{SZU} \cdot \overline{T} + SZU \cdot T$

Morgó: Nem én voltam. Nem Hapci volt. $\overline{M} \cdot H + M \cdot \overline{H}$

Vidor: Tudor volt. Nem Morgó volt. $T \cdot M + \overline{T} \cdot \overline{M}$

Tudor és Vidor állításai között szerepel 1-1 olyan tag, amelyek szerint két tettes is van, ezek nyilván nem teljesülhetnek, azaz nem Szundi, nem Tudor és nem is Morgó tette. Ezt Morgó állításaival összevetve kiderül, hogy Hapci volt.

3.

Az előzőhöz hasonlóan:

Kuka: Nem én voltam. Nem Szende és nem is Tudor volt. $\overline{K}(SZE + T) + K\overline{SZET}$

Szundi: Én voltam. Tudor vagy Vidor volt. $SZU\overline{TV} + \overline{SZU}(T + V)$

Szende: Hapci vagy Tudor tette. Szundi második állítása hamis. $(H + T)(T + V) + \overline{HTV}$

Hapci: Nem én voltam. Kuka volt. $HK + \overline{HK}$

Bontsunk ki minden zárójelet és tüntessük el azokat a tagokat, amikben két változó is ponáltan szerepel! Így a következőkre jutunk:

(1) $\overline{K}SZE + \overline{K}T + K\overline{SZET}$

(2) $\overline{SZU}T + \overline{SZU}V + SZU\overline{TV}$

(3) $T + \overline{HTV}$

(4) $\overline{HK}$

Ezután a következők szerint járunk el:

(5) (1)·(4) $(\overline{K}SZE + \overline{K}T + K\overline{SZET})(\overline{HK}) = \cdots = \overline{HK}SZE + \overline{HK}T$
(6) (5)·(2) $(\overline{HK}SZE + \overline{HK}T)(\overline{SZU}T + \overline{SZU}V + SZU\overline{TV}) = \cdots = \overline{HKSZU}T$
(7) (6)·(3) $(\overline{HKSZU}T)(T + \overline{HTV}) = \cdots = \overline{HKSZU}T$

Vagyis Tudor a bűnös.

4.

Az összeadást ugyanúgy kell itt kezelni, ahogy az általános iskolában tanultuk a kézzel való összeadásnál. De ehhez be kell vezetni egy új fogalmat, mégpedig az átvitelt (**carry**): ez a „maradék”, amit hozzá kell adnunk a következő jegyekhez, ha az előző két számjegynál 9-nél (ez esetben 1-nél) nagyobb eredmény jött ki.

Mivel az első jegyeknél még nincs átvitel, ezért

$C_1 = 0$, $\forall i > 0$-ra $C_i + 1 = A_iB_i + A_iC_i + B_iC_i = A_iB_i + (A_i + B_i)C_i$, mert akkor van átvitel, ha legalább 2 egyes volt

$S_i = A_i \oplus B_i \oplus C_i$, ugyanis pontosan akkor lesz az összeg egy jegye 1, ha páratlan darab 1-es volt A_i, B_i és C_i között.

A következő táblázat tartalmazza 1-től 4-ig a C_i-ket:

i	C_i
1	0
2	A_1B_1
3	$A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1$
4	$A_3B_3 + (A_3 + B_3)(A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1)$

Ennek megfelelően az összeg egyes számjegyei:

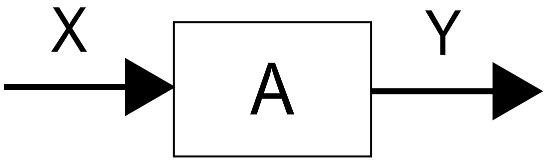
i	S_i
1	$A_1 \oplus B_1$
2	$A_2 \oplus B_2 \oplus A_1B_1$
3	$A_3 \oplus B_3 \oplus (A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1)$
4	$A_3B_3 + (A_3 + B_3)(A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1)$

2. foglalkozás

Eddig csak és kizárólag a matematikai háttérrel foglalkoztunk, most elmozdululnk egy kicsit gyakorlatiasabb irányba, az elmélet gyakorlati felhasználása felé.

