BDG Matektábor 2011

Készítette a Berzsenyi Dániel Gimnázium matematika munkaközössége

2012. október 30.

Tartalomjegyzék

Csonka Dorottya: Darabolósdi

A 7-8-os csoportban nekem kedves feladatok közül válogattam úgy, hogy mindegyik megfogalmazásában volt valami darabolás, a háttérben pedig szimmetriák, invariáns tulajdonságok szerepeltek.

Bemelegítés

Két gyors, bemelegítő feladat után – még mindig bemelegítésként – négyrét hajtottam egy A/4-es papírt. Majd kivágtam az élek mentén különböző alakzatokat. A diákok feladata az volt, hogy lerajzolják, hogy milyen mintázatot kapunk, ha szétnyitjuk a papírlapot!

Az alábbi problémák egyszerre hangzottak el. Tetszőleges sorrendben lehetett rajtuk gondolkodni. Aki készen volt a feladattal, az további kérdéseket kapott a feladat megoldásával kapcsolatban. Ezeket ▷ -gel jelölöm. A feladatok után azok vázlatos megoldása is szerepel.

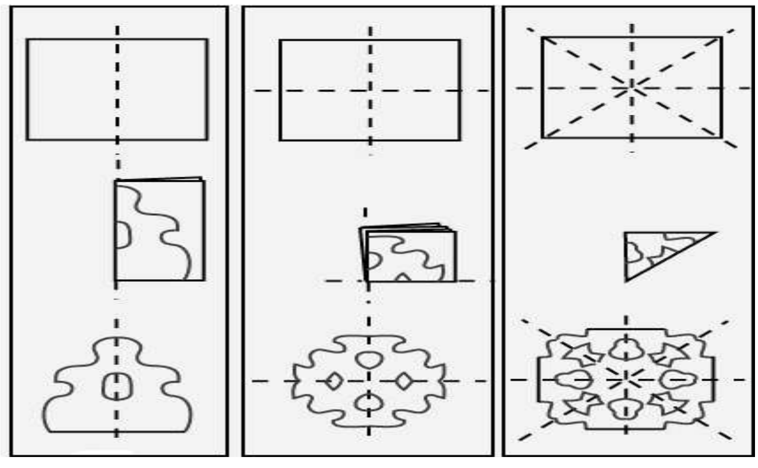
Feladatok gondolkodásra

1. Miután összehajtottad négyrét a papírlapot, úgy vágj ki alakzatokat az élek mentén, hogy a széthajtás után 3 négyzetet, 2 téglalapot (ami nem négyzet), 4 szabályos háromszöget, 4 negyedkört és 2 rombuszt kapjunk (ami nem négyzet).

▷ Adj meg olyan alakzatok sorozatát, amiket nem lehet kivágni a fenti módszerrel!

Mo.: Nem lehet olyan sorozatot kivágni, amiben legalább két páratlan számú alakzat szerepel.

▷ Milyen és hány alakzatot kaphatok, ha a négyrét hajtott papírt a lenti ábra szerint még az átló mentén összehajtom?



2. Az előző feladat után egy megmaradt A/4-es lapot kezd el darabolni Marci. Először a lapot négy, nem feltétlenül azonos részre vágja fel. Majd kiválaszt egy papírlap darabot és azt vagy négy, vagy hét részre vágja fel. Utóbbi eljárást folytatja az óra végéig. Mikor kicsöngetnek megszámolja a papírfecniket, és legnagyobb meglepetésére azt tapasztalja, hogy éppen 2011 darabra vágta fel az A/4-es lapot. Matyi -Marci padtársa- titkon egész végig figyelte Marci órai ügyködését. Szerinte Marci rosszul számolt, és valójában 2012 lapocskát sikerült előállítania. Melyikőjüknek lehetett igaza?

Mo.: Ha 4 részre vágunk egy kiválasztott papírdarabot, akkor 3-mal, ha 7 részre vágjuk a kiválasztott papírdarabot, akkor 6-tal növeljük a fecnik számát. Kezdetben egy lapunk volt. Mivel mindkét esetben hárommal osztható számokkal növeljük a részek számát, ezért tetszőleges vágás után is egy maradékot ad a lapok száma hárommal osztva. Ezért 2011 darab elképzelhető, 2012 nem. Matyinak biztosan nem volt igaza.

3. Egy disznóvágáson három nő: Anna, Borcsa és Cili kapott egy nagy darab sonkát. Anna gondosan fel is vágta a sonkát úgy, hogy minden darab értéke szerinte 4 petákot ért. Nem bízott a darabolásban Borcsa, így elvitte a henteséhez, aki megvizsgálta és lemérte a darabokat, és úgy találta, hogy azok rendre 3, 4 és 5 petákot érnek. Cili a fenti két mérés egyikében sem bízva önmaga is lemérte a húsokat, és a fenti elosztásoktól különböző végeredményre jutott. A sonka további darabolását nem megengedve, hogyan osszuk szét a három darab sonkát a három veszekedő nő közt úgy, hogy mindegyikük a saját felosztása szerint legalább 4 petáknyi (1/3 teljes sonka értékű) darabot kapjon, azaz mindegyik nő elégedetten távozzon a felosztást követően?

Mo.: Először válasszon Cili. Bármit választ, Borcsa tud választani hiszen a 3, 4 és 5 peták értékű sonkák bármelyikét választja Cili, marad egy, ami legalább 4 petákot ér. Ezután bármi marad, az megfelel Annának, hiszen szerinte mindegyik hús azonos értékű volt.

4. Él az Üveghegyen túl egy Csodasárkány. Ennek a Csodasárkánynak 2011 feje van. Pontosan egy fejét levágva az egy fej helyére tíz fej nő vissza. Ha egyszerre pontosan 17 fejét vágjuk le, akkor helyére 14 fej nő vissza. Nem nő vissza egy feje se, ha egyszerre pontosan 21 fejét vágjuk le. Ha 33 fejét vágjuk le egy kardcsapással, akkor 48 fej nő vissza. Sikerülhet-e az összes fejét levágni a sárkánynak? Ha igen, hogyan? Ha nem, akkor miért nem?

▷ Hány év múlva sikerülhet levágni a fejét a sárkánynak, ha évente egy plusz fejet növeszt?

Mo.: Bármelyik típusú fejlevágás során a sárkány fejeinek száma hárommal osztható számmal változik. Kezdetben hárommal osztva egy maradékot adott a fejek száma. Így bármely fejlevágás után is hárommal osztva egy maradékot ad majd a fejek száma. Mivel a nulla fej hárommal osztható, ezért nincs a fenti fejlevágás típusok közül egy sorozat sem, amivel levágható lenne a sárkány összes feje.

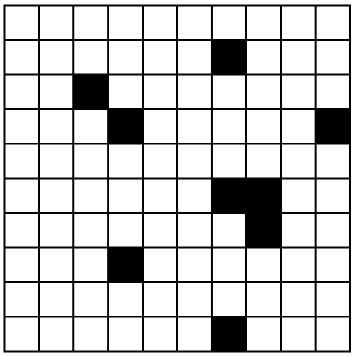
Mo.: 2 év múlva hárommal osztható (2013) feje lesz a sárkánynak. Így a fejek levágásának szükséges feltétele teljesül. És valóban megoldható a fejek levágása, például úgy, hogy hatszor vágok le 17 fejet. Ekkor visszanő hatszor 14 fej, így összesen 18 fejjel lesz kevesebb feje a sárkánynak, azaz 1995 feje lesz. Ekkor 95-ször vágok le egymás után 21 fejet, amivel az összes fejét sikerül is levágnom.

5. Osszuk fel a természetes számok halmazát két végtelen elemszámú halmazra úgy, hogy bármelyikből hét elemet kivéve és azokat összeadva, az eredmény is ugyanabban a halmazban marad.

▷ Bizonyítsd be, hogy nem létezik másfajta felosztás!

Mo.: Legyen az egyik halmaz elemei a páros, a másiké a páratlan számok.

6. Egy város lakóit egy fertőzés támadta meg. A város alaprajza egy 10×10-es négyzettel ábrázolható, minden 1×1-es négyzetben egy háztömb van. Egy háztömb lakói megfertőződnek, ha legalább két élszomszédos háztömbjük fertőzött. Kezdetben 8 fertőzött háztömb van. Megfertőződhet az egész város?

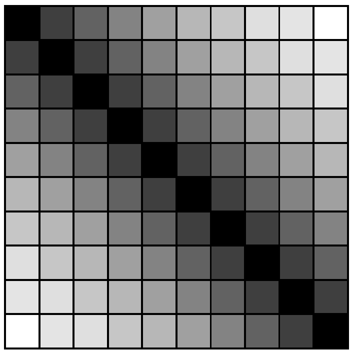


▷ Mi történik 9 fertőzött háztömb esetén?

▷ Mikor fertőződhet meg az egész város?

▷ Mutass erre egy megfelelő konstrukciót!

Mo.: Se 8, se 9 fertőzött háztömb esetén nem képzelhető el olyan konstrukció, mely során az egész város megfertőződik. Vizsgáljuk a fertőzött háztömbök kerületét. A fertőzés módja miatt újonnan megfertőződött háztömbök nem változtatnak a fertőzött háztömbök kerületén. Azaz 9 fertőzött háztömb esetén végig $4 \cdot 9 = 36$ egység marad, ami kevesebb, mint a 10×10-es város 40 egységnyi kerülete. Tehát annak a szükséges feltétele, hogy az egész város megfertőződhessen az, hogy legalább 10 háztömb legyen fertőzött kezdetben. Ez persze nem elégséges feltétel. Megfelelő konstrukció az, ha a tíz fertőzött területet az átlóba helyezzük el. Ekkor leellenőrizhető, hogy az egész várost megfertőztük.



Bűvész trükkök

7. David Copperfield A kilencvenes évek végén bemutatott egy trükköt a magyar televízióban. Ezt a trükköt csináltam végig a csoport tagjaival – valószínűleg kevéssé teátrálisan, mint azt anno David Copperfield tette. Először is egy 3×3-as négyzet középső négyzetébe helyezte mindenki a bábuját. Mikor szóltam, mindenkinek egy élszomszédos négyzetre kellett lépnie. Ekkor én levettem egy mezőt, így arra már senki nem léphetett. Ezután újra lépni kellett- és én újra lehúztam egy mezőt. Végül mindenki ugyanazon a mezőn állt. És érdekes módon egyszer se húztam le olyan mezőt, amin valaki állt volna. Mi a bűvész trükkje?

Mo.: Színezzük a 3×3-as négyzet négyzeteit sakktáblaszerűen feketére vagy fehérre. A szomszédos négyzetek különböző színűek. Minden lépésben ellentétes színű mezőre lépünk.

Függetlenül attól, hogy ki merre lépett, mindenki mindig ugyanolyan színű négyzeten áll. A bűvész is könnyen nyomon követheti, hogy éppen milyen színű négyzeteken állnak a játékosok, így mindig ellentétes színű mezőt húz le, persze figyelve arra, hogy a megmaradó négyzetek összefüggőek legyenek.

8. A következő trükk során mindenki kézbe kapott egy idei naptárat. A napok közül válasszunk ki egy 3×3-as blokkot, és a bennük szereplő számokat adjuk össze. A végeredmény ismeretében kitalálható, hogy mely 3×3-as területre gondolt az illető.

H	K	Sz	Cs	P	Sz	V
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28						

Mo.: Az összeg a középső szám kilencszerese lesz. Ez könnyen igazolható, ha felírjuk a dátumokat a középső számhoz viszonyítva, felhasználva, hogy az egymás fölötti napok egymástól 7 napnyi távolságra vannak.

Felhasznált irodalom:

1. , 4. és 5. feladatot Pósa Lajostól hallottam

2. és 6. feladat Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből (Typotex 2006) Invariáns tulajdonságok fejezetéből valóak

3. feladat Hugo Steinhaus One Hundred Problem in Elementary Mathematics (New York, 1964.) könyvből

7. és 8. feladat a Közös nevezőnk a Matematika (Kőszeg 2003.) című könyvben Pintér Klári Néhány bűvészmutatvány fejezetében találhatóak

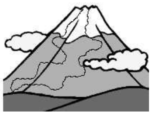
Csonka Dorottya: Sonkás szendvics és egyéb folytonos csemegék

Bevezetés

A budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium Matematika táborában 11-es és 12-es speciális matematika tantervű és érdeklődő tatai diákok foglalkoztak a folytonosság témakörével két órán keresztül. A foglalkozás gerincét Tabachnikov *Considerations of Continuity* (Quantum 1990 májusi száma 8-12. oldal) cikke adta. A cikkben az itt elhangzottakkal ismertetjük meg a kedves Olvasót. Az alábbiakban csak egzisztencia bizonyításokkal találkozunk. A feladatok során csak a megoldás létezését bizonyítjuk, nem számítjuk ki a gyök pontos értékét, nem szerkesztjük meg a keresett egyeneseket, érintőket.

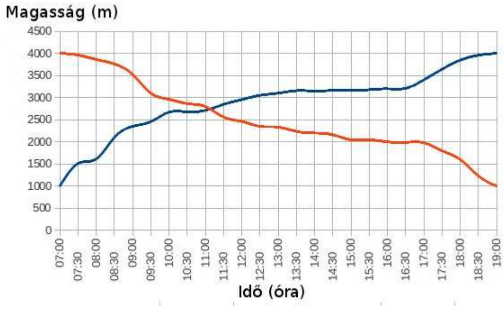
Ismerkedés a fogalommal

Először nézzük egy hegymászó esetét. Ez a hegymászó az 1000 méteren lévő alaptáborból reggel 7 órakor indulva este 7 órára érkezik meg a 4000 méteres csúcsra. Másnap reggel 7 órakor indul vissza (nem feltétlenül azonos útvonalon), de ugyanúgy este 7-re érkezik meg az alaptáborba. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan időpont a lefele vezető út során, amikor ugyanolyan magasan volt, mint előző nap ugyanabban a pillanatban.



Képzeljük el, hogy egyszerre két hegymászót indítunk útnak: az egyiket az 1000 méteren lévő alaptáborból, a másikat a 4000 méteren lévő csúcsról reggel 7-kor. Útjuk során folytonosan haladnak, minden magassági értéket felvesznek. Az egyik hegymászó felér a 4000 méteren lévő csúcsra, a másik pedig megérkezik az 1000 méteren lévő alaptáborba este 7 órára. Útjuk során biztosan lesz egy olyan pillanat, amikor ugyanolyan magasan lesznek, hiszen a fentről érkező hegymászó magassága *folyamatosan* csökken, míg a lentről felfelé tartóé *folyamatosan* növekszik.

Ábrázoljuk közös grafikonon a tengerszint feletti magasságot az idő függvényében. Példaképp álljon itt egy lehetséges grafikon:

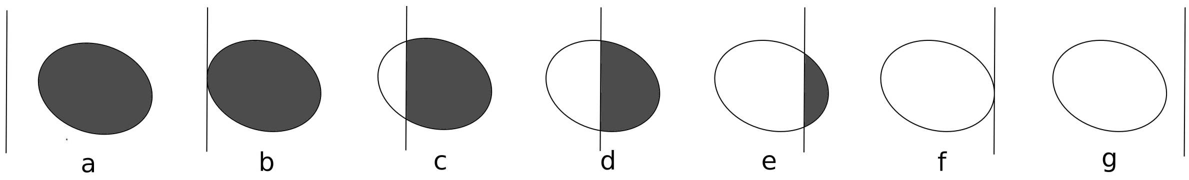


Mivel a két függvény kezdeti és végállapotai páronként megegyeznek, és folytonosak, következik, hogy lesz egy olyan időpillanat, amikor a két grafikon metszi egymást. A folytonos függvény azon tulajdonságát használtuk ki, hogy két függvényértéke között minden értéket felvesz. Ez az állítás elég magától értetődő[1], viszont sok nyilvánvaló állításhoz hasonlóan nem egyszerű a bizonyítása. De ez nem is célja a foglalkozásnak. Azonban a problémák megoldásánál mindig ezt fogjuk használni.

Alap problémák

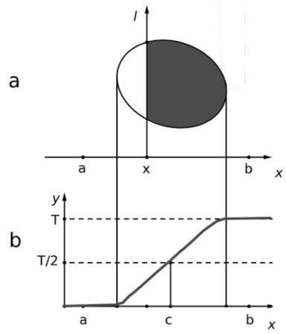
1. állítás: Tetszőleges irányhoz létezik olyan egyenes, amely felezi egy tetszőleges (területtel rendelkező) halmaz területét.

Vegyünk a tetszőleges iránnyal párhuzamos egyenest úgy, hogy az az alakzatunk bal oldalán helyezkedjen el (a. ábra). Majd mozgassuk az egyenest jobbra. Először érinteni fogja az egyenes a halmazt (b. ábra), majd kettévágja azt (c-f ábra), mígnem már egészen az egyenes bal oldalára nem kerül a tetszőleges alakzat.



Míg az egyenes halad balról jobbra, a bal illetve a jobb oldalán lévő terület folytonosan változik. Mivel kezdetben az egyenes bal oldalán lévő rész területe nulla volt, majd végül az egész terület az egyenes bal oldalán helyezkedett el, így biztosan volt olyan helyzete az egyenesnek, amikor pont felezte a területet. Nem tudjuk hol van ez az egyenes, csak abból, hogy a terület folytonosan változik, azt tudjuk biztosan, hogy *létezik* ilyen egyenes.

Vegyük fel az x tengelyt az egyenesre merőlegesen. Készítsünk egy $f(x)$ függvényt, ami az egyenes bal oldalán lévő terület nagyságát ábrázolja az egyenes helyzetének függvényében.



Ekkor a felező egyenes megtalálása egyenértékű azzal a problémával, hogy megtaláljuk azt a c pontot a és b közt, melyre igaz, hogy $f(c) = \frac{T}{2}$, ahol T az alakzat területe (l. ábra).

Húzzuk meg az $y = \frac{T}{2}$ egyenest. Az $f(x)$ függvény bal oldala biztosan ez az egyenes alatt helyezkedik el, a jobb oldala pedig felette, mivel $f(a) = 0 < T/2$, míg $f(b) = T > T/2$. Ezért léteznie kell egy $c \in [a; b]$ pontnak, ahol a függvény metszi az $y = \frac{T}{2}$ egyenest, mert az $f(x)$ függvény folytonos, azaz $f(c) = T/2$.

Ennek következménye, az 1.b állítás. Bizonyítása indirekt módon történhet, az olvasóra bízom.

1.b állítás: Minden irányhoz *pontosan* egy területfelező egyenes létezik.

Megjegyzés: Az állítás igaz konkáv és nem összefüggő alakzatokra is. Az egyszerűség kedvéért azonban a továbbiakban csak konvex alakzatokat tekintünk.

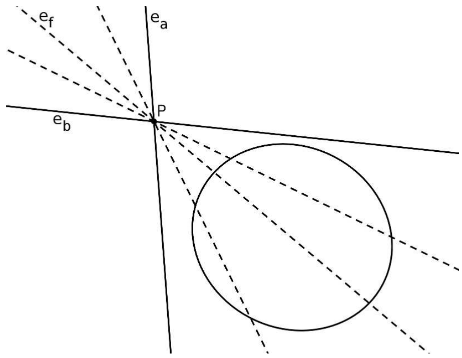
2. állítás: Egy konvex halmazon kívüli P pontból mindig létezik olyan P-n átmenő egyenes, ami felezi

[1] Ezt a szemléletességet nagyon nehéz legyőzni. Max Planck a XX. század elején mégis merészen feltette, hogy a hullámoszcillátor energiája a klasszikus fizika folytonos képével ellentétben energiakvantumok egész számú többszöröse, azaz csak diszkrét értékeket vehet fel. A folytonossággal való zseniális szakítása megmagyarázott egy sor, a klasszikus fizikából nem következő jelenséget, és az atomok és a még ennél is kisebb objektumok fizikai törvényeinek felismeréséhez, a kvantummechanika megszületéséhez vezetett.

a halmaz területét.

Az állítás bizonyítása nagyon hasonló az első állításéhoz. Ezt a diákok megkapták önálló bizonyításra, miután az első állítást megbeszéltük. Lássuk a bizonyítást röviden:

Biztos van olyan P-n átmenő egyenes, amely még nem metszi az alakzatot, és az egész alakzat annak egyik oldalán van (e_a). Mozgatva az egyenest az alakzat felé, miután áthaladt rajta lesz olyan egyenes, melynek másik oldalán van az alakzat (e_b). Mivel az egyenest folytonosan mozgattuk, és a terület is folytonosan változott, ezért kellett lennie egy olyan egyenesnek a mozgatás során, amely éppen felezte az alakzatunkat (e_f).



3. állítás: Tetszőleges háromszögbe írható négyzet úgy, hogy egy-egy csúcsa egy-egy oldalon, a másik két csúcsa pedig a harmadik oldalon helyezkedik el.

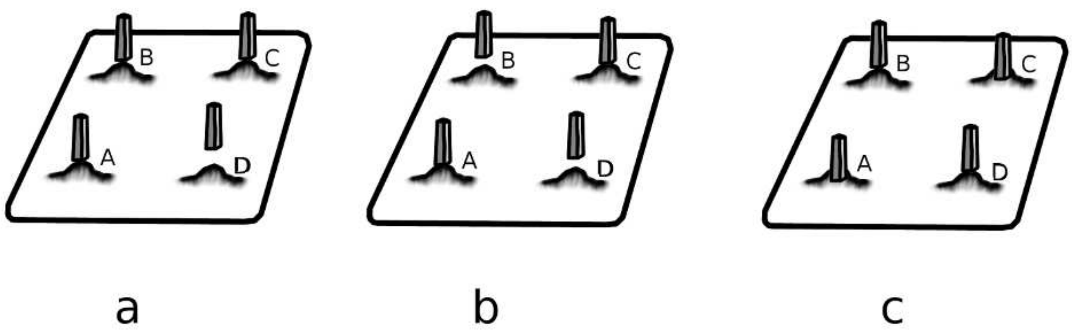
A feladat ismert, a nagyítás témakörén belül tárgyalni is szokás ennek a négyzetnek a megszerkesztése. De most csak a létezését szeretnénk bizonyítani. Az a, b, c oldalú háromszögbe írjunk úgy téglalapot, hogy annak d oldala legyen párhuzamos a háromszög c oldalával, e oldala pedig merőleges rá. Vegyük úgy fel a téglalapot, hogy $d < e$ teljesüljön. Közelítsük a d oldalt a háromszög c oldalához. Mikor már „kellően” közel van a d oldal a c-hez, biztosak lehetünk benne, hogy lesz olyan állapot, ahol $e < d$. Mivel d folytonosan nő a mozgatás során, és a téglalap e oldala folytonosan csökken, így szükségszerűen lesz olyan állapot, amikor $d = e$, azaz amikor a téglalap négyzet.

4. állítás: Az $f(x)$ függvénynek akkor van $\frac{T}{2}$ hosszú húrja, ha $f(x + \frac{T}{2}) = f(x)$. Definiáljuk a $g(x)$ függvényt a következőképpen: $g(x) = f(x + \frac{T}{2}) - f(x)$. Ha van olyan a, ahol $g(a) = 0$, akkor készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy $g(a) < 0$. Legyen $b = a + \frac{T}{2}$. $g(b) = g\left(a + \frac{T}{2}\right) = f\left(a + \frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right) - f\left(a + \frac{T}{2}\right) = f\left(a + T\right) - f\left(a + \frac{T}{2}\right) = f(a) - f\left(a + \frac{T}{2}\right) = -g(a)$, azaz $g(b) > 0$.

Mivel a $g(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumon **előjelet vált**, ezért van olyan $c \in [a; b]$ hogy $g(c) = 0$. Ezt kellett belátnunk.

5. állítás: Tekintsük azokat a négyzet alakú asztallappal rendelkező asztalokat, melynek lábai a négyzet négy csúcsában vannak. Tetszőleges folytonos felületen mozgatható az asztal olyan állapotba, ahol nem billeg. (Ebben a stabil állapotban nem követeljük meg, hogy az asztallap vízszintes legyen.)



Jelöljük az asztal lábainak helyzetét az A, B, C és D betűkkel. Ha az asztal lábai billegnek, akkor minden esetben megoldható, hogy az asztal három lába lent, és a negyedik lába a levegőben legyen, mert 3 pont meghatároz egy síkot. Az a. ábrán a D helyzetben lévő láb legyen a levegőben, az A, B és C pozíción lévők pedig legyenek a földön. Forgassuk az asztalt AC egyenese körül úgy, hogy a B és D pozícióban lévő láb is azonos távolságra legyenek a földtől (b. ábra), legyen ez a távolság d, a földtől mérve.

Képzeljük el most, hogy a földet helyettesítjük egy kocsonya szerű anyaggal. Megtehetjük, hogy elforgatjuk az asztalt a középpontja körül úgy, hogy két lába (kezdetben a b. ábrán A és C helyen lévők) folyamatosan a felületen vannak, a másik két lába pedig mindig ugyanannyival (d-vel) feljebb tőlük. Mikor a lent lévő lábak negyed fordulat után B és D helyzetbe kerülnek, akkor még mindig a földön lesznek – hiszen így forgattuk. De mivel a másik két láb hozzájuk képest d távolsággal lejjebb van, így most azok (A és C helyen a c. ábrán) a föld alatt helyezkednek el d távolsággal.

Mivel a b. és c. ábrán jelölt helyzetet figyelve először a B-D, majd az A-C helyzetben lévő két – nem végig a felületen lévő - asztalláb felszíntől vett távolsága előjelet vált, így szükségszerűen kellett lennie egy olyan pillanatnak, amikor azok a földön helyezkedtek el. Azaz akkor az asztal mind a négy lába a földön helyezkedett el, nem billegett az asztal.

A megoldásban fontos szerepet játszott, hogy az asztal lábai egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el. Ismeretlen eddig, hogy ez az állítás igaz téglalap alakú asztalra is, vagy sem.

További problémák

Az alábbi, öt csoportba osztott feladatok elsőit egyszerre kapták meg a diákok gondolkodásra. A csoportokban a feladatok nehézségi sorrendben követik egymást. A foglalkozáson a tanulók tetszőlegesen választhattak, hogy melyiken gondolkodnak. Amikor készen voltak, akkor a csoport következő feladatait kapták meg. Majd ha mind készen volt – vagy a másik témakörbe is bele akartak kóstolni – akkor tovább ugrottak egy másik feladatkörre.

Idő hiányában nem hangzott el az összes feladat. Itt azoknak a vázlatos megoldásait közlöm, amelyek új gondolatokat tartalmaznak, a többi megoldását az Olvasóra bízom.

A világ körülöttünk - könnyebb feladatok:

6.a állítás: Tegnap éjfélkor hidegebb volt, mint tegnapelőtt éjfélkor és ma éjfélkor is. Bizonyítsd be, hogy ma valamikor ugyanannyi volt a hőmérséklet, mint tegnap ugyanakkor! (P.l tegnap 15.23-kor ugyanúgy 14°C volt, mint ma 15.23.)

6.b állítás: Egy l hosszú létrát falnak támasztunk az ábra szerint. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pontja a létrának, amely ugyanolyan távol van a földtől, mint a faltól!

6.c állítás: Létezik az egyenlítőn két átellenes pont, ahol a hőmérsékletek megegyeznek.

6.d állítás: A Földön mindig létezik két átellenes pont, ahol egyszerre a nyomás és a hőmérséklet értékek is megegyeznek. (Ez már nehéz feladat...)

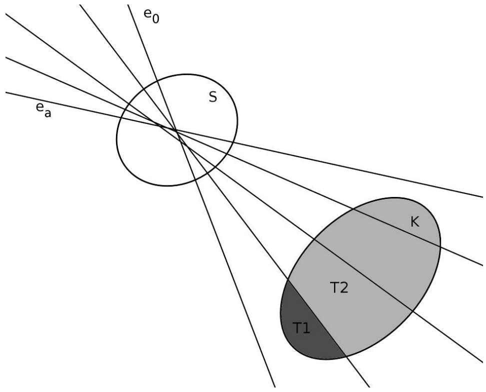
Sonkás-szendvics és barátai – két halmaz szimultán felezése

7.a állítás (Pizza tétel) Létezik olyan egyenes, amely egyszerre felezi egy tetszőleges konvex halmaz kerületét és területét.

Megoldás: Válasszunk két pontot (A-t és B-t) a konvex alakzat kerületén úgy, hogy azok felezzék az alakzat kerületét. Mozgassuk A-t és B-t úgy, hogy azok távolsága állandó maradjon, az alakzat kerületének fele. Tekintsük az A és B egy tetszőleges állapotában az AB egyik és másik oldalán lévő területek különbségét. Ez az érték előjelet vált, midőn A és B helyet cserél.

7.b állítás (Két dimenziós sonkásszendvics tétel): Két konvex alakzat egy egyenessel megfelezhető. Azaz létezik olyan egyenes vágás, amivel egy kenyér, és egy sonka egyszerre megfelezhető.

Megoldás: Az 1. állításnál láttuk, hogy létezik tetszőleges irányú felező egyenes. Legyen a két alakzatunk S (mint sonka) és K (mint kenyér). Húzzunk meg egy olyan S-t felező egyenest, amelynek egyik oldalán helyezkedik el K. Legyen ez a 0°-hoz tartozó felező egyenes. Majd ezt a szöget folytonosan változtatva hozzuk létre mindig a szöghöz tartozó S-t felező egyenest. Lesz olyan α, amikor már a K alakzat az egyenes másik oldalán helyezkedik el. Az egyenes egyik oldalán lévő területet nevezzük T_1 -nek, a másik oldalán lévő terület T_2 -nek. Kezdetben $T_1 - T_2$ negatív, α esetén pozitív. Azaz előjelet vált. Tehát van olyan szög, amely egyszerre felezi K és S területét.

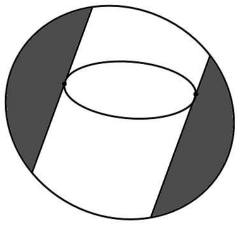


Megjegyzés: A Pizza-tétel és a Sonkásszendvics tétel analóg, ha a kerületet megfeleltetjük az S halmaznak. Valamint vegyük észre, hogy a bizonyításban nem volt fontos, hogy hol helyezkedik el egymáshoz képest az S és a K halmaz. Azaz a bizonyítás akkor is igaz, ha a kenyérszelet még a péknél, a sonkaszelet pedig még a hentesnél van....

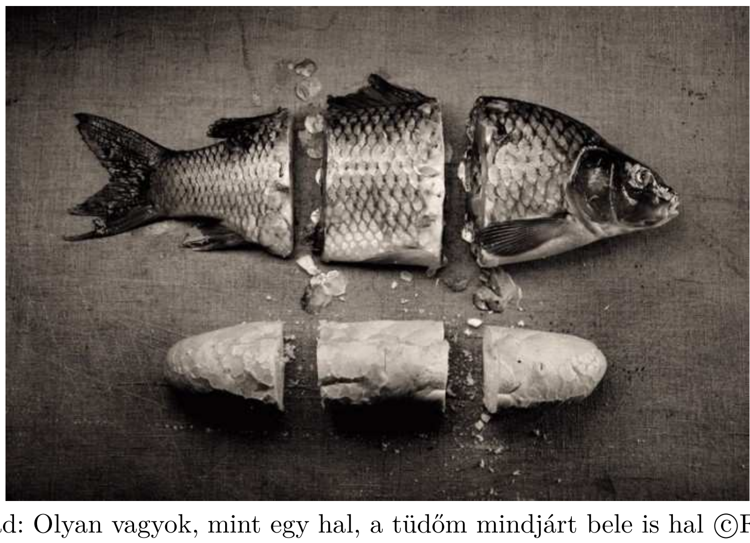
7.c állítás (Három dimenziós sonkásszendvics tétel) Létezik olyan sík, amely egyszerre felez három konvex alakzatot.

Darabolós problémák – kérdések a konvex alakzatokon belül

8.a állítás: (Tükörtojás tétel) Konvex alakzat tartalmaz egy másik konvex alakzatot. A belső alakzatnak léteznek olyan e és f érintői, amelyek párhuzamosak, és a külső alakzatból egyenlő területű részeket vágnak le.



8.b állítás: Minden konvex alakzatnak vannak olyan e és f húrjai, melyek egyszerre párhuzamosak, egyenlő hosszúak és a konvex alakzatot három egyenlő területű részre osztják fel.



Fákó Árpád: Olyan vagyok, mint egy hal, a tüdőm mindjárt bele is hal ©Fákó Árpád

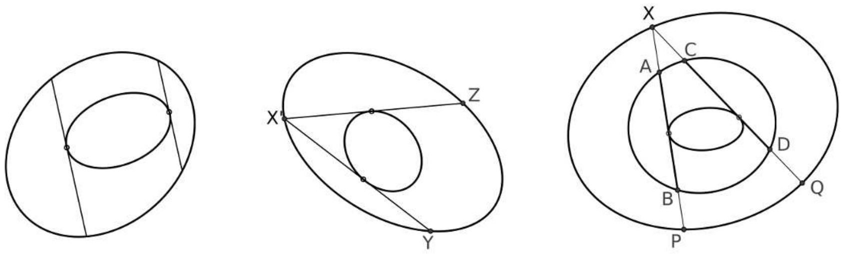
8.c állítás: Adott két konvex alakzat úgy, hogy az egyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy a kisebb alakzatnak vannak olyan érintői, melyek egymással párhuzamosak, és egyenlő hosszú részük fut a külső alakzaton belül! (ld. *a.* ábra)

8.d állítás: Adott két konvex alakzat úgy, hogy az egyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy a külső alakzatnak van olyan pontja, amiből egyenlő hosszú érintőket húzhatunk a belső alakzathoz! ($\exists X' \in K\ddot{u}ls\H{o} : XZ = XY$) (ld. *b.* ábra)

8.e állítás : Adott három konvex alakzat a c. ábra szerint egymásba ágyazva. Bizonyítsuk be, hogy a külső alakzaton van olyan X pont , hogy abból a legbelső alakzatba húzható olyan érintő, melynek a második alakzatba eső részei azonos hosszúak.

($\exists X \in K\ddot{u}ls\H{o} : AB = CD$)

Megoldás: Legyen $AB = a$ és $CD = b$. Vegyük fel X-et úgy, hogy b a legnagyobb húzható érintő legyen. Ekkor $b - a > 0$. Most X fusson végig a külső alakzaton mindaddig, míg a két húr helyet cserél. Ekkor $a - b > 0$. Mivel a $b - a$ előjelet vált, ezért volt olyan pont, ahol $a = b$ volt.



a b c

Négyzetes feladatok – konvex burok

9.a állítás: Tetszőleges konvex alakzat köré négyzet írható.

Megjegyzés: Olyan alakzatokra igaz az alábbi bizonyítás, ahol az érintő folytonosan változik.

9.b állítás: Magyarország térképe is négyzetbe foglalható.

9.c állítás: Tetszőleges test kockába írható.

Függvények

10.a állítás: Az $f(x)$ egy tetszőleges, T szerint periodikus, folytonos függvény. Létezik $f(x)$-nek

a) $\frac{T}{3}$ hosszú húrja.

b) $\frac{T}{n}$ hosszú húrja.

c) $\frac{p}{q} \cdot T$ hosszú húrja.

Megoldás: A b. részt bizonyítjuk.

Legyen $g(x) = f(x + \frac{T}{n}) - f(x)$

$$g(0) = f(\frac{T}{n}) - f(0)$$

$$g(\frac{T}{n}) = f(2\frac{T}{n}) - f(\frac{T}{n})$$

$$g(2\frac{T}{n}) = f(3\frac{T}{n}) - f(2\frac{T}{n})$$

$$g(3\frac{T}{n}) = (4\frac{T}{n}) - f(3\frac{T}{n})$$

...

$$g(\frac{(n-1)T}{n}) = f(T) - f(\frac{(n-1)T}{n})$$

A fenti teleszkopikus összegnél $f(T) - f(0) = 0$, mivel az f függvény T szerint periodikus.

Ha a fentiek közül az egyik $g(\frac{k \cdot T}{n})$ érték nulla, akkor készen vagyunk.

Ha nem, akkor kell, hogy legyen negatív és pozitív tag is felsorolva, mert az összeg nulla. Ha viszont a g függvény előjelet vált, akkor létezik olyan c pont, ahol $g(c) = 0$, azaz van az f függvénynek $\frac{T}{n}$ hosszú húrja.

10.b állítás: Minden harmadfokú polinomnak van gyöke.

10.c állítás: Minden páratlan kitevős polinomnak van gyöke.

10.d állítás: Az $f(x)$ egy tetszőleges $[a;b]$ zárt intervallumon folytonos függvény, melynek értékkészlete az $[a;b]$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan x, amire $f(x) = x$.

10.e állítás: Az $f(x)$ egy tetszőleges $[a;b]$ zárt intervallumon folytonos függvény, ahol $b - a = T$, és az intervallum végpontjainál azonos értékeket vesz fel: $f(a) = f(b)$.

Bizonyítsuk be, hogy az van olyan l hosszú húrja az $f(x)$ függvénynek, ahol

a) $l = \dfrac{T}{2}$

b) $l = \dfrac{T}{3}$

c) $l = \dfrac{T}{n}$

d) Állíts elő egy olyan $f(x)$ függvényt, amelynek nincs $l = \frac{2T}{3}$ hosszú húrja!

10.f állítás: Az $f(x) = a_1 \cdot \sin x + a_2 \cdot \sin 2x + a_3 \cdot \sin 3x + ... + a_n \cdot \sin(nx) + b_1 \cdot \cos x + b_2 \cdot \cos 2x + ... + b_k \cdot \cos(kx)$ függvénynek van zérushelye $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ esetén.

Erben Péter: Ptolemaiosz hagyatéka

Bevezető

A következő feladatsor Stanley Rabinowitz *Ptolemy's Legacy* címet viselő készülő könyvének első néhány fejezetét dolgozza fel. A szerző a következő bevezetővel indítja írását:

> Our story begins around the year 150 AD when the Alexandrian mathematician, geographer, and astronomer Claudius Ptolemaeus published his monumental work, the *Almagest*, which provided the mathematical foundations for computing the future and past position of the planets. The theory was based on the prevailing geocentric model of the solar system in which the planets moved in circles around the Earth. To aid in his computations, Ptolemy proved a theorem connecting the distances between four points on a circle (see figure on right). This result has been so useful, that it has come to be known as Ptolemy's Theorem. Over the coming centuries, even to this day, mathematicians have been analyzing and generalizing this theorem in many different directions. Little did Ptolemy imagine the wealth of beautiful and intriguing mathematics that was generated by mathematicians over the years based on his innocuous theorem.
>
> This book is about pretty geometry results.

1. szakasz – Van Schooten tétele

Van Schooten tétele: Az ABC szabályos háromszög köréírt körének rövidebb AB ívén felvett tetszőleges P pontra:

$$PA + PB = PC.$$

Kérdezzünk!

1. Mi a helyzet, ha a háromszög csak egyenlő szárú: $AC = BC$ (például 2,2,1 oldalakkal)?
2. Általában mit mondhatunk egyenlő szárú háromszögekre?
3. Izogonális pont és a háromszög oldalaira kifele rajzolt szabályos háromszögek.
4. Mi a helyzet általános háromszög esetén?
5. Hogy szól és igaz-e a tétel megfordítása?

2. szakasz – Ptolemaiosz tétele

Ptolemaiosz tétele: Az $ABCD$ húrnégyszög oldalai és átló között fennáll a következő kapcsolat:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

Kérdezzünk!

1. Mi a helyzet, ha a $ABCD$ nem húrnégyszög? Hol romlik el a bizonyítás? Állíthatunk kevesebbet? Általánosabbat?

2. Vizsgáljuk meg a tétel állítását speciális négyszögekre!

   (a) négyzet;

   (b) téglalap;

   (c) húrtrapéz;

   (d) az egyik átló átmérő

3. Az oldalakat a, b, c, d-vel, az átlókat x-szel és y-nal, a félkerületet s-sel, a területet T-vel, a köréírt kör sugarát pedig R-rel jelöljük (x egyik végpontjában a és d találkozik). Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket:

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

$$x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

3. szakasz – Alkalmazások, általánosítások, következmények

1. Vegyünk fel az $A_1A_2A_2\dots A_n$ páratlan oldalszámú szabályos sokszög köréírt körén egy P pontot, amely a rövidebb A_1A_n íven van. Jelölje a_i a PA_i szakasz hosszát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k = 0.$$

   Mit állíthatunk páros oldalszám esetén?

2. (*Dickson-tétel*) Az $A_1A_2A_2\dots A_n$ páratlan oldalszámú szabályos sokszög köréírt körének sugara R, P az A_n-nel átellenes pont, és a_i a PA_i szakasz hossza. Ekkor igaz a következő:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^{k-1}a_k = R.$$

   Mit mond ki a tétel szabályos ötszögre? Írjuk át a tételt trigonometrikus alakra!

3. (*Fuhrmann-tétel*) Tetszőleges $ABCDEF$ húrhatszögre:

$$AD\cdot BE\cdot CF = AB\cdot CD\cdot EF + BC\cdot DE\cdot FA + AD\cdot BC\cdot EF + BE\cdot CD\cdot FA + CF\cdot DE\cdot AB$$

Fejér Attila: Boole-algebra

Feladatsorok

1. foglalkozás

1. Pihen Apa, Mama,Fiuk, L1 lányuk, L2 lányuk.

(1) Ha az Apa úszik, akkor a Mama és Fiuk is megy.

(2) Ha a Fiú úszik, akkor nővére, L1 is.

(3) L2 lány pontosan akkor úszik, ha a Mama is.

(4) Minden reggel úszik valamelyik szülő.

(5) Vasárnap reggel csak az egyik lány úszott.

Kik úsztak vasárnap reggel?

2. A 7 törpe házikójában valaki eltört egy tányért. Hófehérkének így számoltak be a történtekről:

Tudor: Nem Szundi volt. Én voltam.

Morgó: Nem én voltam. Nem Hapci volt.

Vidor: Tudor volt. Nem Morgó volt.

Ki törte el a tányért, ha a törpék egyik állítása igaz, a másik hamis? Melyek az igaz állítások?

3. Másnap egy pohár törik el, a következő vallomások hangzanak el:

Kuka: Nem én voltam. Nem Szende és nem is Tudor volt.

Szundi: Én voltam. Tudor vagy Vidor volt.

Szende: Hapci vagy Tudor tette. Szundi második állítása hamis.

Hapci: Nem én voltam. Kuka volt.

Az állítások közül megint az egyik igaz, a másik hamis. Ki volt a tettes? Melyik állítás igaz, melyik hamis?

4. Törpapának van két háromjegyű, kettes számrendszerbeli száma, legyenek ezek $A_3A_2A_1$ és $B_3B_2B_1$. Meg akarja határozni az $S_4S_3S_2S_1 = A_3A_2A_1 + B_3B_2B_1$ összeget, de sehogyan sem boldogul vele, ezért arra kéri Okoskát, segítsen neki meghatározni, az összeg egyes számjegyei mikor lesznek egyesek az összeadandók számjegyeinek függvényében. Például S_1 pontosan akkor lesz 1, ha A_1 és B_1 közül pontosan az egyik 1, a másik 0. Segíts Okoskának!

2. foglalkozás

5. Számoljuk ki, hogy hány különböző egy kimenetű, n változós logikai függvény létezik!

6. Mi a helyzet k kimenet esetén?

7. Írjuk fel egy igazságtáblába az összes kétváltozós, egykimenetű függvényt! Az előzőek alapján ebből $2^{2^n} = 16$ lesz.

8. Határozzuk meg ezek közül azokat, amiket már ismerünk!

9. Azt láttuk, hogy az INVERTÁLÁS, az ÉS illetve a VAGY műveletek segítségével tetszőleges logikai függvényt ki tudunk fejezni, de vajon létezik-e olyan kétváltozós függvény, ami képes **egyedül** ugyanerre? Ha igen, adjuk is meg az összeset. Segítség: elég a fenti három műveletet kifejezni. Fejezzük is ki!

10. Írjuk fel a következő négyváltozós függvények normál alakjait!

A	B	C	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

11. Rajzoljuk fel az előző feladatban szereplő g_1, g_2 és g_3 Karnaugh tábláját, és írjuk fel az azokban szereplő termeket!

Jegyzet

1. foglalkozás

Bemelegítő feladatok

Feladat

Tengerparton pihen Apa, Mama,Fiuk, L1 lányuk, L2 lányuk.

(1) Ha az Apa úszik, akkor a Mama és Fiuk is megy.

(2) Ha a Fiú úszik, akkor nővére, L1 is.

(3) L2 lány pontosan akkor úszik, ha a Mama is.

(4) Minden reggel úszik valamelyik szülő.

(5) Vasárnap reggel csak az egyik lány úszott.

Kik úsztak vasárnap reggel?

Megoldás

Egy egyszerű megoldási lehetőség, ha kiindulunk a szülőkből. Tegyük fel, hogy vasárnap reggel az Apa úszott. (1) miatt úszott Mama és a Fiuk is. (2) miatt L1, (3) miatt L2 is úszott, azaz ha Apa úszik, akkor úszik mindenki, de ez ellentmond (5)-nek, vagyis Apa nem úszott. (4) miatt ezért Mama mindenképp úszott, (3) miatt L2 is. Azt tudjuk, hogy apa nem úszott, (5) miatt pedig L1 sem. Kérdés, hogy a Fiú úszott-e? Ha igen, akkor (2) miatt L1 is, ami ellentmond (5)-nek, ha nem úszott, akkor nincs ellentmondás, vagyis csak a Mama és L2 úsztak.

Feladat

A 7 törpe házikójában valaki eltört egy tányért. Hófehérkének így számoltak be a történtekről:

Tudor: Nem Szundi volt. Én voltam.

Morgó: Nem én voltam. Nem Hapci volt.

Vidor: Tudor volt. Nem Morgó volt.

Ki törte el a tányért, ha a törpék egyik állítása igaz, a másik hamis? Melyek az igaz állítások?

Megoldás

Ha Vidor első állítása igaz, akkor a második hamis, azaz Tudor is, Morgó is tettes, ami nem lehet. Tehát Vidor első állítása hamis, a második igaz. Ezért Morgó első állítása igaz és a második hamis, melyből adódik, hogy Hapci volt a tettes.

Feladat

Másnap egy pohár törik el, a következő vallomások hangzanak el:

Kuka: Nem én voltam. Nem Szende és nem is Tudor volt.

Szundi: Én voltam. Tudor vagy Vidor volt.

Szende: Hapci vagy Tudor tette. Szundi második állítása hamis.

Hapci: Nem én voltam. Kuka volt.

Az állítások közül megint az egyik igaz, a másik hamis. Ki volt a tettes? Melyik állítás igaz, melyik hamis?

Megoldás

Ha Hapci első állítása hamis, akkor a második igaz, vagyis egyszerre tette ő és Kuka, ami nem lehet, így az első igaz, a második a hamis. Így kuka első állítása igaz, a második pedig hamis, azaz Szende vagy Tudor tette. Ha Szundi első állítása igaz, akkor a második hamis, azaz se nem Tudor, se nem Vidor nem tette, az eddigiekkel összevetve pedig egyszerre lenne Szende és Szundi a tettes, ami megint nem lehet, így Szundi első állítása hamis, a második igaz, vagyis Tudor volt. Ebből Szende első állítása igaz, a második hamis.

Feladat

Törpapának van két háromjegyű, kettes számrendszerbeli száma, legyenek ezek $A_3A_2A_1$ és $B_3B_2B_1$. Meg akarja határozni az $S_4S_3S_2S_1 = A_3A_2A_1 + B_3B_2B_1$ összeget, de sehogyan sem boldogul vele, ezért arra kéri Okoskát, segítsen neki meghatározni, az összeg egyes számjegyei mikor lesznek egyesek az összeadandók számjegyeinek függvényében. Például S_1 pontosan akkor lesz 1, ha A_1 és B_1 közül pontosan az egyik 1, a másik 0. Segíts Okoskának!