2.1. Digitális automata

Leggyakrabban a digitálisan működő eszközök tervezéséhez használjuk a Boole algebrát. A digitális automata vázlatrajza:



X: $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ bemeneti logikai változók

Y: $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ kimeneti logikai változók

X*, Y*: bemeneti (kimeneti) sorozat, a bemeneti (kimeneti) változók időben egymást követő értékei.

A digitális automata az X*→Y* leképezést állítja elő.

2.1.1. Sorrendi automata

$Y^t = g(X^t, Q^t)$, azaz a t időpillanatban a kimenet értéke függ az aktuális bemenettől és a belső állapottól.

$Q^{t+1} = f(X^t, Q^t)$, vagyis a következő belső állapot függ az aktuális bemenettől és belső állapottól.

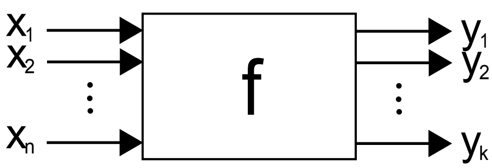
A kimenet a bemenetet ért változások sorrendjétől is függ.

Ezzel az automata fajtával nem foglalkozunk.

2.1.2. Kombinációs automata

$Y^t = g(X^t)$, azaz a t időpillanatban a kimenet értéke csak az aktuális bemenettől függ. A továbbiakban a kombinációs automatákat **logikai függvényeknek** fogjuk hívni.

Az általános, n bementű, k kimenetű logikai függvény:



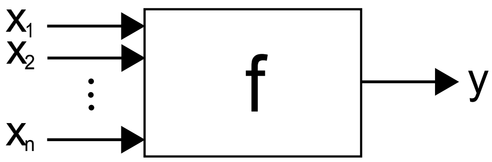
$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\vdots$

$y_k = f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Ez tulajdonképpen megegyezik k db n bemenetű, egy kimenetű logikai fügvénnyel:



Ezen okból a továbbiakban csak az egy kimenetű függvényekkel foglalkozunk.

2.2. Logikai függvények

A logikai függvények megadhatók:

- táblázatos formában, azaz **igazságtáblával**
- **általános Boole algebrai kifejezésként** – erről már volt szó
- **normál (kanonikus) alakok formájában** (diszjunktív, konjunktív normál alak, ez részhalmaza az előzőnek)
- **kapcsolási rajzzal**

2.2.1. Igazságtábla

Egy egyszerű táblázat, ahol minden bemenethez megadjuk a kimenetet.

Például a logikai VAGY igazságtáblája:

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Feladat

Számoljuk ki, hogy hány különböző egy kimenetű, n változós logikai függvény létezik! Mi a helyzet k kimenet esetén?

Megoldás

n változó esetén az igazságtáblának 2^n sora van, mindegyik sorba 2 féle érték kerülhet, így a 2^n sort összesen 2^{2^n} különböző módon lehet kitölteni. Mindegyik sor pontosan egy logikai függvénynek felel meg, és minden logikai függvényt biztosan felsoroltunk, így ez a megoldás.

Feladat

Mi a helyzet k kimenet esetén?

Megoldás

Emlékezzünk vissza, a többkimenetű függvényeinket több egykimenetű függvénnyel modelleztük. Egy kimenet 2^{2^n} féle lehet, k kimenetűből ezek szerint $(2^{2^n})^k = 2^{k \cdot 2^n}$ különböző létezik.

2.3. A kétváltozós logikai függvények

Feladat Írjuk fel egy igazságtáblába az összes kétváltozós, egykimenetű függvényt! Az előzőek alapján ebből $2^{2^n} = 16$ lesz.

Megoldás

A	B	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Feladat

Határozzuk meg ezek közül azokat, amiket már ismerünk!