Megoldás

Ld. a Boole algebrai bevezető után.

Na de mi lenne, ha több és/vagy bonyolultabb feltételünk lenne, esetleg még több szereplőnk is? Ezek a módszerek túl intuitívak, elvégre többnyire az egyenleteket sem megérzések alapján oldjuk meg, kell egy általánosabb módszer. Ez nekünk a Boole algebra lesz.

Egy kis elmélet

Miről szól?

Logikai kifejezések elemzéséhez, átalakításához ad módszereket.

Miért Boole?

George Boole angol matematikus a logikai algebra (tiszteletére Boole algebrának hívjuk) teremtette meg.

Miért algebra?

Mert a "hagyományos" algebrához hasonlóan épül fel, ahhoz hasonlóan kezeli a logikai változókat és a kifejezéseket.

Pontosan mi is a Boole algebra?

Boole algebra: $\mathcal{B} = \{B, +, \cdot, \}$ azaz Boole-halmaz, logikai VAGY, logikai ÉS, valamint NEGÁCIÓ

Boole-halmaz: $B = \{0, 1, \alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$ a logikai konstansok és ismeretlenek halmaza

Kétfajta érték létezik: 0 és 1 (létezik többértékű algebra is, de azzal nem foglalkozunk).

És végül a válasz a kérdésre: a Boole algebra adja meg a Boole halmazon elvégezhető műveleteket **axiómákkal és definíciókkal**.

Axiómák, definíciók

Kommutativitás:	
A1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$	A2. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Disztributivitás:	
A3. $\alpha + (\beta \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)$	A4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$
Műveletek konstansokkal	
A5. $\alpha + 0 = \alpha$	A6. $\alpha \cdot 1 = \alpha$

Az inverz elem ($\overline{\alpha}$) definíciója:

Létezik minden α-hoz egyértelműen $\overline{\alpha}$, melyre:

1. $\alpha \cdot \overline{\alpha} = 0$ és

2. $\alpha + \overline{\alpha} = 1$

teljesül.

A fentiekből minden Boole algebrai azonosság ellentmondásmentesen levezethető.

Dualitás elve: A + és · műveletek illetve a 0 és 1 konstansok felcserélésével a Boole algebrai azonosságok igazak maradnak.

Pl.: A3→A4, A5→A6

A Boole algebra fontos tulajdonságai

T1. $\alpha + \alpha = \alpha$	T2. $\alpha \cdot \alpha = \alpha$
T3. $\alpha + 1 = 1$	T4. $\alpha \cdot 0 = 0$
Elnyelés:	
T5. $\alpha + \alpha \cdot \beta = \alpha$	T6. $\alpha \cdot (\alpha + \beta) = \alpha$
T7. $\overline{0} = 1$	T8. $\overline{1} = 0$
T9. $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$	
Asszociativitás:	
T10. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	T11. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
De' Morgan azonosságok:	
T12. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$	$\overline{\sum \alpha_i} = \prod \overline{\alpha_i}$
T13. $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$	$\overline{\prod \alpha_i} = \sum \overline{\alpha_i}$

Példák

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1. $Y1 = \overline{A} + A \cdot B$

2. $Y2 = \overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C} + (\overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C)$

Megoldások:

1. A4 és a negáció definíciója alapján:

$Y1 = \overline{A} + A \cdot B = (\overline{A} + A) \cdot (\overline{A} + B) = 1 \cdot (\overline{A} + B) = \overline{A} + B$

$X = \overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C}$ helyettesítéssel, elnyelés miatt, majd az előző példa alapján:

$Y2 = X + X \cdot (\overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) = X = \overline{A} + A \cdot B \cdot \overline{C} = \overline{A} + A \cdot (B \cdot \overline{C}) = (\overline{A} + A) \cdot (\overline{A} + B \cdot \overline{C}) = 1 \cdot (\overline{A} + B \cdot \overline{C}) = \overline{A} + B \cdot \overline{C}$

Térjünk vissza a szöveges feladatainkhoz!

1.

Amiket tudunk:

(1) Ha az Apa úszik, akkor a Mama és Fiuk is megy.	$A \cdot M \cdot F + \overline{A}$	=	1
(2) Ha a Fiú úszik, akkor nővére, L1 is.	$L1 + \overline{F}$	=	1
(3) L2 lány pontosan akkor úszik, ha a Mama is.	$M \cdot L2 + \overline{M} \cdot \overline{L2}$	=	1
(4) Minden reggel úszik valamelyik szülő.	$A + M$	=	1
(5) Vasárnap reggel csak az egyik lány úszott.	$L1 \cdot \overline{L2} + \overline{L1} \cdot L2$	=	1

Igaz állítások logikai szorzata is igaz. Szorozzuk össze ezeket az állításokat úgy, hogy minél több tag kiessen!

(6):	(1)·(4)	$(AMF + \overline{A})(A + M) = AMF + AMF + \overline{A}A + \overline{A}M = AMF + \overline{A}M$
(7):	(6)·(3)	$(AMF + \overline{A}M)(ML2 + \overline{ML2}) = \cdots = AMFL2 + \overline{A}ML2$
(8):	(7)·(5)	$(AMFL2 + \overline{A}ML2)(L1\overline{L2} + \overline{L1}L2) = \cdots = AMFL2\overline{L1} + \overline{A}ML2\overline{L1}$
(9):	(8)···(2)	$(AMFL2\overline{L1} + \overline{A}ML2\overline{L1})(FL1 + \overline{F}) = \cdots = \overline{A}ML2\overline{L1F}$

Vagyis Mama és a második lány úsztak.

2.

Hasonlóan felírva a törpék állításait (belevéve, hogy pontosan az egyik igaz):

Tudor: Nem Szundi volt. Én voltam. $\overline{SZU} \cdot \overline{T} + SZU \cdot T$

Morgó: Nem én voltam. Nem Hapci volt. $\overline{M} \cdot H + M \cdot \overline{H}$

Vidor: Tudor volt. Nem Morgó volt. $T \cdot M + \overline{T} \cdot \overline{M}$

Tudor és Vidor állításai között szerepel 1-1 olyan tag, amelyek szerint két tettes is van, ezek nyilván nem teljesülhetnek, azaz nem Szundi, nem Tudor és nem is Morgó tette. Ezt Morgó állításaival összevetve kiderül, hogy Hapci volt.

3.

Az előzőhöz hasonlóan:

Kuka: Nem én voltam. Nem Szende és nem is Tudor volt. $\overline{K}(SZE + T) + K\overline{SZET}$

Szundi: Én voltam. Tudor vagy Vidor volt. $SZU\overline{TV} + \overline{SZU}(T + V)$

Szende: Hapci vagy Tudor tette. Szundi második állítása hamis. $(H + T)(T + V) + \overline{HTV}$

Hapci: Nem én voltam. Kuka volt. $HK + \overline{HK}$

Bontsunk ki minden zárójelet és tüntessük el azokat a tagokat, amikben két változó is ponáltan szerepel! Így a következőkre jutunk:

(1) $\overline{K}SZE + \overline{K}T + K\overline{SZET}$

(2) $\overline{SZU}T + \overline{SZU}V + SZU\overline{TV}$

(3) $T + \overline{HTV}$

(4) $\overline{HK}$

Ezután a következők szerint járunk el:

$$\begin{array}{lll}
(5) & (1)\cdot(4) & (\overline{K}SZE + \overline{K}T + K\overline{SZET})(\overline{HK}) = \cdots = \overline{HK}SZE + \overline{HK}T \\
(6) & (5)\cdot(2) & (\overline{HK}SZE + \overline{HK}T)(\overline{SZU}T + \overline{SZU}V + SZU\overline{TV}) = \cdots = \overline{HKSZU}T \\
(7) & (6)\cdot(3) & (\overline{HKSZU}T)(T + \overline{HTV}) = \cdots = \overline{HKSZU}T
\end{array}$$

Vagyis Tudor a bűnös.

4.

Az összeadást ugyanúgy kell itt kezelni, ahogy az általános iskolában tanultuk a kézzel való összeadásnál. De ehhez be kell vezetni egy új fogalmat, mégpedig az átvitelt (**carry**): ez a „maradék”, amit hozzá kell adnunk a következő jegyekhez, ha az előző két számjegynál 9-nél (ez esetben 1-nél) nagyobb eredmény jött ki.

Mivel az első jegyeknél még nincs átvitel, ezért

$C_1 = 0$, $\forall i > 0$-ra $C_i + 1 = A_iB_i + A_iC_i + B_iC_i = A_iB_i + (A_i + B_i)C_i$, mert akkor van átvitel, ha legalább 2 egyes volt

$S_i = A_i \oplus B_i \oplus C_i$, ugyanis pontosan akkor lesz az összeg egy jegye 1, ha páratlan darab 1-es volt A_i, B_i és C_i között.

A következő táblázat tartalmazza 1-től 4-ig a C_i-ket:

i	C_i
1	0
2	A_1B_1
3	$A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1$
4	$A_3B_3 + (A_3 + B_3)(A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1)$

Ennek megfelelően az összeg egyes számjegyei:

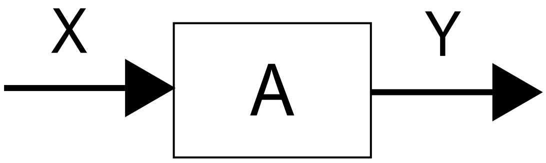
i	S_i
1	$A_1 \oplus B_1$
2	$A_2 \oplus B_2 \oplus A_1B_1$
3	$A_3 \oplus B_3 \oplus (A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1)$
4	$A_3B_3 + (A_3 + B_3)(A_2B_2 + (A_2 + B_2)A_1B_1)$

2. foglalkozás

Eddig csak és kizárólag a matematikai háttérrel foglalkoztunk, most elmozdululnk egy kicsit gyakorlatiasabb irányba, az elmélet gyakorlati felhasználása felé.

Digitális automata

Leggyakrabban a digitálisan működő eszközök tervezéséhez használjuk a Boole algebrát. A digitális automata vázlatrajza:



X: $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ bemeneti logikai változók

Y: $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ kimeneti logikai változók

X*, Y*: bemeneti (kimeneti) sorozat, a bemeneti (kimeneti) változók időben egymást követő értékei.

A digitális automata az X*→Y* leképezést állítja elő.

Sorrendi automata

$Y^t = g(X^t, Q^t)$, azaz a t időpillanatban a kimenet értéke függ az aktuális bemenettől és a belső állapottól.

$Q^{t+1} = f(X^t, Q^t)$, vagyis a következő belső állapot függ az aktuális bemenettől és belső állapottól.

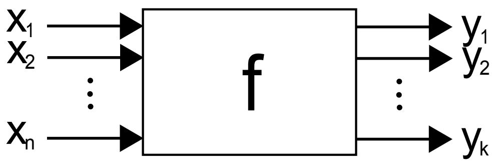
A kimenet a bemenetet ért változások sorrendjétől is függ.

Ezzel az automata fajtával nem foglalkozunk.

Kombinációs automata

$Y^t = g(X^t)$, azaz a t időpillanatban a kimenet értéke csak az aktuális bemenettől függ. A továbbiakban a kombinációs automatákat **logikai függvényeknek** fogjuk hívni.

Az általános, n bementű, k kimenetű logikai függvény:



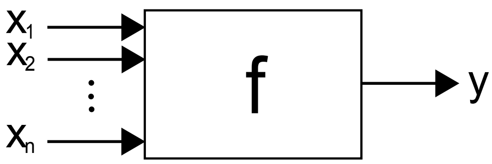
$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\vdots$

$y_k = f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Ez tulajdonképpen megegyezik k db n bemenetű, egy kimenetű logikai fügvénnyel:



Ezen okból a továbbiakban csak az egy kimenetű függvényekkel foglalkozunk.

Logikai függvények

A logikai függvények megadhatók:

- táblázatos formában, azaz **igazságtáblával**
- **általános Boole algebrai kifejezésként** – erről már volt szó
- **normál (kanonikus) alakok formájában** (diszjunktív, konjunktív normál alak, ez részhalmaza az előzőnek)
- **kapcsolási rajzzal**

Igazságtábla

Egy egyszerű táblázat, ahol minden bemenethez megadjuk a kimenetet.

Például a logikai VAGY igazságtáblája:

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Feladat

Számoljuk ki, hogy hány különböző egy kimenetű, n változós logikai függvény létezik!

Megoldás

n változó esetén az igazságtáblának 2^n sora van, mindegyik sorba 2 féle érték kerülhet, így a 2^n sort összesen 2^{2^n} különböző módon lehet kitölteni. Mindegyik sor pontosan egy logikai függvénynek felel meg, és minden logikai függvényt biztosan felsoroltunk, így ez a megoldás.

Feladat

Mi a helyzet k kimenet esetén?

Megoldás

Emlékezzünk vissza, a többkimenetű függvényeinket több egykimenetű függvénnyel modelleztük. Egy kimenet 2^{2^n} féle lehet, k kimenetűből ezek szerint $(2^{2^n})^k = 2^{k \cdot 2^n}$ különböző létezik.

A kétváltozós logikai függvények

Feladat

Írjuk fel egy igazságtáblába az összes kétváltozós, egykimenetű függvényt! Az előzőek alapján ebből $2^{2^n} = 16$ lesz.

Megoldás

A	B	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Feladat

Határozzuk meg ezek közül azokat, amiket már ismerünk!

Megoldás

A	B	0	$A \cdot B$	f_3	A	f_5	B	$A \oplus B$	$A + B$	$\overline{A+B}$	$A \odot B$	$\overline{B}$	f_{12}	$\overline{A}$	f_{14}	$\overline{A \cdot B}$	1
Név			AND					EXOR	OR	NOR	EKV	INV		INV		NAND	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Feladat

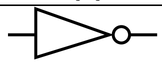
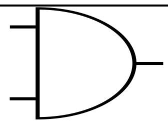
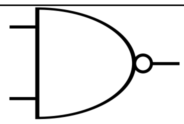
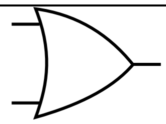
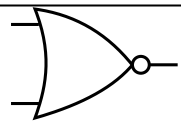
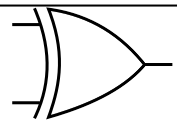
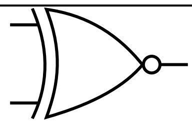
Azt láttuk, hogy az INVERTÁLÁS, az ÉS illetve a VAGY műveletek segítségével tetszőleges logikai függvényt ki tudunk fejezni, de vajon létezik-e olyan kétváltozós függvény, ami képes **egyedül** ugyanerre? Ha igen, adjuk is meg az összeset. Segítség: elég a fenti három műveletet kifejezni. Fejezzük is ki!

Megoldás

A NAND és a NOR tudja ezeket.

Kapcsolási rajz

A gyakran használt áramköri elemeket az általuk megvalósított függvény nevével a következő táblázat tartalmazza:

Függvény	Rajzjel
INVERTER	
AND	
NAND	
OR	
NOR	
EXOR	
EKVIVALENCIA	

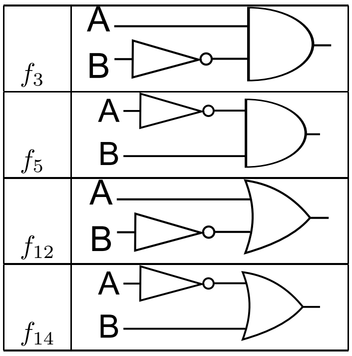
Egy logika függvény kapcsolási rajzát legegyszerűbben a Boole algebrai kifejezéséből tudunk felépíteni, annak hierarchiáját követve. Az alapszabály az, hogy a fenti kapuk kétbemenetű függvényekként működnek, vagyis a kimenetükön a bemenetek „leképezettje” jelenik meg.

Példa

Vegyük a kétváltozós függvényeink közül a „névteleneket”, f_3-at, f_5-öt, $f_{12} - őt$ és f_{14}-et! Ezek egy lehetséges algebrai alakja:

$f_3 = A\overline{B}$, $f_5 = \overline{A}B$, $f_{12} = A + \overline{B}$ és $f_{14} = \overline{A} + B$

Ebből pofonegyszerűen képezhetők a kapcsolási rajzok, melyek a következők lesznek:



További függvénymegadási módok

Diszjunktív normál alak

A diszjunktív normál alak nagyon egyszerűen kiolvasható az igazságtáblából.

Felépítése

Minden egyes tagban az összes bemeneti változó szerepel pontosan egyszer ponálva vagy negálva, ezek pedig logikai ÉS kapcsolatban vannak egymással, az egyes tagokat logikai VAGY kapcsolatba kell hozni.

A kiolvasása a következő módon történik: kiválasztjuk az igazságtábla minden egyes olyan sorát, amiben 1-es szerepel, ezeknek a soroknak fog megfelelni egy-egy tag. Ezután egy sorból úgy képezünk egy tagot, hogy az a változó, aminek az értéke 1 ponálva, aminek 0 pedig negálva jelenik meg. A módszerből következik, hogy minden függvénynek pontosan egy DNA-ja van.

Ezeket az 1-eseket reprezentáló tagokat **mintermeknek** hívjuk. Ha nem szerepel egy tagban minden változó, de mégis pontosan írja le az igazságtábla egy „területét”, akkor egyszerűen csak **termről** beszélünk, ez még fontos lesz később.

Példa

Az igazságtáblánkból f_{12} DNA-ja a következőképp néz ki:

$\overline{AB} + A\overline{B} + AB$

Konjunktív normál alak

A KNA nagyon hasonló a DNA-hoz, ezért csak a különbségeket mondom el. A KNA esetén a tagokon belül VAGY, a tagok között pedig ÉS kapcsolat van.

Igazságtáblából a 0-t tartalmazó sorokat kell kiválasztani, a változók ponálását és negálását fordítva kell elvégezni, azaz 0 esetén ponálunk és 1 esetén negálunk, a tagok neve pedig **maxterm** lesz.

Példa

f_5 KNA-ja:

$(A + B) \cdot (\overline{A} + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$

Vegyük észre, hogy $f_5 = \overline{f_{12}}$! Ha f_5 KNA-ját invertáljuk és alkalmazzuk a De’ Morgan azonosságokat, akkor pontosan f_{12} DNA-ját kapjuk!

Azt is megfigyelhetjük, hogy ha f_5 KNA-jánál kibontjuk a zárójeleket és leegyszerűsítjük a kifejezést, akkor a DNA-ját kapjuk meg.

Feladat

Írjuk fel a következő négyváltozós függvények normál alakjait!

A	B	C	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

Megoldás

$$g_1 = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC = (A + B + C) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C)$$

$$g_2 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC = (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C)$$

Vegyük észre, hogy g_3 pontosan g_1 negáltja, vagyis nem kell más tennünk, mint a tanultak alapján alkalmazni a De' Morgan azonosságokat, így automatikusan megkapjuk a kért alakokat:

$$g_3 = (A + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

Karnaugh tábla

A Karnaugh tábla egy speciális igazságtábla, ami megkönnyíti, meggyorsítja a függvények **képletének** kiolvasását és optimalizálását. A lényege, hogy egyrészt kihasználjuk mindkét dimenziót a tábla kiterjedéséhez, másrészt úgy változnak az egyes változók értékei a sorok illetve oszlopok mentén, hogy könnyű, egyértelmű legyen a termek kiolvasása.

Egy 3 változós Karnaugh tábla a következő képpen néz ki:

A\BC	00	01	11	10
0				
1				

A kiolvasás a következő módon történik: keresünk minél nagyobb olyan „egybefüggő” „cellatömböket”, amikben egyes van, a következő kitételekkel:

- a „tömbök” minden oldalhossza kettőhatvány
- a változóknak létezik olyan részhalmaza, aminek az értéke a tömb minden elemére állandó
- ezen változók megfelelő értékekhez a „tömbön” kívül nem tartozik más cella.

Az ilyen „tömbök” neve term lesz.

Megjegyzés: az átláthatóság kedvéért sokszor csak az 1-eseket jelöljük, az üresen hagyott mezők nullának értendők.

Példa

A következő Karnaugh táblában 2 term található,

A\BC	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1	1		

ezek pedig: $\overline{B}$ és $\overline{AC}$.

Feladat

Rajzoljuk fel az előző feladatban szereplő g_1, g_2 és g_3 Karnaugh tábláját, és írjuk fel az azokban szereplő termeket!

Megoldás

Mivel megállapítottuk, hogy $g_3 = \overline{g_1}$, ezért elég g_1-et felrajzolni:

A\BC	00	01	11	10
0				1
1	1	1	1	

A termek: $A\overline{B}$, AC és $\overline{A}B\overline{C}$.

Aki szemfüles két dolgot vehet észre. Az első, hogy ha A-t megnegálom, akkor pontosan $\overline{g_1}$-et, azaz g_3-at kapom, vagyis elég a termekben A és $\overline{A}$ szerepét felcserélni, hogy megkapjuk a helyes termeket.

A másik, hogy a jobb oldalon van egy sakttábla szerű mintázat. Ezt sokkal takarékosabban le lehet fedni EKVIVALENCIA vagy EXOR műveletekkel, mégpedig ez esetben a következő képlettel: $B(A \odot C)$. Így a minimális formula: $A\overline{B} + B(A \odot C)$.

g_2 táblája:

A\BC	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	

Az előzőhöz hasonlóan 3 termünk van: $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ és ABC, de a jobb oldali sakktáblát megint egyszerűbben le lehet írni. A legegyszerűbb alak: $\overline{BC} + B(A \odot C)$

Összefüggések

Kommutativitás:	A1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$	A2. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Disztributivitás:	A3. $\alpha + (\beta \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)$	A4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$
Műveletek konstansokkal:	A5. $\alpha + 0 = \alpha$	A6. $\alpha \cdot 1 = \alpha$

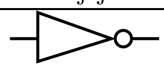
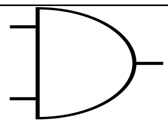
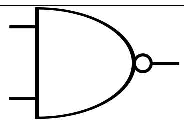
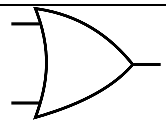
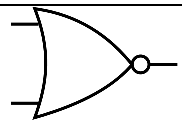
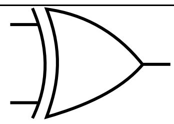
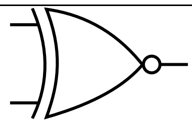
Az **inverz elem** ($\overline{\alpha}$) definíciója:

$\forall\alpha$-hoz $\exists\overline{\alpha}$, melyre $\alpha \cdot \overline{\alpha} = 0$ és $\alpha + \overline{\alpha} = 1$.

Dualitás elve: A + és $\cdot$ műveletek illetve a 0 és 1 konstansok felcserélésével a Boole algebrai azonosságok igazak maradnak.

Fontosabb összefüggések

	T1. $\alpha + \alpha = \alpha$	T2. $\alpha \cdot \alpha = \alpha$
	T3. $\alpha + 1 = 1$	T4. $\alpha \cdot 0 = 0$
Elnyelés:	T5. $\alpha + \alpha \cdot \beta = \alpha$	T6. $\alpha \cdot (\alpha + \beta) = \alpha$
	T7. $\overline{0} = 1$	T8. $\overline{1} = 0$
	T9. $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$	
Asszociativitás:	T10. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	T11. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
De' Morgan azonosságok:	T12. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$	$\overline{\sum \alpha_i} = \prod \overline{\alpha_i}$
	T13. $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$	$\overline{\prod \alpha_i} = \sum \overline{\alpha_i}$

Függvény	Rajzjel
INVERTER	
AND	
NAND	
OR	
NOR	
EXOR	
EKVIVALENCIA	

Gyürke Csaba: Csoportok bevezetése

Először egy szabályos háromszög egybevágósági transzformációival dolgozunk. Legyenek A, B, C a háromszög csúcsai pozitív körüljárás szerinti sorrendben. Legyen id az identikus leképezés, f_1 a 120 fokos forgatás, f_2 a 240 fokos forgatás, és jelölje t_1, t_2 és t_3 a három tükrözést, úgy, hogy t_1 tükörtengelye az A csúcson, t_2 tükörtengelye a B csúcson, t_3 tükörtengelye a C csúcson haladjon át.

Mivel a háromszöghöz csak ez a hat egybevágósági transzformáció tartozik, és egybevágósági transzformációk egymás utáni elvégezése is egybevágósági transzformációnak felel meg, ezért bevezethetünk egy kétváltozós műveletet az $\{id, f_1, f_2, f_3, t_1, t_2, t_3\}$ halmazon, olyan módon, hogy két transzformációhoz hozzárendeljük az egymás utáni elvégzésüket helyettesítő transzformációt. Ezt a $\cdot$ műveletjellel jelöljük.

Készítsünk művelettáblázatot! A legfelső sorba és a baloldali oszlopba írjuk be a transzformációk jeleit, az egyes cellákba pedig a művelet eredményét, ha az első változót a baloldali oszlop, a második változót pedig a legfelső sor mutatja. Azaz, a sor mutatja az először végrehajtandó transzformációt, az oszlop a másodikként végrehajtandót, a cellába pedig a kettő egymás utáni elvégzését helyettesítő transzformáció kerül.

$\cdot$	id	f_1	f_2	t_1	t_2	t_3
id	id	f_1	f_2	t_1	t_2	t_3
f_1	f_1	f_2	id	t_2	t_3	t_1
f_2	f_2	id	f_1	t_3	t_1	t_2
t_1	t_1	t_3	t_2	id	f_2	f_1
t_2	t_2	t_1	t_3	f_1	id	f_2
t_3	t_3	t_2	t_1	f_2	f_1	id

1.) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a szabályos háromszög egybevágósági transzformációinak halmazán!

$f_2 \cdot x = t_3$

$x \cdot t_2 = f_1$

$(f_1 \cdot x) \cdot t_1 = id$

$(f_2 \cdot x) \cdot (t_1 \cdot t_2) = f_1$

$t_1 \cdot (x \cdot t_3) = f_2$

$f_2 \cdot (f_1 \cdot x) = f_1$

A feladatok megoldásánál használjuk fel a művelettáblázatot! Például az első egyenletet úgy oldhatjuk meg, hogy az f_2 transzformáció sorában megkeressük, hogy hol áll t_3, és a megfelelő oszlop adja meg a megoldást, ami t_1. A második egyenlet megoldásához a t_2 oszlopában kell f_1-et megkeresnünk. Hasonlóan járhatunk el a zárójeles feladatoknál is. Itt először megkeressük, hogy a zárójelbe tett kifejezés melyik transzformáció lehet, majd abból az előbb használt módszerrel kikeressük a megoldást. Azaz például a harmadik egyenlet megoldásához először t_1 oszlopában megkeressük id-t, ami t_1 sorában van, tehát azt kaptuk, hogy $f_1 \cdot x = t_1$, ezt pedig az első két egyenlethez használt módszerrel tudjuk megoldani.

Olyan egyenletekkel is foglalkozhatunk, ahol az ismeretlen négyzetre van emelve. Az x^2 lehetséges értékeit a művelettáblázat főátlójából tudjuk kiolvasni. Így az alábbi egyenleteket is megoldhatjuk. Itt már előfordulhat, hogy több megoldás is van, vagy esetleg nincs megoldás.

2.) Oldjuk meg az egyenleteket a szabályos háromszög egybevágósági transzformációinak halmazán!

$x^2 \cdot t_1 = t_2$

$t_3 \cdot x^2 = t_3$

$t_2 \cdot x^2 = f_1$

Az $id \cdot x = x$ és az $x \cdot id = x$ egyenletek minden x egybevágósági transzformációra teljesülnek, ezért azt mondjuk, hogy id a $\cdot$ művelet egységeleme.

A $t_1 \cdot x = id$ és $x \cdot t_1 = id$ egyenleteknek csak a t_1 tükrözés a megoldásuk, azt mondjuk, hogy t_1 inverze t_1. Hasonlóan, az $f_2 \cdot f_1 = f_1 \cdot f_2 = id$ egyenlőségek is fennállnak, ezért f_1 inverze f_2-nek. A szabályos háromszög egybevágósági transzformációinak halmazán minden transzformációnak pontosan egy inverze van. Az inverzelemet a továbbiakban a kitevőbe írt $^{-1}$ jelöli.

3) Számítsuk ki az alábbi transzformációszorzatokat!

$(t_1 \cdot f_2) \cdot t_3 =$

$t_1 \cdot (f_2 \cdot t_3) =$

$(f_1 \cdot id) \cdot f_2 =$

$f_1 \cdot (id \cdot f_2) =$

$(t_1 \cdot f_2) \cdot t_1 =$

$t_1 \cdot (f_2 \cdot t_1) =$

Azt tapasztaljuk, hogy az első kettő műveletsor eredménye megegyezik, hasonlóan a harmadik és negyedik illetve az ötödik és hatodik is. A $\cdot$ művelet nem csak ezekben az esetekben, hanem mindig átzárójelezhető, azaz a művelet asszociatív.

Tehát az $\{id, f_1, f_2, t_1, t_2, t_3\}$ halmazon értelmezett $\cdot$ műveletre igaz, hogy van egységeleme, minden elemnek van inverze, és a művelet asszociatív. Ha ez a három tulajdonság egy halmazra és azon értelmezett műveletére teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a halmaz a művelettel csoportot alkot.

Most nézzük az $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz összes részhalmazát! Vizsgáljuk meg, hogy vajon U összes részhalmaza az unió művelettel csoportot alkot-e? Egységelem van, az üreshalmaz. Viszont nincs minden elemnek inverze, például $\{1; 4\} \cup A = \emptyset$ nem teljesül egyetlen A halmazra sem.

Viszont U összes részhalmaza a szimmetrikus különbség művelettel csoportot alkot. Az egységelem az üreshalmaz, és minden A halmaznak az inverze önmaga.

Ebben a csoportban is megoldhatunk egyenleteket.

4.) Legyen $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ alaphalmaz.

a) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$\{1; 2; 3\} \Delta X = \{1; 5\}$

$(\{2; 4\} \Delta X) \Delta \{3, 5\} = \{1\}$

$((\{1; 4\} \Delta X) \Delta \{1; 3; 4\}) \Delta X = \{3\}$

b) Oldjuk meg az egyenletrendszert!

$$\begin{cases} X\Delta\{1;4\} = Y\Delta\{2;4\} \\ X\Delta\{2;5\} = (X\Delta Y)\Delta\{3;5\} \end{cases}$$

A permutációk is csoportot alkotnak a permutációszorzásra nézve. Permutációkra többféle írásmód is van, mi az úgynevezett kétsoros írásmódot használjuk. Tehát például az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ azt jelenti, hogy az 1-es szám elkerül a 3-as helyre, a 2-es a 2-es helyen marad, stb.

5.) Számítsuk ki az alábbi permutáció-szorzatokat!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

A háromszög egybevágósági transzformációi közül kiválogatjuk azokat, amelyek megtartják a háromszög irányítását, ezeket mozgásoknak nevezzük. Három ilyen transzformáció van: id, f_1 és f_2. Mivel a $\cdot$ művelet asszociatív a háromszög egybevágósági transzformációinak halmazán, így biztosan asszociatív annak részhalmazán, a mozgások halmazán is. Leellenőrizhető, hogy a szabályos háromszög mozgásai is csoportot alkotnak a $\cdot$ művelettel. Ezért azt mondjuk, hogy $\{id, f_1, f_2\}$ részcsoportja az $\{id, f_1, f_2, t_1, t_2, t_3\}$ csoportnak.

Ahhoz, hogy leellenőrizzük, hogy egy részhalmaz részcsoport-e, arra van szükség, hogy megnézzük, hogy az egységelem benne van-e a részhalmazban, minden részhalmazbeli elem inverze benne van-e részhalmazban, illetve azt, hogy a művelet nem vezet ki a részhalmazból. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a részhalmazhoz elkészített művelettáblázat celláiban csak olyan elemek szerepelnek, amelyek az adott részhalmazból valóak.

6.) a) Az alábbiak közül melyek részcsoportjai a szabályos háromszög egybevágósági transzformációi által alkotott csoportnak?

$\{id, t_1, t_2\}$

$\{id, t_2\}$

$\{id, f_2, t_1\}$

$\{id\}$

b) Legyen U az $\{1;2;3;4;5\}$ halmaz részhalmazainak halmaza, vegyük rajta a szimmetrikus differencia műveletét! Ebben a csoportban az alábbiak közül melyek alkotnak részcsoportot?

$A = \{\ \{1;2\}\}$

$B = \{\ \emptyset; \{5\}\}$

$C = \{\ \emptyset; \{4\}; \{5\}\}$

$D = \{\ \emptyset; \{1;2;3\}; \{1;2\}; \{1\}\}$

$E = \{\ \emptyset; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}\}$

$F = \{\ \emptyset; \{1;2;3;4;5\}\}$

$G = \{\ \emptyset; \{1;2\}; \{2;4;5\}; \{1;2;3;4;5\}\}$

$H = \{\ \emptyset; \{1\}; \{2;3\}; \{4;5\}; \{1;2;3;4;5\}\}$

c) Az $\{1;2;3\}$ halmaz permutáció-csoportjának részcsoportja-e az alábbi részhalmaz?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Az $\{1;2;3;4\}$ halmaz permutáció-csoportjának részcsoportja-e az alábbi részhalmaz?

$$\left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

Visszatérünk a permutációk szorzásához.

7.) a) Adjuk meg az alábbi hatványokat!

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&2&3&4&6\end{pmatrix}^2=$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&2&3&4&6\end{pmatrix}^3=$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&2&3&4&6\end{pmatrix}^7=$$

Megfigyelhetjük, hogy a fenti permutáció második és hetedik hatványa megegyezik. Ez annak a következménye, hogy a permutáció ötödik hatványa az identikus leképezés.

A következő feladatoknál is érdemes keresni olyan hatványt, ami az identikus leképezést adja. Ezt legegyszerűbben úgy találhatjuk meg, hogy a permutációt mint ciklusokat képzeljük el, és az egyes ciklusok hosszainak legkisebb közös többszöröse megfelelő ilyen kitevő lesz.

7.) b) Adjuk meg az alábbi hatványokat!

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&7&8&4&1&6&5\end{pmatrix}^{1433}=$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&8&3&6&4&7&5\end{pmatrix}^{2011}=$$

Legyen g egy csoport adott eleme. A legkisebb olyan pozitív egész kitevőt, amelyre g–t emelve az egységelemet kapjuk, a g elem rendjének nevezzük. Például a szabályos háromszög egybevágósági transzformációinak csoportjában az id rendje 1, a tükrözések rendje 2, a forgatások rendje pedig 3.

8.) Mennyi a rendje az alábbi permutációknak?

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$c=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&6&1&2&7&3&5\end{pmatrix}$$

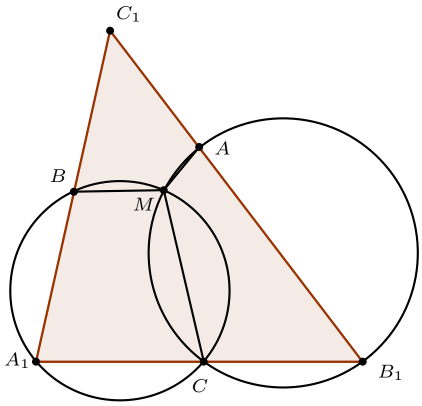
$$b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&3&1&2&7&5&6\end{pmatrix}$$

Hubert Györgyné: Napóleon-háromszög

Matematika tábor 2011. október
(Kétszer másfél órás foglalkozás a 9. 10. osztályos csoportnak)

A továbbiakban mindig hegyesszögű háromszögekkel dolgozunk. (Az egyes problémák megoldásánál a diszkusszió kérdése egy egészen más irányba vinne minket.)

1. Tekintsünk először egy közismert feladatot. Az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalain vegyük fel az A, B, C pontokat. Állítás: Az A_1CB, B_1AC, C_1BA háromszögek körülírt körei egy ponton mennek át.

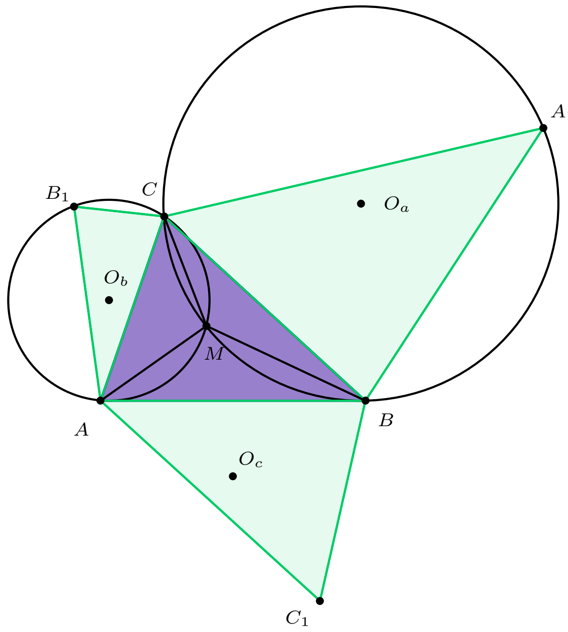


1. ábra

Bizonyítása közismert: M legyen az A_1CB és a B_1AC háromszögek körülírt körének metszéspontja. Ekkor a $BMA\sphericalangle = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$, tehát a C_1BMA négyszög húrnégyszög, azaz az M pont rajta van a C_1BA háromszög körülírt körén.

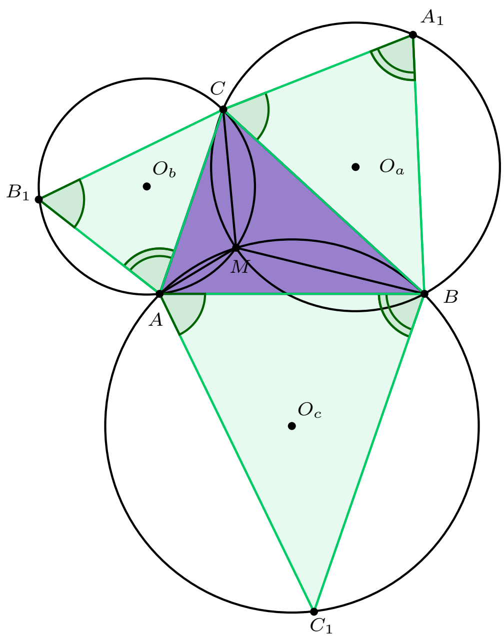
Nézzük meg, hogy a bizonyítás során mit is használtunk fel a feltételek közül! Csak annyit, hogy az A_1, B_1, C_1 csúcsoknál lévő szögek összege 180°.

2. Tehát bizonyítottuk azt a tételt is, hogy: Ha az ABC háromszög oldalai „fölé” (kifelé) olyan háromszögeket rajzolunk, melyekben az „új” csúcsoknál lévő szögek összege 180°, akkor az új háromszögek körülírt körei egy ponton mennek át.



2. ábra

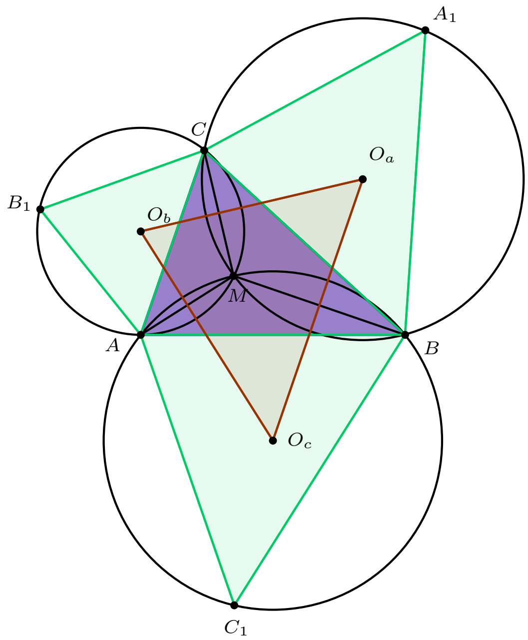
3. Az előző tétel egyenes következménye, hogy ha az ABC háromszög oldalai fölé (persze a 2. feladatnak megfelelően) egymáshoz hasonló háromszögeket írunk, akkor e három háromszög három körülírt köre is egy ponton megy keresztül.



3. ábra

(Persze, a megfelelő hasonló háromszögeket nem csupán egyféleképpen helyezhetjük el.)

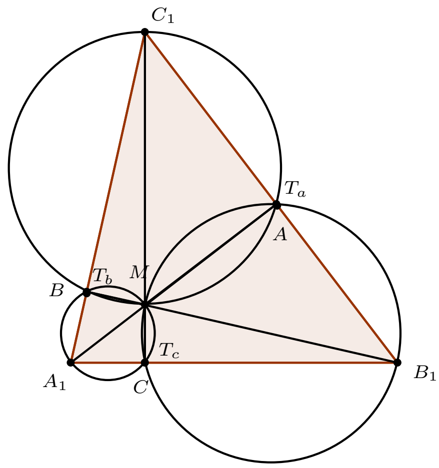
4. Érdemes megnézni a 3. ábra 3 db körének középpontja alkotta háromszöget. Ez a háromszög hasonló a „rárajzolt” háromszögekhez.



4. ábra

(Bizonyításához elegendő a merőleges-szárú szögekre koncentrálnunk.)

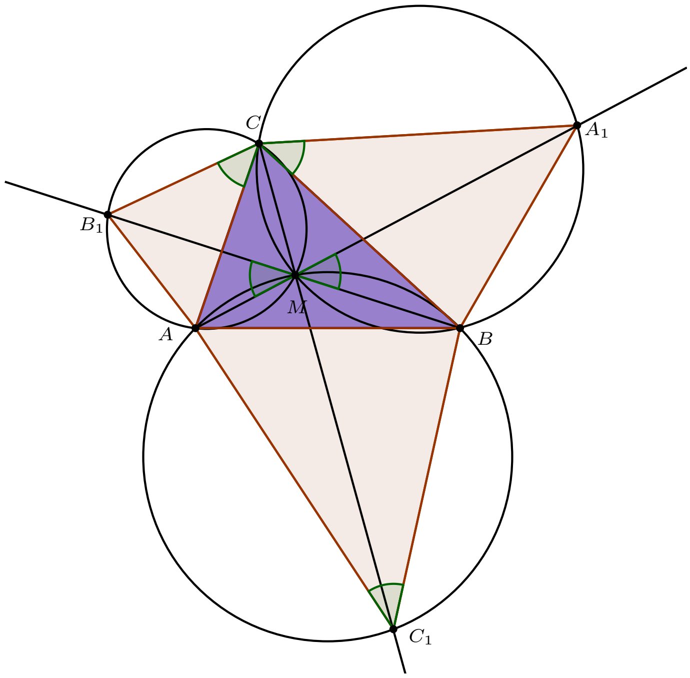
5. Térjünk vissza az 1. feladathoz. Ennek speciális esete az, ha az oldalakon felvett pontok a magasság-talppontok. Közismert, hogy ekkor a körök közös pontja az eredeti háromszög magasságpontja.



5. ábra

Fogalmazhatjuk ezt úgy is, hogy ebben az esetben az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek is átmennek a három kör közös pontján. Találunk-e ilyen esetet a 2. problémánál?

6. Konkrét $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ szögek esetében szerkesszünk ilyen A_1, B_1, C_1 pontokat! A megfelelő körívekből az AM, BM, CM egyenesek metszik ki a megfelelő A_1, B_1, C_1 pontokat.

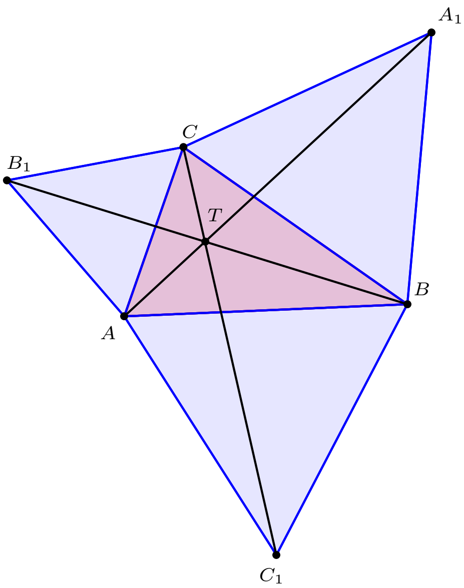


6. ábra

Milyenek a rárajzolt háromszögek? Egymáshoz hasonlóak! De nem akárhogy helyezkednek el: az eredeti háromszög egy csúcsához azonos szögek illeszkednek. (Bizonyítása kerületi szögek ill. húrnégyszögek tételéből azonnal jön.) (A tétel megfordítása is igaz.)

Ellenőrzésként térjünk vissza az 5. ábrához, tételünk ott is él (még jó!). (Persze ezt régen is tudtuk: a talpponti háromszög szögfelezői az eredeti háromszög magasságvonalai.)

7. Az ABC (hegyesszögű) háromszög oldalai fölé („kifelé”) írjunk szabályos háromszögeket!



7. ábra

Mit tudunk már?

a. $k(ABC_1)$, $k(BCA_1)$ és $k(CAB_1)$ egy ponton (T) megy át. (Hiszen $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 3\cdot 60° = 180°$, ld. 2. feladat.)

b. Az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek illeszkednek T-re (, hiszen a rárajzolt háromszögek „megfelelően" hasonlóak egymáshoz – ld. a 6. feladatot).

De itt még más is igaz:

c. Állítás: $AA_1 = BB_1 = CC_1$

(Bizonyítás: Az AA_1 szakasz C körül 60°-kal elforgatva átmegy a B_1B szakaszba, majd a B_1B szakasz A körül 60°-kal elforgatva átmegy CC_1 szakaszba.)

d. Az előző bizonyításból következik az is, hogy az AA_1, B_1B egyenesek 60°-os szöget zárnak be, azaz a T belső pontból a háromszög oldalai 120°-os szögben látszanak.

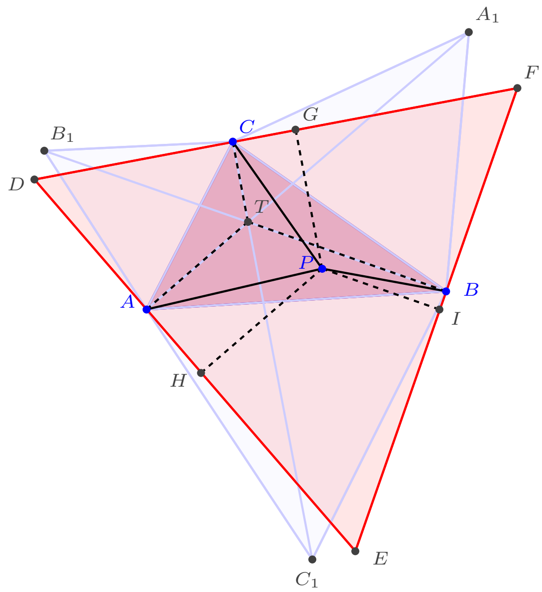
(*Ha nem tudnánk már, hogy a 3 db egyenes és a 3 db kör egy ponton megy át, itt bizonyítani tudnánk e tételeket – T-t definiálhatnánk AA_1 és BB_1 metszéspontjaként, majd forgatás..., húrnégyszögek...*)

8. Milyen tulajdonságú még ez a (belső) T pont?

   Állítás: A „T" az ABC háromszög azon belső pontja, melyre igaz, hogy a csúcsoktól mért távolságainak összege minimális (s ez az összeg megegyezik az $AA_1 = BB_1 = CC_1$ szakaszok hosszával).

   (A bizonyításban felhasználjuk azt a közismert tételt, hogy a szabályos háromszög bármely belső pontjának az oldalaktól mért távolságainak összege konstans, éppen a szabályos háromszög magassága.)