Megoldás

A	B	0	$A \cdot B$	f_3	A	f_5	B	$A \oplus B$	$A + B$	$\overline{A + B}$	$A \odot B$	$\overline{B}$	f_{12}	$\overline{A}$	f_{14}	$\overline{A \cdot B}$	1
Név			AND					EXOR	OR	NOR	EKV	INV		INV		NAND	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Feladat

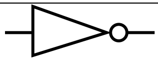
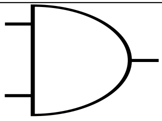
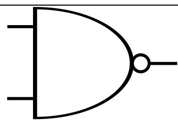
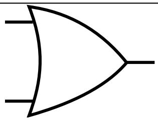
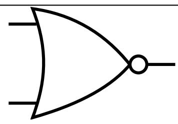
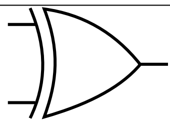
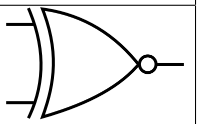
Azt láttuk, hogy az INVERTÁLÁS, az ÉS illetve a VAGY műveletek segítségével tetszőleges logikai függvényt ki tudunk fejezni, de vajon létezik-e olyan kétváltozós függvény, ami képes **egyedül** ugyanerre? Ha igen, adjuk is meg az összeset. Segítség: elég a fenti három műveletet kifejezni. Fejezzük is ki!

Megoldás

A NAND és a NOR tudja ezeket.

2.4. Kapcsolási rajz

A gyakran használt áramköri elemeket az általuk megvalósított függvény nevével a következő táblázat tartalmazza:

Függvény	Rajzjel
INVERTER	
AND	
NAND	
OR	
NOR	
EXOR	
EKVIVALENCIA	

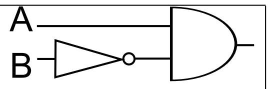
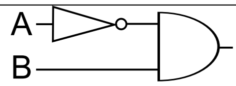
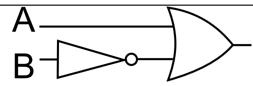
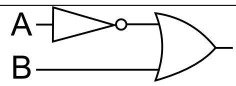
Egy logika függvény kapcsolási rajzát legegyszerűbben a Boole algebrai kifejezéséből tudunk felépíteni, annak hierarchiáját követve. Az alapszabály az, hogy a fenti kapuk kétbemenetű függvényekként működnek, vagyis a kimenetükön a bemenetek „leképezettje" jelenik meg.

Példa

Vegyük a kétváltozós függvényeink közül a „névteleneket", f_3-at, f_5-öt, $f_{12} - t$ és f_{14}-et! Ezek egy lehetséges algebrai alakja:

$f_3 = A\overline{B}$, $f_5 = \overline{A}B$, $f_{12} = A + \overline{B}$ és $f_{14} = \overline{A} + B$

Ebből pofonegyszerűen képezhetők a kapcsolási rajzok, melyek a következők lesznek:

f_3	
f_5	
f_{12}	
f_{14}	

2.5. További függvénymegadási módok

2.5.1. Diszjunktív normál alak

A diszjunktív normál alak nagyon egyszerűen kiolvasható az igazságtáblából.

Felépítése

Minden egyes tagban az összes bemeneti változó szerepel pontosan egyszer ponálva vagy negálva, ezek pedig logikai ÉS kapcsolatban vannak egymással, az egyes tagokat logikai VAGY kapcsolatba kell hozni.

A kiolvasása a következő módon történik: kiválasztjuk az igazságtábla minden egyes olyan sorát, amiben 1-es szerepel, ezeknek a soroknak fog megfelelni egy-egy tag. Ezután egy sorból úgy képezünk egy tagot, hogy az a változó, aminek az értéke 1 ponálva, aminek 0 pedig negálva jelenik meg. A módszerből következik, hogy minden függvénynek pontosan egy DNA-ja van.

Ezeket az 1-eseket reprezentáló tagokat **mintermeknek** hívjuk. Ha nem szerepel egy tagban minden változó, de mégis pontosan írja le az igazságtábla egy „területét”, akkor egyszerűen csak **termről** beszélünk, ez még fontos lesz később.

Példa

Az igazságtáblánkból f_{12} DNA-ja a következőképp néz ki:

$\overline{AB} + A\overline{B} + AB$

2.5.2. Konjunktív normál alak

A KNA nagyon hasonló a DNA-hoz, ezért csak a különbségeket mondom el. A KNA esetén a tagokon belül VAGY, a tagok között pedig ÉS kapcsolat van.