   Bizonyítás:



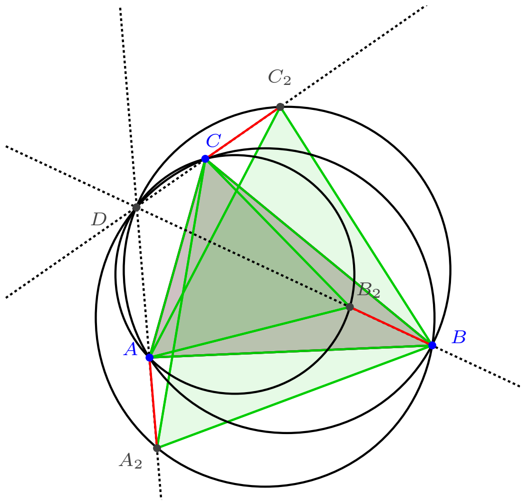
8. ábra

Belefoglaljuk az ABC háromszöget egy DEF szabályos háromszögbe úgy, hogy DE merőleges legyen AT-re, EF BT-re, FD pedig CT-re.

Legyen P az ABC háromszög tetszőleges belső pontja. Ekkor $PG+PH+PI = TA+TB+TC$, de ha P nem azonos T-vel, akkor $PA > PH$, $PB > PI$, $PC > PG$ egyenlőtlenségek közül legalább az egyik fennáll... Tehát az ABC háromszög belsejében a T pont csúcsoktól mért távolságösszege a legkisebb.

Mekkora ez a távolságösszeg? A felhasznált tételünk szerint megegyezik a DEF szabályos háromszög magasságával, de ez megegyezik pl. a CC_1 szakasz hosszával (, hiszen EC_1 párhuzamos DF-fel, mert DEC_1 szög is 60°-os...).

9. Ha az ABC háromszög oldalaira „befelé” rajzoljuk a szabályos háromszögeket, az előző tulajdonságokból jó néhány megmarad.

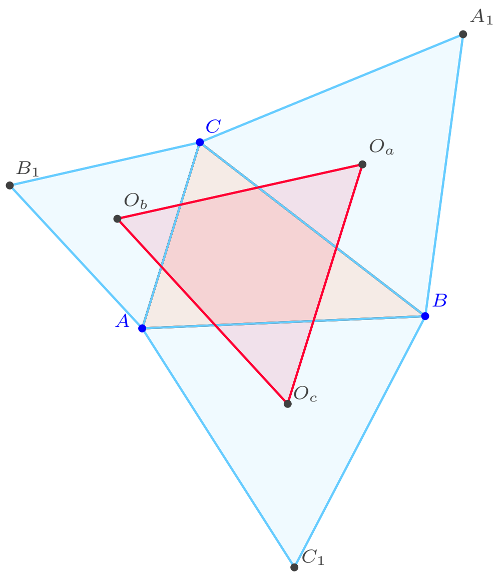


9. ábra

A három szabályos háromszög körülírt köre egy ponton (D) megy át. Az AA_2, BB_2, CC_2 egyenesek is átmennek D-n. Az AA_2, BB_2, CC_2 szakaszok egyenlőek.

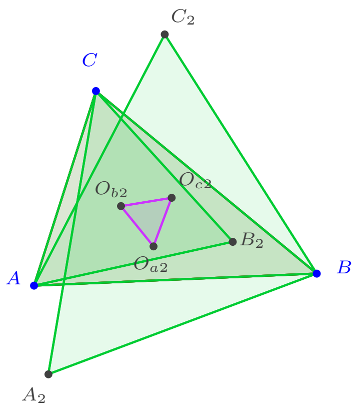
Mindezen tulajdonságok az előzőekhez hasonlóan bizonyíthatóak.

10. Térjünk vissza a „kifele” rajzolt szabályos háromszögekhez. Ezen háromszögek középpontjai is szabályos háromszöget alkotnak. (A továbbiakban: „külső” Napóleon-féle háromszög). Ezen állítás egyenesen következik a 4. tételünkből.



10a. ábra

Ugyanígy a „befelé” írt szabályos háromszögek középpontjai is szabályos háromszöget alkotnak. (A továbbiakban: „belső” Napóleon-féle háromszög).



10b. ábra

11. Állítás: A külső és belső Napóleon-féle háromszögek területének különbsége megegyezik az eredeti háromszög területével.

    A bizonyításban felhasználjuk a koszinusz-tételt, a szabályos háromszög területképletét, az addíciós tételt és a trigonometrikus területformulát.

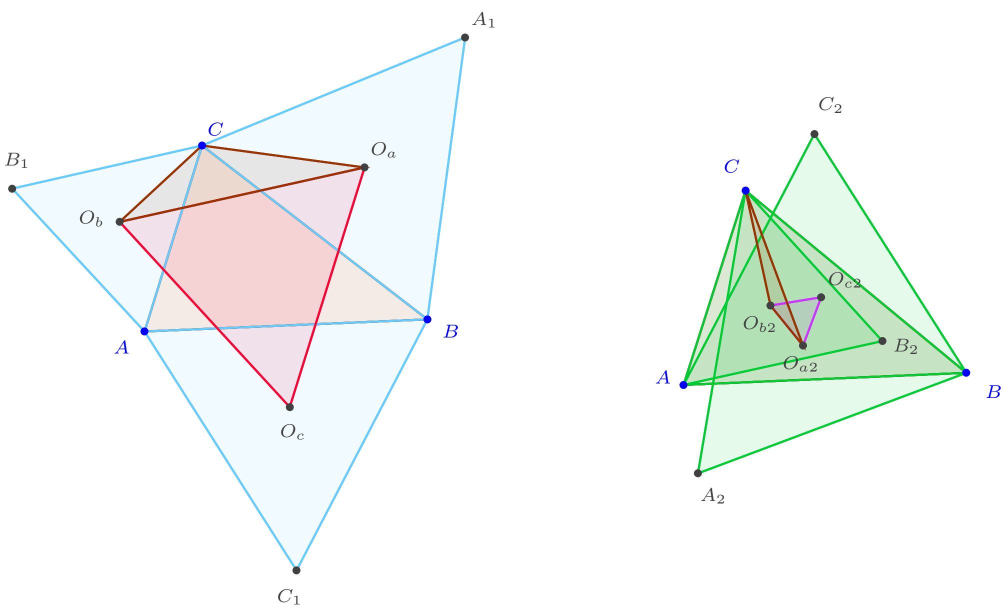
    Először koszinusz-tétellel kiszámoljuk a „Napóleon-féle” háromszögek oldalait.

    A 11a. ábra O_bCO_a háromszögében az $O_aCO_b\sphericalangle = \gamma + 60°$, így:

    $O_aO_b^2 = 1/3 \cdot (b^2 + a^2 - 2ab \cdot cos(\gamma + 60°))$.

    A 11b. ábra $O_{b2}CO_{a2}$ háromszögében $O_{b2}CO_{a2}\sphericalangle = \gamma - 60°$, így:

    $O_{a2}O_{b2}^2 = 1/3 \cdot (b^2 + a^2 - 2ab \cdot cos(\gamma - 60°))$.

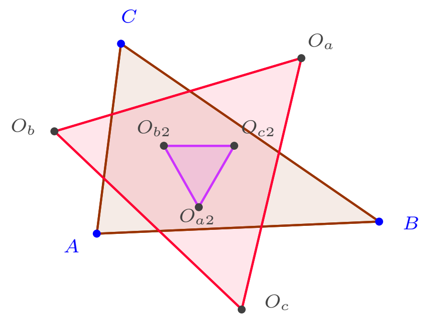


11a-b. ábra

A két szabályos háromszög területének különbsége:

$T_k - T_b = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (O_aO_b^2 - O_{a2}O_{b2}^2) = \cdots = 1/2 \cdot ab \cdot \sin\gamma = T(ABC)$.

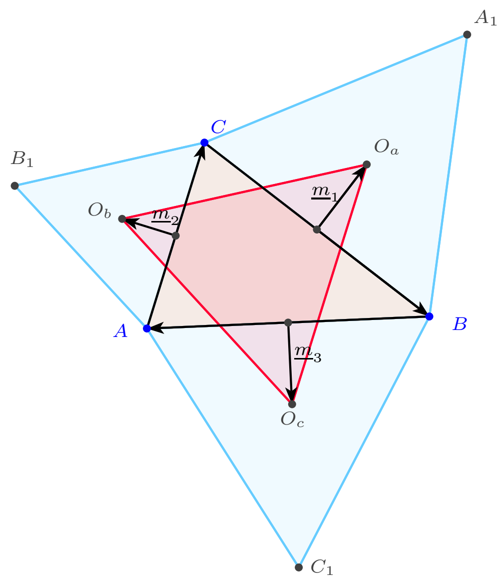
12. Állítás: Az ABC háromszöghöz tartozó két Napóleon-féle háromszög középpontja megegyezik.



12a. ábra

(Sőt, azonos az eredeti háromszög súlypontjával. – Ez a megjegyzés persze már segít a bizonyításban is.)

Bizonyítás:



12b. ábra

Az eredeti háromszög csúcsait az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ helyvektorokkal jellemezzük, majd felírjuk a rárajzolt szabályos háromszögek középpontjainak helyvektorait, s ezekből meghatározzuk a Napóleon-féle háromszög(ek) középpontját.

$\underline{O_a} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) + \underline{m}_1$

$\underline{O_b} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{a} + \underline{c}) + \underline{m}_2$

$\underline{O_c} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{m}_3$, ebből:

$\underline{S_o} = 1/3 \cdot (\underline{O_a} + \underline{O_b} + \underline{O_c}) = 1/3 \cdot (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3) = \underline{s}(ABC) + 1/3 \cdot (\underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3)$,

De: $\underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 = \underline{0}$, mert:

$\underline{m}_1 = (\underline{b} - \underline{c})' \cdot \lambda$,

$\underline{m}_2 = (\underline{c} - \underline{a})' \cdot \lambda$,

$\underline{m}_3 = (\underline{a} - \underline{b})' \cdot \lambda$,

ahol $(\underline{b} - \underline{c})'$, $(\underline{c} - \underline{a})'$, $(\underline{a} - \underline{b})'$ az eredeti háromszög $+90°$-os elforgatottjának oldalvektorai, λ pedig (jelenleg) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Így: $\underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 = \lambda \cdot [(\underline{b} - \underline{c})' + (\underline{c} - \underline{a})' + (\underline{a} - \underline{b})'] = \underline{0}$, azaz: $\underline{S_o} = \underline{s}(ABC)$.

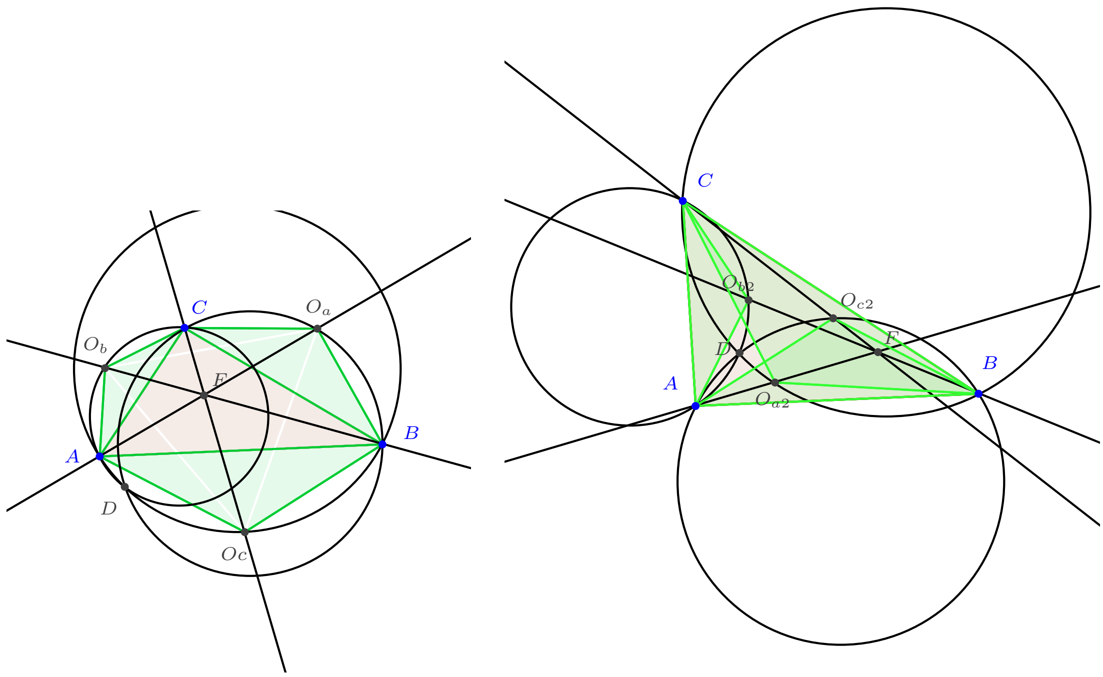
(A „belső” „Napóleon-féle” háromszög esetében ugyanígy számolunk, csak $-\underline{m}_1, -\underline{m}_2, -\underline{m}_3$-mal.)

13. Végignézve az előző tétel bizonyítását, kiderül, hogy nem csupán azt láttuk be, hogy a két „Napóleon-féle” háromszög középpontja azonos az eredeti háromszög súlypontjával, hanem azt is beláttuk, hogy:

    Ha egy (hegyesszögű) háromszög oldalai fölé kifelé (befelé) egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögeket írunk, akkor az „új csúcsok” alkotta háromszög súlypontja megegyezik az eredeti háromszög súlypontjával (a bizonyításban csupán λ értéke változik meg).

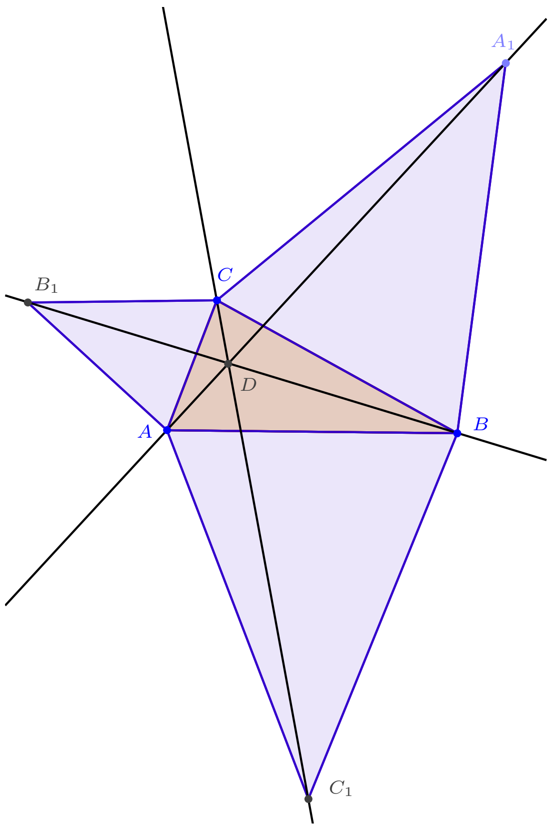
14. Érdemes megnézni, hogy az előző tételekből átvihető-e valamelyik az előbb említett, rárajzolt, egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögekre.

    [Ha az egyenlő szárú háromszögek szárszöge 120°, akkor igaz, hogy e háromszögek köréírt körei is egy ponton mennek át. (Ennek bizonyításában már nem segít a 2. feladat, hisz $3 \cdot 120° \neq 180°$, de húrnégyszögekkel ez is belátható. Vagy egyszerűbben: ezek a körök azonosak a 9. ill. 7/a feladat köreivel. . .) – ezzel a problémával a táborban nem foglalkoztunk.]



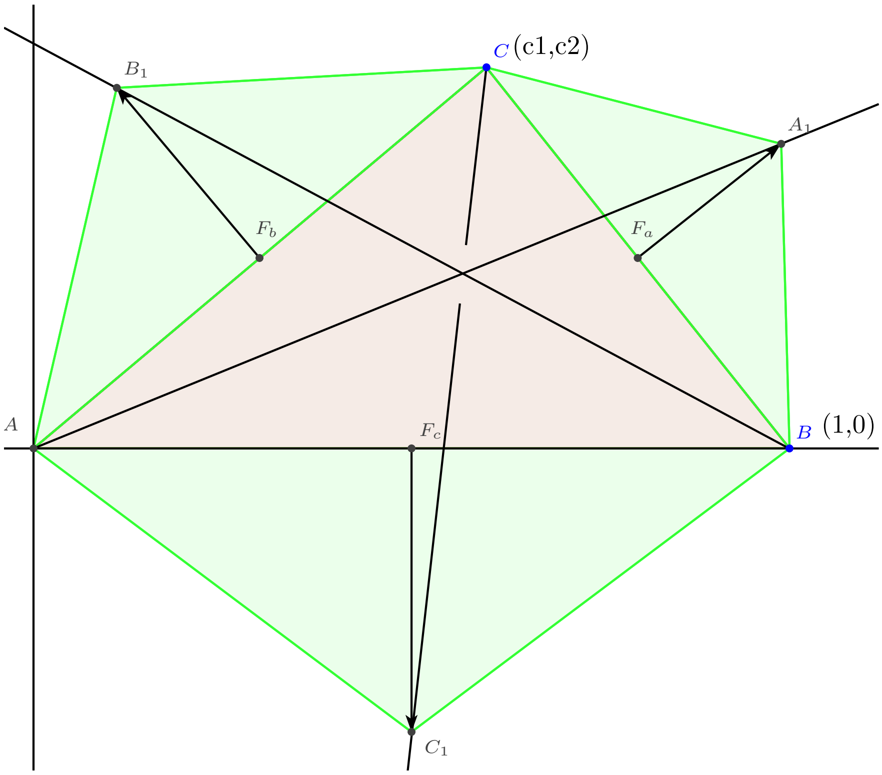
14a-b. ábra

[De:] Állítás: Ha a hegyesszögű háromszög oldalaira kifelé (befelé) egymáshoz hasonló egyenlő szárú háromszögeket rajzolunk, akkor az új csúcsokat az eredeti háromszög szemköztes csúcsával összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül.



14c. ábra

Bizonyítása koordináta-geometriai úton egészen egyszerű, ha alkalmasan választjuk meg a koordináta-rendszert. (ld. a 14d. ábrát):



14d. ábra

Megadjuk az A_1, B_1, C_1 pontok koordinátáit, majd felírjuk a három kérdéses egyenes egyenletét, s megmutatjuk, hogy egy ponton mennek át.

$\underline{a}_1 = \underline{f_a} + \lambda \cdot \underline{n_a}$,

ahol $\underline{f_a} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\underline{n_a}$ a $\overrightarrow{CB}$ vektor $+90°$-os elforgatottja.

Koordinátákkal:

$\underline{f_a}(\frac{1}{2} \cdot \{c_1 + 1\};\ \frac{1}{2} \cdot c_2)$, $\underline{n_a}(c_2; 1 - c_1)$ így:

$\underline{a}_1(\frac{1}{2} \cdot \{c_1 + 1\} + \lambda c_2;\ \frac{1}{2} \cdot c_2 + \lambda \cdot \{1 - c_1\})$.

Ebből az AA_1 egyenes egyenlete:

$(-2\lambda c_1 + c_2 + 2\lambda) \cdot x + (-c_1 - 2\lambda c_2 - 1) \cdot y = 0$

...

Hasonlóképpen a másik két egyenes egyenlete:

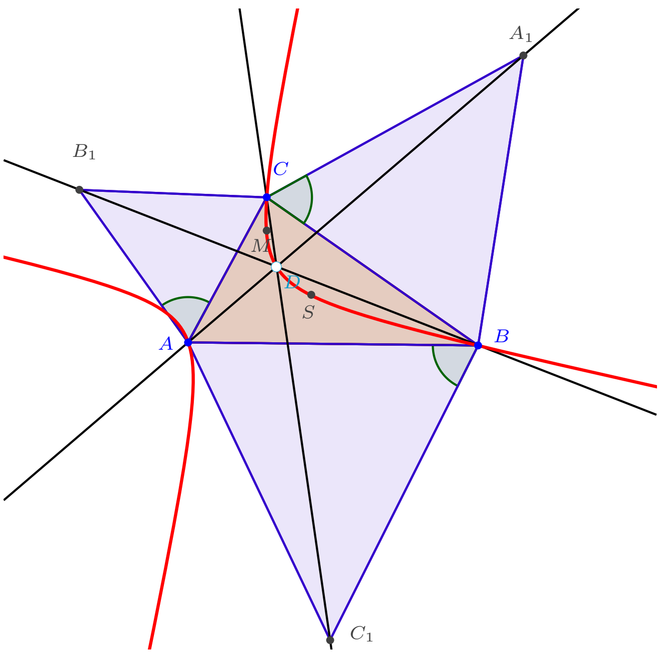
$(-c_2 - 2\lambda c_1) \cdot x + (c_1 - 2\lambda c_2 - 2) \cdot y = -c_2 - 2\lambda c_1$

$(2c_2 + 2\lambda) \cdot x + (1 - 2c_1) \cdot y = c_2 + 2\lambda c_1$.

E két egyenlet összege pont az AA_1 egyenes egyenlete, ami azt bizonyítja, hogy mindhárman egy ponton mennek át.

(Ha λ pozitív, akkor a kifelé, ha negatív, akkor a befelé rajzolt háromszögekről van szó.)

15. Végül csak rajzon megnéztük, hogy az előbbi egyenesek közös pontja illeszkedik az eredeti háromszög csúcsai, magasság- és súlypontja által meghatározott derékszögű hiperbolára.



15. ábra

(Ezt a tételt nekem nem sikerült csak középiskolás ismeretekkel belátnom.)

E foglalkozás témájához Csiba Péternek a Polygon 2002. júniusi ill. 2007. júliusi számában megjelent cikke adta az ötletet.

Mahler Attila: Stabil házasságok

Stabil házasságok

Probléma megismerése (10 perc)

- Házasság: pontosan 1 férfi és pontosan 1 nő között lehet. ☺
- Stabil: ne legyen olyan pár (*blokkoló pár*), akik jobban szeretik egymást, mint a házastársukat.
- Ennek eldöntéséhez kell **preferencia sorrend:** mindenki felállít egy sorrendet, kezdve azzal, akivel a legszívesebben házasodna, egészen az utolsóig.
  – Mindenkinek szerepelnie kell a preferencia sorrendben.
  – Nincs „döntetlen”, azaz bármelyik két jelölt közül el kell tudni döntenem, hogy melyiküket szeretném inkább.
- Azt szeretnénk, hogy mindenkinek legyen házastársa ⇒ feltesszük, hogy ugyanannyi férfi és nő van.

<u>Megjegyzés:</u>

- Azért kell mindenkit felvenni a listára, és azért tesszük fel, hogy ugyanannyi fiú és lány van, hogy mindenkinek legyen házastársa. Ezektől eltekintve is beszélhetünk stabil házasságrendszerről.

Játék (10+10+5 perc)

- Nemek és nevek sorsolása
- Felállnak 1-1 sorba a fiúk és a „lányok”, mindenki megnézi a lehetséges házastársait, majd összeállítja a saját preferencia sorrendjét
- **Feladat:** Stabil házasságrendszert kell létrehozni
- Ellenőrzés
  - Mindig létezik?
  - Ha sikerült ⇒ Van-e más?
  - Mi volt az algoritmus?

Algoritmusötletek kipróbálása (10+10+5 perc)

- Jó-e az alábbi algoritmus? Tipp, indoklás, észrevétel? Játsszuk le!

A fiúk körbekérdezik a lányokat, hogy hányadik helyen vannak a preferencia sorrendjükben, majd mindenkinél hozzáadják azt a számot, hogy az adott lány hányadik helyen áll náluk. Ez lesz a „pár összege”. Ezt követően kiválasztják ezek közül a legkisebbet, és azzal a lánnyal összeházasodnak.

– Megbeszélés: Nem jó! Hibák:

  ▷ Minimum nem feltétlen egyértelmű. (Sőt előfordulhat, hogy minden „pár összege” ugyanannyi.) $\Rightarrow$ Lehetőség: választunk egyet közülük.
  ▷ Több fiú kéri meg ugyananannak a lánynak a kezét. („Összeg” $= 1+3 = 2+2$.) $\Rightarrow$ Lehetőség: ilyenkor a lány a legszimpatikusabbat választja.
  ▷ Ilyenkor biztosan lefut az algoritmus és mindenkinek lesz házastársa, de nem feltétlen lesz stabil a rendszer! (<u>Gondolkodnivaló:</u> konstruáljunk ellenpéldát!)

- Jó-e az alábbi algoritmus? Tipp, indoklás, észrevétel? Játsszuk le!

Minden fiú megkéri a preferencia sorrendjében első helyen álló lány kezét. A lány azt válaszolja, hogy „talán”. Majd, ha új ajánlatot kap a lány, akkor a szimpatikusabbnak mondja, hogy talán, a másiknak nemet mond. Ekkor a visszautasított fiú megy és megkéri a sorrendjében következő lány kezét. Amikor már nincs visszautasított fiú, akkor a „talán”-ból „igen” lesz.

  – Megbeszélés: Jó!

<u>Bizonyítás:</u>

1. Véget ér az algoritmus és mindenkinek lesz házastársa.
   - Ha egy fiú megkéri egy lány kezét, akkor onnantól annak a lánynak mindig lesz vőlegénye.
   - Ha egy fiúnak nincs menyasszonya, akkor kell lennie olyan lánynak is, akinek nincs vőlegénye. Akkor viszont még nem kérték meg a kezét, tehát a fiú sorrendjében még hátra van. A fiú megkéri a kezét, a lány azt mondja, hogy talán, hiszen nincs konkurencia.
   - Azaz minden fiúnak lesz felesége, így véget ér az algoritmus.
2. Stabil házasságrendszert kapunk.
   - Tegyük fel, hogy nem stabil $\Rightarrow$ létezik X fiú és Y lány, akik miatt nem stabil
   - X jobban kedveli Y-t, mint a feleségét, akkor korábban megkérte a kezét. Ha Y dobta, akkor jobbat talált. Tehát nem létezhet ilyen X-Y pár.

<u>Észrevételek:</u>

– Fiúknál romlik, lányoknál javul a pár „minősége” $\Rightarrow$ Akkor kinek jó? Mi történik, ha fordítva csináljuk?

– **Fiú-optimális megoldás:** nincs olyan fiú, aki bármelyik másik stabil párosításban jobban járna.

– Fiúknak a lehető legjobb, ugyanakkor a lányoknak a lehető legrosszabb!

– Általános esetben is **mindig létezik** stabil házasságrendszer.

– Ha ugyanannyi fiú és lány van, és mindenki mindenkit felvesz a preferencia sorrendjébe, akkor **mindenkinek lesz házastársa**.

Miért nem működik a valóságban? (5 perc)

- Nincs preferencia sorrend
  – Nem ismerjük egyszerre az összes „jelöltet”, folyamatosan új embereket ismerünk meg
  – Ha lenne is, időről-időre változna a sorrend
  – Lehet „döntetlen”
- Házasság nem (mindenhol) bijektív kapcsolat férfi és nő között
  – Nem bijektív: poligámia (többnejűség) (pl.: Arab országok)
  – Nem férfi és nő között: homoszexuálisok (pl.: Hollandia)

Poligámia = Egyetemi felvételi rendszer (25 perc)

Kérdések

- Át tudjuk ültetni ezt a felvételire?
- Diák optimális vagy iskola optimális legyen?

Gale-Shapley algoritmus

- Annyit kell módosítani a második algoritmuson, hogy mivel az egyetemek („lányok”) nem egy, hanem több hallgatót („férjet”) vesznek fel, így a keretszámnak megfelelő jelentkezőnek mondanak talánt, és azoknak mondanak végleg nemet, akik kicsúsztak a keretszámból.
- A fenti algoritmust 1962-ben publikálta Gale és Shapley az egyetemi felvételi ponthatárok meghatározására. Az alábbiakat igazolják:
  - **Stabil:** Ha egy diákot visszautasítottak, akkor jobb került a helyére, tehát az eljárás végén is visszautasítanák.
  - **Diák optimális:** Nincs olyan diák, aki bármely másik stabil párosítás esetén jobban járna.
- További két fontos tulajdonsága:
  - **Gyors futásidő:** A körök száma nem lehet több a jelentkezők számánál, hiszen egy helyre nem kerülhet kétszer ugyanaz a jelentkezés. Jó megvalósítással lineáris az algoritmus futásideje.
  - **Stratégiailag biztos:** Nem manipulálható, azaz senki sem járhat jobban, ha nem a valós preferencia sorrendjében jelentkezik a különböző helyekre.

A magyar felvételi rendszerek

- (A 2000-ben bevezetett) középiskolai felvételi az pontosan így működik.
- (A 2007-ben megújított) felsőoktatási program összetettebb, tekintettel az alábbi sajátosságaira:
  - **Holtversenyek:** Az egyenlő elbírálás elve alapján, az azonos pontszámú jelentkezőket vagy mind fel kell venni, vagy mind el kell utasítani. (Amerikában van, hogy sorsolással döntenek ilyen esetekben.) Az 500 pontos felvételi rendszerben a holtversenyek szerepe lecsökkent.
  - **Minimális keretszámok:** A felső korlátok mellett az is meg van határozva, hogy minimum hány felvett hallgató esetén indul el a szak. Ekkor nem igazságos, ha található egy bezárt szak annyi jelentkezővel, amennyi a szak alsó korlátja úgy, hogy egyik jelentkező se lett felvéve jobb helyre. Ilyenkor létrejöhet olyan szituáció, amelyre nincs igazságos megoldás!

    Példa: A jazz tanszéken egyetlen szaxofonost és pontosan két gitárost keresnek. A két jelentkező Ádám és Béla. Ádám mindkét hangszeren ügyesebb, mint Béla, és a gitár előbb szerepel a jelentkezési lapján, mint a szaxofon. Ezzel szemben Béla a szaxofont kedveli jobban. Mivel csak két jelentkező van, az egyik szak biztosan nem indul. Ha a gitár szakra vennék fel mindkettőjüket, akkor az nem lenne igazságos, mert Béla jobban szeretne szaxofonozni, és oda nem vettek fel senkit. Az sem lenne stabil megoldás, ha a szaxofon szak indulna el Béla felvételével, mert Ádám jobb zenész. Végül, ha Ádámot vennék fel a szaxofon szakra, akkor szintén igazságtalan megoldás születne, hiszen a gitár szak elindításának ebben a helyzetben mindketten jobban örülnének.
  - **Közös korlátok:** Van, hogy két szak közös korláttal rendelkezik. Például 100-100 hely van az orvosnak és a fogorvosoknak, de összesen legfeljebb 150 hallgatót vehet fel erre a két szakra.
- Ezek miatt jelentősen bonyolultabb a ponthatár húzás, nincs polinomiális futásidejű algoritmus, amely ezeket is figyelembe venné.
- Ezért *heurisztikák* szerepelnek a felvételi ponthatárokat számító algoritmusban! Azaz olyan ötleteket használ, amely a tapasztalat szerint gyors és jó megoldást szolgáltat, ám ez nem bizonyított.

- A minimális keretszámoknál alkalmazott heurisztika: Lefut a Gale-Shapley algoritmus a felső keretszámok figyelembevételével, majd ha van olyan szak, amely nem érte el az alsó korlátját, akkor az a szak kerül bezárásra, ahol a felvettek számának és a minimális létszámnak az aránya legkisebb. Hiszen itt a legkisebb az esély arra, hogy a szak a későbbiekben feltöltődjön. A szak bezárása után újra lefut az algoritmus, és így tovább, amíg szükséges.

Felhasznált irodalom

[1] Dr. Biró Péter - Dr. Fleiner Tamás: A magyarországi felvételi besoroló algoritmusok rövid bemutatása (Felvi.hu, 2008, letöltve: 2011. szeptember 24.)

[2] Dr. Grolmusz Vince: Diszkrét matematika blokk előadás (ELTE-TTK, 2010)

[3] Jankó Zsuzsanna: Stabil párosítások és egyetemi felvételi ponthatárok (ELTE-TTK Matematika BSc szakdolgozat, 2009)

Nemecskó István: Geometriai módszerek algebrai egyenlőtlenségeknél

1. Milyen valós x valós szám esetén lesz legkisebb a $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-20x+101}$ kifejezés értéke?

   (ADMV H/III/ 2010/11 1. forduló)

   Mo.:

   Alakítsuk át a kifejezést: $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-20x+101}=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(10-x^2)+1}$

   Helyezzük el a koordináta-rendszerben a $A(0;3), B(10;1)$ és $P(x;0)$ pontokat.

   Ekkor $PA=\sqrt{x^2+9}$ és $PB=\sqrt{(10-x^2)+1}$

   Tehát a $PA+PB$ szakaszok összegének a minimumát keressük. Nyilván valóan a minimum csak a $0<x<10$ intervallumból kerülhet ki. Tükrözzük a B pontot az x tengelyre, legyen a tükörkép B'. A $PA+PB=PA+PB'$ akkor minimális, ha a P pont az AB' szakasz és az x tengely metszéspontjában van. AZ AB' egyenes egyenlete $y=-\frac{2}{5}x+3$. Metszéspont $P(\frac{15}{2};0)$.

   Tehát az eredeti kifejezés az $x=7,5$ esetén lesz minimális.

2. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget (a,b valós számok):

   $$8a+15b\leq 17\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

   Mo.1.: Ha $8a+15b<0$, akkor teljesül az egyenlőtlenség, különben emeljük négyzetre mindkét oldalt:

   $$8^2a^2+15^2b^2+2\cdot 8\cdot 15\cdot ab\leq 17^2\cdot(a^2+b^2)$$

   Nullára rendezve:

   $$0\leq 15^2a^2+8^2b^2-2\cdot 8\cdot 15\cdot ab=(15a-8b)^2$$

   És ez mindig teljesül.

   Mo.2.: Legyen $\underline{p}(8;15)$ és $\underline{q}(a;b)$. A skaláris szorzat tulajdonságából adódik, hogy

   $$8a+15b\leq\sqrt{8^2+15^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=17\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

   És ez a bizonyítandó állítás.

3. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget (a,b,c valós számok):

   $$3a+4b+12c\leq 13\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

   Mo.1.:

   Itt nem működik a négyzetre emelés. Legyen $\underline{p}(3;4;12)$ és $\underline{q}(a;b;c)$. A skaláris szorzat tulajdonságából adódik, hogy

   $$3a+4b+12c\leq\sqrt{3^2+4^2+12^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=13\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

   És ez a bizonyítandó állítás.

4. Legyenek a, b, c olyan valós számok, amelyekre $a+b+c=1$ és $a,b,c \geq -0{,}25$. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}.$$

NMMV 1994. 11. évfolyam

Mo.1.: Használjuk fel a számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq 3 \cdot \sqrt{\frac{4a+1+4b+1+4c+1}{3}}$$

A jobb oldalon a gyökjel alatt pontosan $\frac{7}{3}$ fog állni, hiszen $a+b+c=1$, ha a 3-at bevisszük a gyökjel alá, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq 3 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = \sqrt{21}$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Mo.2.: Legyen $\underline{a}(1;1;1)$ és $\underline{b}(\sqrt{4a+1};\sqrt{4b+1};\sqrt{4c+1})$

Vegyük a két vektor skaláris szorzatát

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4a+1+4b+1+4c+1} \cdot \cos(\varphi)$$

Mivel $\cos(\varphi) \leq 1$, ezért

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{4a+1+4b+1+4c+1} = \sqrt{21}$$

5. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{5\left(x^2+2yz\right)}+\sqrt{6\left(y^2+2zx\right)}+\sqrt{5\left(z^2+2xy\right)} = 4(x+y+z)!$$

NMMV 2003. 12. évfolyam

Mo.: Egyrészt az egyenlet bal oldala miatt $x+y+z \geq 0$, másrészt ez az oldal felírható az $\left(\sqrt{5};\sqrt{6};\sqrt{5}\right)$ és a $\left(\sqrt{x^2+2yx};\sqrt{y^2+2zx};\sqrt{z^2+2xy}\right)$ vektorok skaláris szorzataként. A jobb oldalon pedig ezen vektorok nagyságának szorzata áll. Ez pedig a feltételek miatt akkor és csak akkor állhat fenn, ha az egyik vektor a másik skalárszorosa, vagyis

$$\frac{x^2+2yz}{5} = \frac{y^2+2zx}{6} = \frac{z^2+2xy}{5}.$$

Ebből az egyenletrendszerből $x^2-z^2 = 2y(x-z)$ adódik, így vagy $x=z$, vagy $x+z=2y$ lehetséges.

Ha $x=z$, akkor $\frac{x^2+2yz}{5} = \frac{y^2+2x^2}{6}$ azaz $4x^2-12xy+5y^2=0$, ahonnan $y=\frac{2}{5}x$ vagy $y=2x$ adódik. Ezekből kapjuk a következő megoldásokat: $\left(a;\frac{2}{5}a;a\right)$ és $(a;2a;a)$, ahol a tetszőleges nemnegatív szám.

Ha $x+z=2y$, azaz $z=2y-x$, akkor visszahelyettesítve a következőkhöz jutunk: $\frac{x^2+2y(2y-x)}{5} = \frac{y^2+2x(2y-x)}{6}$, amelyből $16x^2-32xy+19y^2=0$ adódik. Ennek az egyenletnek csak az $x=y=0$ triviális megoldása van a valós számok körében, mert az egyenlet diszkriminánsa negatív: $D = 4(16^2-16\cdot 19) < 0$. Így ebben az esetben $z=0$, ekkor a megoldás tehát: $(0;0;0)$.

6. Bizonyítsuk be, hogy négy különböző, nemnegatív valós szám közül kiválasztható kettő (x és y), amelyekre

$$\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

NMMV 2010. 12. évfolyam

Mo.1.: Minden a valós számhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhető az $\underline{a}(1,a)$ vektor. Így az x-hez az $\underline{x}(1,x)$, az y-hoz pedig az $\underline{y}(1,y)$ vektorok rendelhetők.
Legyen a két vektor hajlásszöge α. Két vektor skaláris szorzatának segítségével felírható, hogy

$$\cos\alpha = \frac{\underline{x}\cdot\underline{y}}{|\underline{x}|\cdot|\underline{y}|} = \frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}.$$

Tehát a feladat állítása ekvivalens a $\cos\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenséggel, ahol α a két vektor hajlásszögének mértéke. Az $\underline{a}(1, a)$ „típusú” vektorok végpontjai az $x = 1$ egyenes I. síknegyedben lévő pontjai, valamint az abszcisszára eső pontja. Osszuk fel az I. síknegyedet 3 darab O középpontú, 30°-os szögtartományra. A skatulya-elv értelmében a négy vektorból legalább kettő ugyanabba a szögtartományba (vagy annak határvonalára) esik. Így a két vektor hajlásszögére igaz, hogy $\alpha \leq 30°$, azaz $\cos\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ugyanakkor az y tengelyre nem illeszkedhet a szerkesztett vektorok közül egyik sem, tehát nem lehetséges az, hogy a négy vektor közül bármely kettő szögének mértéke $\geq 30°$. Emiatt az egyenlőtlenség szigorú.

Mo.2.: Minden $x \geq 0$ valós szám esetén létezik $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ úgy, hogy $x = \operatorname{tg}\varphi$. Ugyanakkor, ha $x = \operatorname{tg}\varphi$ és $y = \operatorname{tg}\omega$, akkor

$$\frac{1 + xy}{\sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + y^2}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\omega}{\frac{1}{\cos\varphi}\frac{1}{\cos\omega}} = \cos|\varphi - \omega|.$$

Ha $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ és φ_4 a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum elemei, akkor létezik $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ úgy, hogy $\cos|\varphi_i - \varphi_j| > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ennek igazolása érdekében feltételezhetjük, hogy $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4$, tehát a $\varphi_{i+1} - \varphi_i$ különbségek közül a legkisebb biztosan kisebb, mint $\frac{\pi}{6}$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\cos \min_{1 \leq i \leq 3} |\varphi_{i+1} - \varphi_i| > \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség:

Adott $a_1, a_2; \ldots, a_n$ és $b_1; b_2; \ldots, b_n$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

Egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

Bizonyítás 1.:

Tekintsük a $\underline{p}(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ és a $\underline{q}(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ vektorokat és ezek skaláris szorzatát:

$$\underline{p} \cdot \underline{q} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \cdot \cos\phi$$

Melyből:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

következik. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\cos\phi = 1$, azaz $\phi = 0°$, tehát a két vektor azonos irányú, melyből következik, hogy $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Bizonyítás 2.: Tudjuk, hogy minden valós $a_1, a_2; \ldots a_n$ és $b_1; b_2; \ldots b_n$ és x számokra teljesül, hogy

$$(a_ix - b_i)^2 = a_i^2x^2 - 2a_ib_ix + b_i^2 \geq 0$$

Adjuk össze az egyenlőtlenségeket $i = 1, 2, \ldots, n$-re.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot x^2 - 2x(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq 0$$

teljesül minden valós x-re.

Ez csak úgy lehet ha a másodfokú polinom diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$4 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - 4 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \leq 0$$

Ebből a bizonyítandó állítás következik. Egyenlőség , akkor teljesül, ha $(a_ix - b_i)^2 = 0$, vagyis $a_ix - b_i = 0$.

7. Legyen $a_1, a_2; \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; c_1, c_2, \dots, c_n$ és $d_1, d_2, \dots, d_n$ négy pozitív valós számokból álló sorozat. Bizonyítsuk be, hogy igaz az

$$(a_1b_1c_1d_1+a_2b_2c_2d_2+\dots+a_nb_nc_nd_n)^4 \le (a_1^4+a_2^4+\dots+a_n^4)(b_1^4+b_2^4+\dots+b_n^4)(c_1^4+c_2^4+\dots+c_n^4)(d_1^4+d_2^4+\dots+c_n^4)$$

egyenlőtlenség.

Skljarszkij-Csencov-Jaglom

Mo.:

Használjuk kétszer egymás után a C-B-S egyenlőtlenséget. Először $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n; c_1d_1, c_2d_2, \dots c_nd_n$ számpárokra, majd $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2, b_1^2, b_2^2, \dots b_n^2; c_1^2, c_2^2, \dots c_n^2; d_1^2, d_2^2, \dots d_n^2$számokra.

$(a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_2 + \dots + a_nb_nc_nd_n)^4 \le (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + \dots + a_n^2b_n^2)(c_1^2d_1^2 + c_2^2d_2^2 + \dots + c_n^2d_n^2) \le$
$(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)(b_1^4 + b_2^4 + \dots + b_n^4)(c_1^4 + c_2^4 + \dots + c_n^4)(d_1^4 + d_2^4 + \dots + d_n^4).$

8. Az α, β, γ szögekről tudjuk, hogy $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \ge 2$. Igazoljuk, hogy $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \sqrt{5}$!

Szegedi, Radnóti

Mo.: Legyen $\underline{a}(\sin\alpha; \cos\alpha)$; $\underline{b}(\sin\beta; \cos\beta)$; $\underline{c}(\sin\gamma; \cos\gamma)$

Tudjuk, hogy $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1$, valamint

$|\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}|^2 = (\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2 \ge 4 + (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2$ a feltétel miatt.

De $|\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}| \le |\underline{a}| + |\underline{b}| + |\underline{c}| = 3$.

Összevetve az előzővel:

$$4 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 \le 9$$

melyből a bizonyítandó állítás következik.

9. Az a, b, c valós számok összege 7 és egyik sem kisebb, mint 1. Igazoljuk, hogy ekkor

$$2 \le \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \le 2\sqrt{3}$$

Szegedi, Radnóti

Mo.: Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x-1}$ függvényt

Legyen $A(a; \sqrt{a-1}), B(b; \sqrt{b-1}), C(c; \sqrt{c-1}), P(1; 0), Q(5; 2)$ ahol $1 \le a, b, c \le 5$.

A függvény konkáv így az ABC háromszög teljes egészében a PQ szakasz és a függvény grafikonja között van.

Nézzük az ABC háromszög súlypontját $S(\frac{7}{3}; \frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}}{3})$, mely a háromszög belsejében van.

Az $x = \frac{7}{3}$ egyenes metszéspontja a függvény grafikonjával $G(\frac{7}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3})$. Az egyenes és a PQ szakasz metszéspontja $F(\frac{7}{3}; \frac{2}{3})$. Az előbbiek miatt S ezen két pont közé esik, így

$$\frac{2}{3} \le \frac{\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}}{3} \le \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

.

Megjegyzés:

A táborban 90 perc alatt az 1-6. feladatot és a 9-est beszéltük meg.

Nemecskó István: Tangram

A 7-8-os foglalkozás első részében minden diák kapott 16 darab egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszöget.

1. Készíts sokszögeket a háromszögek felhasználásával (a háromszögek hézagmentesen kerüljenek egymás mellé, belső szakaszok mindkét oldalán végig kell hogy "érjenek" a háromszögek).
2. Készíts konvex sokszögeket az előző feltételek figyelembe vételével.

A négyzethálós táblára több konvex alakzatot felrajzoltak.

A sokszögek kirakása után a következő észrevételeket tették a diákok:

Az egyenlőszárú háromszög befogóit **r** -el az átfogóját **i**-vel jelöltük. (Racionális, irracionális) Az állításokat nem bizonyítottuk!

1. Az egyenlőszárú derékszögű háromszögekből alkotott konvex alakzat belsejében található szakaszok két oldalán csak azonos számú **r** illetve **i** típusú szakasz van.

   Megjegyzés: Bizonyítás: ha a szakasz egyik oldalán a db egységnyi és b darab $\sqrt{2}$ hosszúságú oldal van , a másikon pedig c illetve d. Akkor fenn áll a következő:

   $$\begin{aligned} a + b\sqrt{2} &= c + d\sqrt{2} \\ a - c &= (d - b)\sqrt{2} \end{aligned}$$

   Ez csak akkor lehetséges, ha $a - c = 0 \Rightarrow a = c$ illetve $b - d = 0 \Rightarrow b = d$.

2. Egy belső szakasz két oldalán nincs egyszerre **r** és **i** típusú szakasz.
3. A konvex alakzat oldalain vagy minden háromszög oldal **r** vagy **i** típusú.
4. Az oldalak 45°-ként váltanak típust. Vagyis ha két szomszédos oldal **r** és **i**, akkor a sokszög szöge 45° vagy 135° ha azonos típusú oldalak szomszédosak, akkor a szögük 90°.
5. A kirakott konvex sokszög legfeljebb nyolcszög lehet.

   Megjegyzés: Ezt az állítást bizonyítottuk is. Mivel a legnagyobb szög 135° lehet, ezért az n szög belső szögeinek összege legfeljebb $n \cdot 135°$ lehet.

   $$\begin{aligned} n \cdot 135° &\geq (n-2) \cdot 180° \\ n \cdot 135° &\geq n \cdot 180° - 360° \\ 360° &\geq 45° \cdot n \\ 8 &\geq n \end{aligned}$$

6. A konvex sokszögek mindegyike beírható egy téglalapba úgy, hogy a téglalap oldalain az **r** típusú oldalak legyenek.

Ezek után a gyerekek mind a 16 háromszöget felhasználva raktak ki konvex sokszögeket. A megoldások felkerültek a táblára, majd módszeresen megpróbáltuk az összes lehetséges esetet megtalálni.

A módszer során a lehetséges téglalapokat vettük sorra.

Összesen 20 eset van.

Ezután kapták meg a gyerekek a klasszikus kínai tangramot, melyben az alakzatok összesen 16 egyenlőszárú háromszöget tartalmaznak. A kínai tangram összesen 7 elemből áll (2 db nagy (8-8 kis háromszögből álló) egyenlőszárú derékszögű háromszög, 1 közepes (4 kis háromszögből álló) egyenlőszárú derékszögű háromszög, 2 kicsi (2-2 kis háromszögből álló) egyenlőszárú derékszögű háromszög, 1 négyzet (4 kis háromszögből álló), 1 paralelogramma (4 kis háromszögből álló)).