Igazságtáblából a 0-t tartalmazó sorokat kell kiválasztani, a változók ponálását és negálását fordítva kell elvégezni, azaz 0 esetén ponálunk és 1 esetén negálunk, a tagok neve pedig **maxterm** lesz.

Példa

f_5 KNA-ja:

$(A + B) \cdot (\overline{A} + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$

Vagyük észre, hogy $f_5 = \overline{f_{12}}$! Ha f_5 KNA-ját invertáljuk és alkalmazzuk a De’ Morgan azonosságokat, akkor pontosan f_{12} DNA-ját kapjuk!

Azt is megfigyelhetjük, hogy ha f_5 KNA-jánál kibontjuk a zárójeleket és leegyszerűsítjük a kifejezést, akkor a DNA-ját kapjuk meg.

Feladat

Írjuk fel a következő négyváltozós függvények normál alakjait!

A	B	C	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

Megoldás

$g_1 = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{BC} + A\overline{B}C + ABC = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$

$g_2 = \overline{ABC} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{BC} + ABC = (A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$

Vegyük észre, hogy g_3 pontosan g_1 negáltja, vagyis nem kell más tennünk, mint a tanultak alapján alkalmazni a De' Morgan azonosságokat, így automatikusan megkapjuk a kért alakokat:

$g_3 = (A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) = \overline{ABC} + \overline{AB}C + \overline{A}BC + AB\overline{C}$

2.6. Karnaugh tábla

A Karnaugh tábla egy speciális igazságtábla, ami megkönnyíti, meggyorsítja a függvények **képletének** kiolvasását és optimalizálását. A lényege, hogy egyrészt kihasználjuk mindkét dimenziót a tábla kiterjedéséhez, másrészt úgy változnak az egyes változók értékei a sorok illetve oszlopok mentén, hogy könnyű, egyértelmű legyen a termek kiolvasása.

Egy 3 változós Karnaugh tábla a következő képpen néz ki:

A\BC	00	01	11	10
0				
1				

A kiolvasás a következő módon történik: keresünk minél nagyobb olyan „egybefüggő” „cellatömböket”, amikben egyes van, a következő kitételekkel:

- a „tömbök” minden oldalhossza kettőhatvány
- a változóknak létezik olyan részhalmaza, aminek az értéke a tömb minden elemére állandó
- ezen változók megfelelő értékekhez a „tömbön” kívül nem tartozik más cella.

Az ilyen „tömbök” neve term lesz.

Megjegyzés: az átláthatóság kedvéért sokszor csak az 1-eseket jelöljük, az üresen hagyott mezők nullának értendők.

Példa

A következő Karnaugh táblában 2 term található,

A\BC	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1	1		

ezek pedig: $\overline{B}$ és $\overline{AC}$.

Feladat

Rajzoljuk fel az előző feladatban szereplő g_1, g_2 és g_3 Karnaugh tábláját, és írjuk fel az azokban szereplő termeket!

Megoldás

Mivel megállapítottuk, hogy $g_3 = \overline{g_1}$, ezért elég g_1-et felrajzolni:

A\BC	00	01	11	10
0				1
1	1	1	1	

A termek: $A\overline{B}$, AC és $\overline{A}B\overline{C}$.

Aki szemfüles két dolgot vehet észre. Az első, hogy ha A-t megnegálom, akkor pontosan $\overline{g_1}$-et, azaz g_3-at kapom, vagyis elég a termekben A és $\overline{A}$ szerepét felcserélni, hogy megkapjuk a helyes termeket.

A másik, hogy a jobb oldalon van egy sakttábla szerű mintázat. Ezt sokkal takarékosabban le lehet fedni EKVIVALENCIA vagy EXOR műveletekkel, mégpedig ez esetben a következő képlettel: $B(A \odot C)$. Így a minimális formula: $\overline{AB} + B(A \odot C)$.

g_2 táblája:

A\BC	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	

Az előzőhöz hasonlóan 3 termünk van: $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ és ABC, de a jobb oldali sakktáblát megint egyszerűbben le lehet írni. A legegyszerűbb alak: $\overline{BC} + B(A \odot C)$