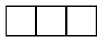
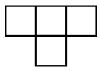
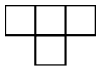
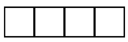
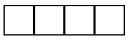
A következő amire nem maradt idő a foglalkozáson az lett volna, hogy az adott alakzatokból melyik konvex sokszöget lehet kirakni.

A foglalkozás végén különböző alakokat, paradoxonokat raktak ki a diákok.

Forrás:Gál Péter Ördöglakatok, pentominók és társaik

Urbán János: Feladatok a sakktábláról

Feladatok

1. A 8×8-as sakktáblát szét akarja valaki fűrészelni 1×1-es kis mezőkre, de egyszerre mindig csak egy réteget vághat. Hány vágás szükséges minimálisan?
2. Az előző feladatot akarjuk megoldani, de most egymásra téve akárhány réteget vághatunk. Minimálisan hány vágás szükséges?
3. A 8×8-as sakktábla két átellenes sarokmezőjét kihagyjuk. Lefedhető-e a megmaradt rész egyrétűen és hézagtalanul 31 dominóval (egy dominó éppen 2 mezőt fed)?
4. A 8×8-as sakktáblából kivágtunk két különböző színű mezőt (egy sötétet és egy világosat). Lefedhető-e a megmaradt rész egyrétűen és hézagtalanul 31 dominóval (egy dominó most is 2 mezőt fed)?
5. Lefedhető-e a 8×8-as sakktábla egy mező kivételével 21 darab  alakú triminóval? Melyik mezőt lehet kihagyni? (A triminó éppen 3 mezőt fed le, és a lefedést itt is egyrétűen és hézagtalanul kell megvalósítani).
6. Lefedhető-e a 8×8-as sakktábla egyrétűen és hézagtalanul 16 darab  alakú tetraminóval?
7. Lefedhető-e a 6×6-os sakktábla egyrétűen és hézagtalanul 9 darab  alakú tetraminóval?
8. Lefedhető-e a 8×8-as sakktábla 32 darab dominóval úgy, hogy bármely a tábla szélével párhuzamos egyenes legalább egy dominót kettévágjon?
9. Lefedhető-e a 6×6-os sakktábla 18 darab dominóval úgy, hogy bármely a tábla szélével párhuzamos egyenes legalább egy dominót kettévágjon?
10. Lefedhető-e a 10×10-es sakktábla 25 darab  tetraminóval?
11. Lefedhető-e a 6×6-os sakktábla 9 darab  tetraminóval?
12. Egy ló áll a bal alsó sarokmezőn a 8×8-as sakktáblán (a1-en). Erről indulva bejárhatja-e lólépésben a sakktáblát úgy, hogy minden mezőre egyszer és csak egyszer lép és a jobb felső sarokba (h8-ra) érkezik?
13. Igazoljuk, hogy a 8×8-as sakktáblát a ló a bal felső mezőből (a8-ról) indulva bejárhatja úgy, hogy minden mezőre egyszer és csak egyszer lép és először az a-val jelölt mezőket, majd a további három betűvel jelzett 16–16–16 mezőt járja végig:

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a
a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

14. Legfeljebb hány lovat lehet elhelyezni a 8×8-as sakktáblán úgy, hogy egyik se üsse a másikat?
15. Legfeljebb hány futót lehet elhelyezni a 8×8-as sakktáblán úgy, hogy egyik se üsse a másikat?
16. Legfeljebb hány bástyát lehet elhelyezni a 8×8-as sakktáblán úgy, hogy egyik se üsse a másikat?
17. Legfeljebb hány királyt lehet elhelyezni a 8×8-as sakktáblán úgy, hogy egyik se üsse a másikat?
18. Helyezzünk el 8 királynőt a 8×8-as sakktáblán úgy, hogy egyik se üsse a másikat!
19. Legalább hány bástyát kell elhelyezni a sakktáblán, hogy minden szabad mező „ütés alatt” álljon?
20. Helyezzünk el 8 futót a 8×8-as sakktáblára úgy, hogy minden szabad mezőt „ütés alatt” tartsanak!
21. Helyezzünk el 12 lovat a 8×8-as sakktáblára úgy, hogy minden szabad mezőt „ütés alatt” tartsanak!
22. Helyezzünk el 9 királyt a 8×8-as sakktáblára úgy, hogy minden szabad mezőt „ütés alatt” tartsanak!
23. Helyezzünk el 5 királynőt a 8×8-as sakktáblára úgy, hogy minden szabad mezőt „ütés alatt” tartsanak!
24. Mutassuk meg, hogy a bal alsó sarokban (a1 mező) álló királynő 14 lépésben a (8×8-as) sakktábla minden mezőjét legalább egyszer érintheti!
25. A 6×6-os sakktáblán helyezzük el 6 királynőt úgy, hogy egyik se üsse a másikat.

10. évfolyam: Elveszi, amit hozzáadott, mégis jól jár

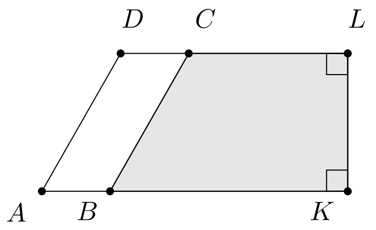
A 10.-es csoport Andrey Yegorov: What you add is what you take c. cikkét dolgozta fel. Az alábbi fordítás (és a TeX-helés) Forrás Bence munkája.

Ezt a cikket egy széles körben ismert régi történettel kezdem, amelyet az Ignatyev E. I. által írt *V tsarstve smekalki* (*A természetes ész birodalma*) című régi orosz könyvben találtam (első kiadás 1908-ban).

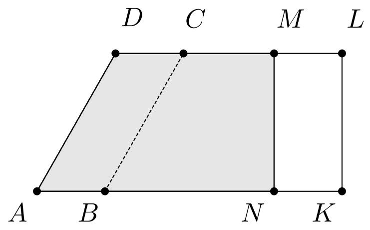
> Egy öregembernek három fia volt. Úgy rendelkezett, hogy halála után osszák el tevecsordáját három fia között a következőképpen. A legidősebb fiú kapja a csorda felét, a középső fiú a csorda harmadát, a legkisebb fiú a csorda kilencedét. Az öregember meghalt, 17 tevét hagyva fiaira. A fivérek megpróbálták elosztani az örökséget, de szembesültek azzal a problémával, hogy 17 sem kettővel, sem hárommal, sem kilenccel nem osztható. Reménytelennek tűnő dilemmájukkal a bölcshöz fordultak. A bölcs átlovagolt hozzájuk saját tevéjén, és elosztotta az apa csordáját a végrendeletnek megfelelően. Hogyan tehette meg ezt?

Ne törje a fejét túl hosszan ezen a zavarba ejtő rejtvényen, ez csak egy vicc: a bölcs hozzáadta saját tevéjét a csordához, majd az új tevecsorda felét (9 tevét) a legidősebb testvérnek, harmadát (6 tevét) a középső testvérnek, kilencedét (2 tevét) a legkisebb testvérnek adta, és elvette a maradék tevét ($18-9-6-3=1$), ami történetesen a sajátja volt. Ezután eltávozott, a fivéreket – és kétségtelenül Önt is – teljes mértékben összezavarva.

Biztos vagyok benne, hogy rá fog jönni a bölcs trükkjére (habár első ránézésre roppant rejtélyesnek tűnik, ugye?). Mindazonáltal a célom nem az volt, hogy bolonddá tegyem vagy megmosolyogtassam (bár szerintem ez elég jó mentség lenne). A bölcs trükkje jól illusztrálja a matematikai objektumok átalakításában egyik leggyakrabban használt technikát. Például az algebrában gyakran adunk hozzá és vonunk ki egy kifejezésből egyenlő tagokat, így megőrizve az összértéket, de egyszerűbbé téve az átalakítást. E cikkben számos hasonló algebrai átalakítással találkozhat majd, előbb azonban le kell szögeznünk, hogy az algebra közel sem az egyetlen matematikai ág, ahol a „hozzáadok és kivonok" fogást alkalmazzuk. Valójában szinte mindenütt találkozhatunk vele; az első komolyabb példa éppen geometriai lesz. Vezessük le a paralelogramma területére vonatkozó közismert képletet: a terület egyenlő az alap és a magasság szorzatával (a levezetés során ismertnek tekintjük, hogy a téglalap területe egyenlő két szomszédos oldalának szorzatával).



1. ábra



2. ábra

Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát, és bővítsük ki a $CBKL$ trapézzal (lásd 1. ábra), amelynek BK és CL alapjai az AB és DC meghosszabbításai, és KL szára merőleges alapjaira. Most meghúzzuk az

LK-val párhuzamos MN szakaszt úgy, hogy az $ANMD$ trapéz egybevágó legyen a $BKLC$ trapézzal (2. ábra). Így az $AKLD$ trapézból megmarad a $KLMN$ téglalap, amely az egybevágóság miatt azonos területű $ABCD$-vel. $KLMN$ területe viszont $NK \cdot KL$, és NK a paralelogramma alapjával, KL pedig a magasságával egyezik meg.

Feladatok.

1. Egy szórakozott matematikus ahelyett, hogy tejet öntött volna a csészényi kávéjához, egy kanál kávét öntött a kancsónyi tejhez, majd a kancsó tartalmát gondosan összekeverte. Ezután észrevette a hibát, és a keverékből egy kanálnyit öntött vissza a kávéhoz. Melyikből van több: tejből a kávéban vagy kávéból a tejben? Függ-e a válasz attól, hogy mennyire gondosan voltak a folyadékok összekeverve? És mi köze van ennek a problémának a paralelogramma területének fenti kiszámítási módjához?

2. Mutassuk meg, hogyan lehet egy trapézt azonos területű paralelogrammává alakítani egybevágó síkidomok hozzáadásával és elvételével. Ezekből a képletekből vezessük le a trapéz és a háromszög területképletét.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy ferde hasáb térfogata egyenlő az alkotókra merőleges síkmetszet területének és az egyik alkotó hosszának szorzatával.

4. Adjunk olyan képletet a 3. feladatban szereplő hasáb oldallapjának területére, melynek változói az oldalél hossza és az alkotókra merőleges síkmetszet kerülete.

Teljes négyzetté alakítás

Algebrával folytatjuk.

A „hozzáadunk és elveszünk”-technika egyik leggyakoribb alkalmazása algebrai kifejezések átalakítása egy összeg vagy különbség négyzetévé. Például a következőképpen:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= u^2 + 2uv + v^2 - 2uv \\ &= (u+v)^2 - 2uv, \end{aligned}$$

hasonlóan

$$u^2 + v^2 = (u-v)^2 + 2uv.$$

E két egyszerű átalakítás közül az elsőt fogjuk használni a következő példában.

1. példa. Milyen n pozitív egészekre lesz $n^4 + 4$ prímszám?

Megoldás. Az $n^4 + 4$ kifejezés átalakítható $u^2 + v^2$ alakba $u = n^2$, $v = 2$ értékekkel. Ekkor

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= (n+2)^2 - 4n^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2). \end{aligned}$$

Tehát n^4+4 mindig két egész szám szorzata, amelyek közül a kisebbik $(n-1)^2+1$, ami mindig nagyobb, mint 1, kivéve, ha $n = 1$. Tehát $n > 1$-re $n^4 + 4$ összetett szám, $n = 1$-re pedig értéke az 5 prímszám.

E példa megoldása közben a n^4+4 polinomot két másodfokú tényező szorzatára bontottuk. A következő példa is egy hasonló szorzattá alakítás.

2. példa. Alakítsuk szorzattá az $x^4 + x^2 + 1$ polinomot.

Megoldás. Adjunk hozzá és vonjunk ki x^2-et:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x+1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Hasonló módon vezetjük le az $x^2 + px + q = 0$ másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \tfrac{p}{2}x + \tfrac{p^2}{4} + q - \tfrac{p^2}{4} \\ &= \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{p^2}{4} - q\right) \\ &= \left(x + \tfrac{p}{2} - \sqrt{\tfrac{D}{4}}\right)\left(x + \tfrac{p}{2} + \sqrt{\tfrac{D}{4}}\right), \end{aligned}$$

ahol $D = p^2 - 4q$-ról feltesszük, hogy nemnegatív. A szorzattá alakításból egyértelműen következik a megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

A következő példa egy negyedfokú egyenlet megoldása.

3. példa Oldjuk meg a következő egyenletet: $x^4 + 4x - 1 = 0$.

Megoldás. Egyszerre két teljes négyzetet hozunk létre $2x^2 + 1$ hozzáadásával és kivonásával:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x - 1 &= x^4 + 2x^2 + 2 - 2x^2 + 4x - 2 \\ &= \left(x^2 + 1\right)^2 - 2\left(x - 1\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Ebből az következik, hogy $x^2+1 = \pm\sqrt{2}(x-1)$, azaz $x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2} = 0$ vagy $x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2} = 0$. Ezen egyenletek megoldásával megkapjuk a gyököket:

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2},$$

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{4\sqrt{2} + 2}}{2}$$

(ahol $i = \sqrt{-1}$ az imaginárius egység).

Később meg fogjuk nézni, hogyan lehet egy tetszőleges negyedfokú polinomot másodfokú tényezők szorzatára bontani teljes négyzetté való kiegészítéssel. Ezen a ponton szeretnék megemlíteni egy történeti érdekességet, amely az $x^4 + a^4$ kifejezés szorzattá alakításával kapcsolatos. G. W. Leibniz (egyike a matematikai analízis megalkotóinak) úgy vélte, ez a kifejezés nem bontható fel másodfokú polinomok szzorzatára. Ennek ellenére ezt most rögtön megtesszük:

$$\begin{aligned} x^4 + a^4 &= x^4 + 2x^2a^2 + a4 - 2x^2a^2 \\ &= \left(x^2 + a^2\right)^2 - \left(\sqrt{2}xa\right)^2 \\ &= \left(x^2 + \sqrt{2}xa + a^2\right)\left(x^2 - \sqrt{2}xa + a^2\right). \end{aligned}$$

Feladatok.

5. Milyen n pozitív egészre lesz $n^4 + 4^n$ prímszám?
6. Alakítsuk másodfokú polinomok szorzatává (lásd az előző példát)!
   (a) $x^4 - a^2x^2 + a^4$;
   (b) $x^4 + bx^2 + c$.
7. Oldjuk meg az egyenleteket!
   (a) $x^4 + 8x - 7 = 0$;
   (b) $\left(x^2 - 1\right)^2 = 4(2x + 1)$;
   (c) $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$.

Ezt a problémasort egy olyan feladattal zárom, amiben a „hozzáadunk és elveszünk”-trükköt arra használjuk, hogy az $u^2 + uv + v^2$ „majdnemteljes négyzetet” hozzuk létre, amely az $u^3 - v^3$ szorzattá alakításában jelenik meg.

4. példa Írjuk fel $a^5 + a + 1$-et két egész együtthatós polinom szorzataként.

Megoldás.

$$\begin{aligned} a^5 + a + 1 &= a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 \\ &= a^2(a^3 - 1) + a^2 + a + 1 \\ &= \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^3 - a^2 + 1\right). \end{aligned}$$

(Itt az $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$ átalakítást használtuk $u = a$, $v = 1$ értékekkel.)

Ebből a szorzatalakból levonhatjuk a következtetést, hogy $a^5 + a + 1$ összetett szám minden $a > 1$ egészre.

Feladatok.

8. Alakítsuk szorzattá a polinomokat!
   (a) $a^{10} + a^5 + 1$;
   (b) $a^8 + a + 1$.
9. Bizonyítsuk be, hogy 1 208 000 401 összetett szám.

Szorzás és osztás

Eddig csak hozzáadás és kivonás segítségével hajtottunk végre átalakításokat. Bizonyos esetekben hasznos lehet még egy inverz műveletpárt alkalmazni: a szorzást és az osztást.

5. példa Határozzuk meg a

$$P = \prod_{i=0}^{n-1} \cos 2^i x = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1} x$$

szorzat értékét.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\sin x \neq 0$, és szorozzuk meg és osszuk el P-t $\sin x$-szel:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1} x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1} x}{2 \sin x} \\ &= \ldots \\ &= \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}. \end{aligned}$$

(Ha $\sin x = 0$, $P = \pm 1$.)

Így megkaptunk egy szép képletet, aminek segítségével levezethetjük Viète képletét π-re. Ennek eléréséhez vegyük a

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

egyenlet mindkét oldalának határértékét – az egyenlet azonnal következik az 5. példából (x helyére $2^{-n} x$-et helyettesítve) –, ha $n \to \infty$.

A jól ismert $(\sin\alpha)/(\alpha) \to 1$, ahogy $\alpha \to 0$ használatával észrevehetjük, hogy a jobb oldali tört nevezője x-hez tart, ha $n \to \infty$:

$$2^n \sin\frac{x}{2^n} = x \cdot \frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n} \to x,$$

mert $x/2^n \to 0$, ahogy $n \to \infty$. A bal oldal végtelen szorzattá válik, így a következőt kapjuk:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^i} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n} \cdot \ldots = \frac{\sin x}{x}.$$

$x = \pi/2$ behelyettesítésével kapjuk:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \cos\frac{\pi/2}{2^i} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \ldots = \frac{2}{\pi}.$$

De minden x hegyesszögre

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Ezért $n \geq 2$-re

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{2^n} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}}} \\
&= \ldots \\
&= \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n-1 \text{ gyökjel}},
\end{aligned}$$

és így

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

10. feladat. Határozzuk meg a következő végtelen szorzat értékét:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \cdot \ldots$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}}}.$$

A „szorzás és osztás”-módszer használatával bizonyos öszegek értékét is ki lehet számolni.

6. példa Határozzuk meg az

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$$

összeg értékét.

Megoldás. Szorozzuk meg (és később majd osszuk el) mindkét oldalt 9-cel:

$$\begin{aligned}
9S_n &= 9 + 99 + \ldots + \underbrace{9\ldots9}_{n} \\
&= 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \ldots + 10^n - 1 \\
&= 10 + 10^2 + \ldots + 10^n - n \\
&= \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n.
\end{aligned}$$

Tehát a válasz

$$S_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.$$

7. példa Határozzuk meg az

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sin ix = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$

összeg értékét.

Megoldás. Az olvasó bizonyíthatja (vagy emlékezhet rá), hogy $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[(\cos(A-B) - \cos(A+B)]$. Ha $\sin x/2 \neq 0$, akkor ennek a képletnek a használatával kapjuk:

$$\begin{aligned}
S_n \sin\frac{x}{2} &= \sin\frac{x}{2} \cdot \sin x + \sin\frac{x}{2} \cdot \sin 2x + \ldots + \sin\frac{x}{2} \cdot \sin nx \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \ldots + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) \\
&= \sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}.
\end{aligned}$$

Ebből következően

$$S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

(Természetesen ha $\sin(x/2) = 0$, akkor $S_n = 0$.)

11. feladat. Számítsuk ki az összegek értékét!

(a) $x + 2x^2 + \ldots + nx^n$;

(b) $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

Számelméleti példa következik.

8. példa Melyik 2-nek a legnagyobb hatványa, ami osztója P_n-nek, ha

$$P_n = \prod_{i=1}^{n}(n+i) = (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot 2n?$$

Megoldás. Szorozzuk meg és osszuk el P_n-et $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$-nel és alakítsuk át a számlálót:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{n! \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (2n)}{n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \\ &= \frac{2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1))}{n!} \\ &= \frac{2^n \cdot n! \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1))}{n!} \\ &= 2^n \cdot (2n-1)!!, \end{aligned}$$

ahol $(2n-1)!!$ a $(2n-1)$ *szemifaktoriálisát* jelöli, azaz az adott számmal azonos paritású számok szorzatát 1-től a számig, ebben az esetben a páratlan számok szorzatát $(2n-1)$-ig. Az utolsó sorból látszik, hogy a válasz 2^n.

Egyszerűen lehetetlen egyetlen cikkben többé vagy kevésbé teljes fogalmat alkotni a „hozzáadás és elvétel”-, illetve a „szorzás és osztás”-módszerrel megoldható példák sokféleségéről. (Például még csak nem is érintettem ezen technikák alkalmazásait egyenlőtlenségeknél.) Remélem, hogy Ön sok példát fog megtalálni és megoldani egyedül is. Most szeretném teljesíteni a fentiekben tett ígéretemet és megmutatni, hogyan lehet negyedfokú polinomokat másodfokú polinomok szorzatává alakítani.

Ferrari-módszer

Lodovico Ferrari (1522–1565) útját fogjuk követni, aki felfedezett egy módszert negyedfokú egyenletek megoldására másodfokú egyenletekre való redukálással (egy harmadfokú segédegyenlet használatával).

Tekintsük a

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

egyenletet, és módszerünk alkalmazásával írjuk át

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2\frac{a}{2}x^3 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{a^2}{4}x^2 + bx^2 + cx + d \\ &= \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + cx + d \end{aligned}$$

alakba.

Most próbáljuk meg a fenti kifejezést két négyzet különbségeként felírni, hogy szorzattá tudjuk alakítani. Ennek eléréséhez $P(x)$-hez hozzáadunk és elveszünk belőle $2\alpha\left(x^2 + ax/2\right)$-t, ahol α egy egyelőre ismeretlen szám. Ekkor $P(x)$ a következő alakot ölti:

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{ax}{2} + \alpha\right)^2 - \left(Ax^2 + Bx + C\right),$$

ahol $A = 2\alpha + a^2/4 - b$, $B = a\alpha - c$, $C = \alpha^2 - d$. Az $Ax^2 + Bx + C$ háromtagú kifejezésről szeretnénk elérni, hogy teljes négyzet legyen, ami akkor és csak akkor igaz, ha teljesülnek a következő feltételek: $A > 0$ és $B^2 - 4AC = 0$, azaz ha

$$(a\alpha - c)^2 = 4\left(2\alpha + \frac{a^2}{4} - b\right)\left(\alpha^2 - d\right).$$

Ezt a harmadfokú egyenletet α-ra $P(x)$ Ferrari-rezolvensének nevezzük. Ha α_0 a rezolvens olyan gyöke, amire $2\alpha_0 + a^2/4 - b > 0$ (vagyis $A > 0$), akkor $P(x)$ felírható két négyzet különbségeként:

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{ax}{2} + \alpha\right)^2 - (kx - l)^2,$$

ahol k-t és l-t $P(x)$-ből és α_0-ból fejezzük ki. Tehát az eredeti egyenletet két máaodfokú egyenletre redukáltuk. (És természetesen képesek leszünk $P(x)$-et másodfokú polinomok szorzatára bontani.)

Bizonyosodjunk meg arról, hogy a rezolvens szükséges gyöke valóban létezik. A fent írt harmadfokú egyenletet a következőképpen írhatjuk:

$$Q(\alpha) = 4\left(2\alpha + \frac{a^2}{4} - b\right)\left(\alpha^2 - d\right) - (a\alpha - c)^2 .$$

Ha behelyettesítünk $\alpha = 1/2\left(b - a^2/4\right)$-et, azt kapjuk, hogy $Q(\alpha) = -(a\alpha - c)^2 < 0$, míg elég nagy α-ra $Q(\alpha) > 0$ (mert $Q(\alpha) = 8\alpha^3 + \alpha$ egy másodfokú polinomja). Ebből következően létezik egy olyan $\alpha_0 > 1/2\left(b - a^2/4\right)$ szám, amire $Q(\alpha_0) = 0$ – és pontosan ezt akartuk bizonyítani.

A Ferrari-módszer alkalmazásához szükséges tudni, hogyan kell harmadfokú egyenleteket megoldani. Létezik egy képlet (az ún. *Cardano-képlet*[2]), amely megadja egy harmadfokú egyenlet gyökeit a négy alapművelet és gyökvonás (négyzet- és köbgyökvonás) használatával. A másodfokú egyenletek szintén megoldhatók gyökökkel. A Ferrari-módszerrel szintén kifejezhetjük egy negyedfokú egyenlet gyökeit – tehát létezik *megoldóképlet* a négy alapművelet és négyzet- illetve köbgyökvonás felhasználásával negyedfokú egyenlet megoldására. Paolo Ruffini (1765-1822) és Niels Henrik Abel (1802–1829) bebizonyították, hogy magasabb fokú egyenletekre nem létezik ilyen megoldóképlet. Sőt, Galois munkájából (lásd „The Short, Tubrulent Life of Évariste Galois” c. cikket a *Quantum* 1991-es november/decemberi számában) kiderül, hogy létezik olyan egész együtthatós ötödfokú egyenlet, amelynek gyökei nem fejezhetők ki együtthatóinak (tehát egészek) véges számú összeadásával, kivonásával, szorzásával, osztásával és tetszőleges kitevőjű gyökvonással. Ilyen egyenlet például az $x^5 - 25x - 5 = 0$, amelynek három valós és két komplex gyöke van.

Az olvasó esetleg vissza kíván térni a 3. feladatra, hogy megnézze, hogy működött ott a Ferrari-módszer. Vagy inkább nézzünk meg egy példát, amely a Ferrari-módszer közvetlen alkalmazását mutatja be.

8. példa Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^4 - 10x^2 - 88x + 5 = 0.$$

Megoldás. A már levezetett képlet alkalmazása helyett inkább járjuk végig a Ferrari-módszer lépéseit újra. Először írjuk át az egyenletet:

$$x^4 = 10x^2 + 8x - 5.$$

Adjunk $2\alpha x^2 + \alpha^2$-et mindkét oldalhoz:

$$\left(x^2 + \alpha\right) = (10 + 2\alpha)\, x^2 + 8x + \alpha^2 - 5.$$

A jobb oldalon lévő másodfokú polinom diszkriminánsát tegyük egyenlővé nullával:

$$16 - (10 + 2\alpha)\left(\alpha^2 - 5\right) = 0.$$

Egyszerűsítés után kapjuk az egyenletet α-ra:

$$\alpha^3 + 5\alpha^2 - 5\alpha - 33 = 0.$$

Ezen egyenlet egyik gyökét könnyen kitalálhatjuk: $\alpha = -3$. Ezt az értéket behelyettesítve

$$\left(x^2 - 3\right)^2 = 4x^2 + 8x + 4 = 4(x + 1)^2,$$

amelyből $x^2 - 3 = 2x + 2$ vagy $x^2 - 3 = -2x - 2$. Az $x^2 - 2x - 5 = 0$ és az $x^2 + 2x - 1 = 0$ egyenletek megoldásával végül megkapjuk a választ: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Most próbálja meg a Ferrari-módszert egyedül alkalmazni.

[2] *Szerkesztői megjegyzés:* Ferrari tanára, Girolamo Cardano (1501–1576) volt az első, aki publikálta ezt a képletet. A megoldóképlet felfedezésének története egyike a matematikatörténet legérdekesebb fejezeteinek, és a témáról egy különleges cikk megjelentetését is tervezzük.

Feladatok.

12. Oldjuk meg az egyenleteket!

    (a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$;

    (b) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$.

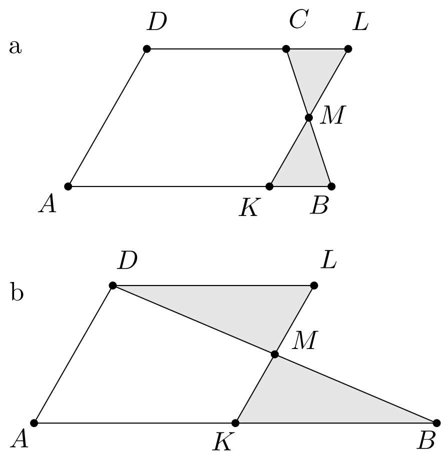
13. Alakítsuk másodfokú polinomok szorzatává!

(a) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2$;

(b) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$.

Megoldások

1. A kávé mennyisége a tejben megegyezik a tej mennyiségével a kávéban, és ez nem függ attól, milyen pontosan voltak összekeverve. Geometriailag gondolhatjuk a kanálnyi kávét a tejben a 2. ábrán lévő $ANMD$ trapéz területének, a $CBKL$ területe pedig a kanálnyi keverék visszaöntve. Ekkor $ABCD$ a „maradék kávé a kancsóban” és „mennyiségben” megegyezik $KLMN$-nel, ami „a tej a kávéba töltve”.



15. ábra

2. A 15a ábrán látható, hogyan lehet az $ABCD$ trapézt paralelogrammává alakítani a BMK háromszög levágásával és a CML egybevágó háromszög hozáadásával (M BC középpontja). Az $ABCD$ területére vonatkozó képlet így levezethető a paralelogramma területképletéből. A háromszögre vonatkozó képlet a 15b ábra alapján hasonlóan vezethető le.

3. Hosszabbítsuk meg a hasáb párhuzamos alkotóit (16. ábra), és metsszük el őket két rájuk merőleges síkkal úgy, hogy a síkok egymástól oldalhossznyi távolságra legyenek. Innentől használjuk a cikk paralelogrammára vonatkozó módszerét területek helyett térfogatokkal.

4. A feladatban szereplő terület egyenlő a kerület és az élhossz szorzatával.

5. Csak $n = 1$-re. Ha n páros, $n^4 + 4^n$ szintén páros. $n = 2k + 1$-re a kifejezést szorzattá alakíthatjuk a következőképpen:

$$\begin{aligned} n^4 + 2^{2n} &= n^4 + 2 \cdot n^2 \cdot 2^n + 2^{2n} - 2^{n+1} \cdot n^2 \\ &= \left(n^2 + 2^n\right)^2 - \left(2^{k+1} \cdot n^2\right)^2 \\ &= \left(n^2 + 2^n - 2^{k+1} \cdot n^2\right)\left(n^2 + 2^n + 2^{k+1} \cdot n^2\right). \end{aligned}$$

A második tényező mindig, az első pedig akkor nagyobb 1-nél, ha $n > 1$, mert $n^2 + 2^n \geq 2\sqrt{n^2 \cdot 2^n} > n \cdot 2^{k+1}$.

6. (a) $x^4 - a^2x^2 + a^4 = x^4 + 2a^2x^2 + x^4 - 3a^2x^2 = \left(x^2 + a^2\right) - 3a^2x^2 = \left(x^2 - ax\sqrt{3} + a^2\right)\left(x^2 + ax\sqrt{3} + a^2\right)$.

(b) Ha $D = b^2 - 4c \geq 0$, akkor $x^4 + bx^2 + c = \left(x^2 - y_1\right)\left(x^2 - y_2\right)$, ahol y_1 és y_2 az $y^2 + by + c = 0$ egyenlet gyökei. Izgalmasabb a helyzet, ha $D < 0$, vagyis $4c > b^2$, ekkor ugyanis

$$\begin{aligned} x^4 + bx^2 + c &= x^4 + 2\sqrt{c}x^2 + c + (b - 2\sqrt{c})\, x^2 \\ &= \left(x^2 + \sqrt{c}\right)^2 - (2\sqrt{c} - b)\, x^2, \end{aligned}$$

amit két négyzet különbségeként tudunk szorzattá alakítani.

7. (a) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}\sqrt{4\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}$ és $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{8 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$.
Segítség: $x^4 + 8x - 7 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2\left(x^2 - 4x + 4\right) = \left(x^2 + 1\right)^2 - 2\,(x - 2)^2$.

(b) $1 \pm \sqrt{2}$ és $-1 \pm i\sqrt{2}$. Segítség: az egyenlet $\left(x^2 + 1\right)^2 = 4\,(x + 1)^2$ alakra hozható.

(c) $\left(\dfrac{x^2}{x + 1}\right)^2 = 1 - \dfrac{2x^2}{x + 1}$.
Segítség: mindkét oldalból kivonva $2x^2/(x+1)$-et és a bal oldalt az $x - x/(x+1)$ különbség négyzeteként felírva kapjuk, hogy

$$\left(\frac{x^2}{x + 1}\right)^2 = 1 - \frac{2x^2}{x + 1}.$$

Ezt az egyenletet a $t = x^2/(x + 1)$ helyettesítéssel lehet megoldani.

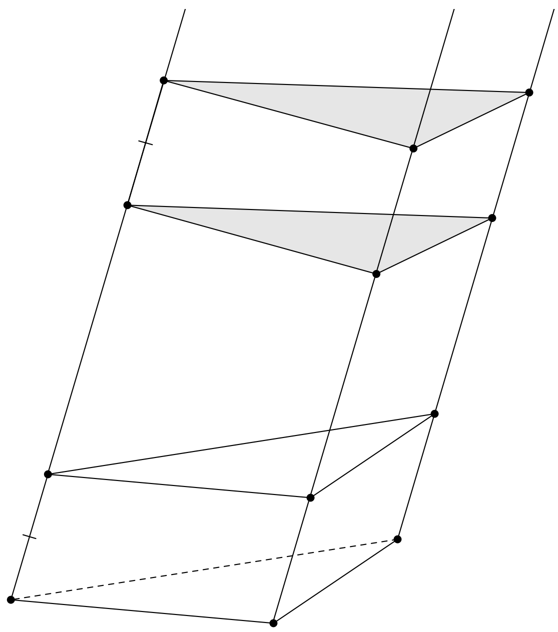
8. (a) $a^{10} + a^5 + 1 = a^{10} + -a + a^5 + a + 1 = a\left(a^3 - 1\right)\left(a^6 + a^3 + 1\right) + a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left[\left(a^2 - a\right)\left(a^6 + a^3 + 1\right) + a^2\,(a - 1) + 1\right] = \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1\right).$

(b) $a^8 + a + 1 = a^8 - a^5 + a^5 + a + 1 = a^5\left(a^3 - 1\right) + \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^3 - a^2 + 1\right) = \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^6 - a^5 + a^3 - a^2 + 1\right).$

9. $1\ 280\ 000\ 401 = a^7 + a^2 + 1$, ahol $a = 20$. Viszont $a^7 + a^2 + 1 = a^7 - a + a^2 + a + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left[a\,(a - 1)\left(a^3 + 1\right) + 1\right].$

10. Az eredmény $3\sqrt{3}/\,(2\pi)$, melyet $(\sin x)\,/\,(x)$ cikkben leírt végtelen szorzatként való kibontásából kapunk $x = 2\pi/3$ behelyettesítésével.

11. (a) $\dfrac{nx^{n+2} - (n + 1)x^{n+1} + x}{(x - 1)^2}$.
Szorozzuk meg S_n-et x-szel, majd vegyük az $xS_n - S_n$ különbséget.



16. ábra

Megjegyzés: az $x = 1$ esetben az összeg az első n természetes szám összege, értéke $n(n+1)/2$.

(b) $\dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$

Szorozzuk meg a összeget $\sin(x/2)$-vel, majd alakítsuk át a 7. példa lépéseit követve.

12. (a) $1 \pm \sqrt{3}$ és $1 \pm i\sqrt{2}$. Az egyenletet átalakítjuk a bal oldalon teljes négyzetté alakítással:

$$\left(x^2 - 2x\right)^2 = -x^2 + 2x + 6.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadunk $2\alpha\left(x^2 - 2x\right) + \alpha^2$-et:

$$\left(x^2 - 2x + \alpha\right) = (2\alpha - 1)\,x^2 - (4\alpha - 2)\,x + 6 + \alpha^2.$$

Az egyenlet Ferrari-rezolvense

$$(2\alpha - 1)^2 = (2\alpha - 1)\left(6 + \alpha^2\right),$$

és gyöke $\alpha = 1/2$. Ezen α behelyettesítésével az egyenlet az

$$\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

alakot ölti.

(b) $1 \pm \sqrt{3}$ és $-3/2 \pm \sqrt{17}/2$.

13. (a) $\left(x^2 + x - 1\right)\left(x^2 + x + 2\right)$. (b) $x^4 + 2x^3 + x - \left(4x^2 + 4x + 1\right) = \left(x^2 + x\right)^2 - (2x+1)^2 = \left(x^2 - x - 1\right)\left(x^2 + 3x + 1\right)$.

12. évfolyam: A világháló rangsorolása lineáris algebrával

A 12. évfolyam csoportja a Pagerank algoritmus matematikájával foglalkozott. Az alábbi írás Bágyoni-Szabó Attila munkája.

Bevezetés

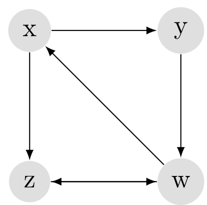
Köztudott, hogy a Google keresőmotor (hasonlóan az összes többi keresőhöz) a keresésekre adott találatait egy ún. *találati listába* rendezi. A rendezés egyik elengedhetetlen szempontja egyfajta fontossági érték, amivel a Google minden számára elérhető webcímet ellát, és amelyet PageRanknek hívnak.

A PageRank nem az egyetlen dolog, ami a lista rendezését meghatározza, „csupán” annak az igénynek a kielégítésére szolgál, hogy minél fontosabb egy találat (pl. minél többen hivatkoznak rá), annál elébb álljon a találati listában. Ebben a cikkben azt vizsgáljuk, hogy mi adja a PageRank matematikai értelmét, és hogy hogyan számíthatjuk ki.

Lehetséges koncepciók

A PageRank elsősorban az oldalak közti hivatkozásokra, más néven linkekre épül. Ezeket két adattal lehet jellemezni: a hivatkozó és a hivatkozott oldal URL-jével. Feltesszük, hogy ez a két webcím különbözik egymástól.

Az oldalak közötti linkhálózatot így egy irányított gráfnak lehet megfeleltetni, ahol a csúcsok az oldalak, az irányított élek pedig azt jelzik, hogy melyik oldal melyik oldalt linkeli. Egy lehetséges „internet-modell” például:



A PageRank egyik általános megfogalmazása a következő. Ha egy weboldal linkel több másikat, akkor a saját fontosságát egyenlő arányban szétosztja ezek között az oldalak között. Minden oldal fontossága az ilyen szétosztott fontosságokból adódik össze.

Itt arra a feltételezésre támaszkodunk, hogy a link egyfajta ajánlás a hivatkozó oldal részéről. Ez persze nem mindig igaz: kritizálás céljából is hivatkozhatunk egy másik oldalra. A gyakorlat mégis azt mutatja, hogy a legtöbb link a hasznos tartalom megjelöléséért jött létre [5].

Van egy másik lehetséges értelmezése a PageRanknek. Szörföljünk az interneten, véletlenszerűen kattintgatva linkről-linkre, majd kellően sok idő után nézzük meg, hogy melyik oldalon mekkora relatív gyakorisággal voltunk. A gyakoriságok a PageRankekhez fognak közelíteni. A PageRankje tehát annak az oldalnak nagyobb, amelyikre szörföléssel egyszerűbb eljutni [1].

Önmagában egyik definíció sem garantálja, hogy a PageRank mindig létezik, vagy hogy egyértelműen megadható. Ezért mindezzel később foglalkozunk.

A PageRank matematikai definíciói

A PageRankre adott első definíciót úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy weboldal PageRankje az összes rá linkelő oldal PageRankjének az egyes oldalakon található linkek számával fordítottan súlyozott összege.

Ugyanezt formálisan így jelölhetjük: ha B_i-vel jelöljük az i indexszel jelzett oldalt linkelő oldalak indexeinek halmazát, l_i-vel pedig az általa linkelt oldalak számát, egy adott oldal I_k fontossága

$$I_k = \sum_{j \in B_k} \frac{I_j}{l_j}.$$

Ez meglepő módon tényleg egybevág a szörföléses definícióval: a k oldalra egy kattintással csak az őt linkelő oldalakról juthatunk el, mindegyikről a rajta található linkek számának reciprokával egyező eséllyel (a véletlenszerű linkválasztás miatt), így annak az esélye, hogy egy adott kattintás előtt a j indexű, utána pedig a k indexű oldalon vagyunk, $\frac{I_j}{l_j}$, végül pedig ezek a valószínűségek összeadódnak, mert az, hogy két különböző oldalról jussunk el a k indexű oldalra ugyanazzal a kattintással, lehetetlen.

A fenti hálózat esetén ez a képlet a következő lineáris egyenletendszerre vezet (szándékosan feltüntetve a 0 együtthatókat):

$$\begin{aligned} 0x + 0y + 0z + \frac{1}{2}w &= x \\ \frac{1}{2}x + 0y + 0z + 0w &= y \\ \frac{1}{2}x + 0y + 0z + \frac{1}{2}w &= z \\ 0x + y + z + 0w &= w \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ez azt írja le, hogy egy mátrix és az $[x, y, z, w]^T$ vektor szorzata egyenlő az $[x, y, z, w]^T$ vektorral:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Általános formában: $\mathrm{L} \cdot v = v$, ahol L egy mátrix, v pedig a PageRankekből alkotott vektor.

Átfogalmazva, a PageRankeket tartalmazó $[x, y, z, w]^T$ oszlopvektor a fenti mátrix 1 sajátértékű sajátvektora, amit stacionárius vektornak is szoktunk nevezni. Esetünkben L sajátvektora a $[2; 1; 3; 4]^T$ vektor, illetve ennek többszörösei. Nem várhatunk el konkrét fontossági értékeket, egyrészt mert a képlettel kapott egyenletrendszer mindig 0 determinánsú, másrészt mert csak sorba akarjuk rendezni a weboldalakat. Ez a fontossági sorrend esetünkben: y, x, z, w.

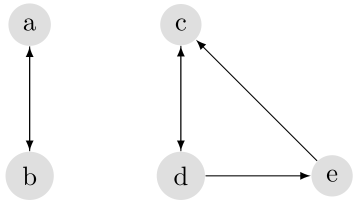
Nem nehéz belátni, hogy az L mátrix arra vonatkozólag tartalmaz információkat, hogy a hálózat melyik oldala melyiket linkeli, és hány oldal között: a mátrix i-edik oszlopának j-edik sorában lévő eleme pontosan akkor nem 0, ha az i-edik oldal linkel a j-edikre, és ekkor egyenlő $\frac{1}{l}_i$-vel. Emiatt egyébként a hálózatban nem engedhetjük meg a nyelőket, amiket egy oldal sem linkel. Ha megengednénk, a mátrix egyik oszlopvektora nullvektor lenne, ami nyilván nem jó, hiszen azt jelentené, hogy valamelyik PageRank akármekkora is lehet.

A továbbiakban ezt a mátrixot linkmátrixnak fogjuk nevezni. A linkmátrix tehát nemnegatív számokat tartalmaz, melyek összege minden oszlopban 1. Az ilyen mátrixoknak nevük is van: oszlop-sztochasztikus mátrixoknak hívjuk őket [2].

A linkmátrix sajátvektorait sokféleképpen kiszámíthatjuk, például az egyenletrendszer megoldásával. De ismert, hogy ez nem vihető végbe $O(n^3)$-nél gyorsabb algoritmussal, ahol n a linkmátrix mérete, ami pedig azt eredményezi, hogy egy kétszer akkora hálózatban kb. 8-szor annyi ideig tart majd a PageRankek kiszámítása. Azt reméljük tehát, hogy van ennél gyorsabb módszer is; s mivel nem kellenek matematikai pontosságú értékek (hiszen elég csak a PageRankek helyes sorrendjét megadni), talán joggal reménykedünk.

Egy szükséges módosítás

Megállapítottuk, hogy a linkmátrixnak nem lehet nullvektor oszlopvektora, valamint hogy ekkor oszlopsztochasztikus. A hálózat emellett gyengén összefüggő kell legyen, máskülönben bármely két komponense között a PageRankek függetlenek lennének egymástól, ami azt jelentené, hogy nem tudjuk egyértelműen rendezni a weboldalakat. Ennél a hálózatnál például:



a linkmátrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

aminek az $[1;1;2;2;1]^T$ vektor is stacionárius vektora, de a $[3;3;2;2;1]^T$ is - holott nyilvánvalóan más fontossági sorrendet állítanak fel a weboldalak között.

A gyenge összefüggőség még mindig nem elég: nézzük meg mi történik, ha húzunk egy irányított élt a-ból d-be! Ekkor a linkmátrixnak stacionárius vektora lesz többek között a $[0;0;2;2;1]^T$ vektor, de a $[0;1;2;2;1]^T$ szintén.

Minden bizonnyal szükségünk lesz arra, hogy a hálózatot átalakítsuk úgy, hogy a PageRankek egyértelműen megadhatóak legyenek. A Google esetében az $\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ linkmátrix helyett a következő G mátrix stacionárius vektorából számítjuk a PageRankeket:

$$\mathrm{G} = \mathrm{L}(1-m) + \frac{1}{n}\mathrm{E}m,$$

ahol $\mathrm{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a csupa 1-esből álló mátrix, m pedig egy 0 és 1 közötti szám. Ez egyfajta átalakítása a szörfölésnek: egyenlő valószínűséggel választunk az oldalon található linkek közül, vagy egy bizonyos kisebb valószínűséggel egy teljesen más oldalra ugrunk.

Nem nehéz megállapítani, hogy tetszőleges x vektorra $\mathrm{G}x$ és $\mathrm{L}x$ koordinátái nagyság szerint azonos sorrendben követik egymást – végigszorozva a fenti egyenletet x-szel, pontosan ezt kapjuk. Ez a következő fejezetek tanulsága alapján azt fogja eredményezni, hogy ha L-nek már eleve van egyértelmű stacionárius vektora, akkor annak koordinátái ugyanolyan nagysági sorrend szerint követik egymást, mint G stacionárius vektorának. Más szóval a G-re való váltás nem "rontja el" a PageRankeket. A Google által eredetileg használt m értékét $0,15$-nek jegyzik [3] [5].

A stacionárius vektor kiszámítása

Tekintsük az $a_1 = x, \quad a_k = \mathrm{G}a_{k-1}, \quad k = 2,3,4,\ldots$ rekurzív sorozatot. Ismert, hogy ha egy rekurzív sorozatnak van határértéke (határvektora), akkor arra a rekurziót elvégezve önmagát kapjuk. Esetünkben tehát az (a_k) sorozat G egyik stacionárius vektorához fog tartani – ha tart valamilyen vektorhoz. Ezt az iteratív numerikus módszert hatványmódszernek hívjuk.

Az előző állítás más módon is szemléltethető. Tegyük fel, hogy G legnagyobb sajátértéke $\lambda_1 = 1$, amihez csak egy sajátvektor tartozik, és az öszes többi sajátérték valós. Tegyük fel továbbá, hogy az a_1 vektor felírható G sajátvektorainak lineáris kombinációjaként. A λ_i-hez tartozó sajátvektort jelöljük v_i-vel. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots \\
a_2 = \mathrm{G}a_1 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \alpha_3 \lambda_3 v_3 + \dots \\
a_3 = \mathrm{G}a_2 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 v_2 + \alpha_3 \lambda_3^2 v_3 + \dots \\
&\vdots \\
a_k &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2^{k-1} v_2 + \alpha_3 \lambda_3^{k-1} v_3 + \dots,
\end{aligned}$$

és $\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k$ $i = 1$ kivételével 0 lesz, az 1-nél kisebb alap miatt, mely azt eredményezi, hogy $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha_1 v_1$, vagyis G egy sajátvektora.

Mindkét gondolatmenetből hiányzik annak a bizonyítása, hogy az a_k sorozat konvergens, hogy nem nullvektorhoz tart, és hogy G-nek csak egy stacionárius vektora van. De még nem használtuk fel, hogy a G mátrix minden eleme nemnulla. Azt, hogy G-nek mindig van-e egyértelmű stacionárius vektora, és hogy ezt milyen numerikus módszerrel számíthatjuk ki, egy csapásra megoldja a következő

1. Tétel (Perron és Frobenius alapján). *Legyen* $\mathrm{M} = [m_{ij}]$ *egy oszlop-sztochasztikus mátrix, aminek minden eleme nemnulla. Ekkor teljesül az alábbi három állítás:*

1. M *legnagyobb valós sajátértéke 1,*
2. *Az 1 egyszeres sajátértéke* M*-nek,*
3. M *azon* w *stacionárius vektorára, melyre* $|w|_1 = 1$, $\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k = [w, w, \dots, w]$ *(ahol* $\sum_i |x_i|$*-t jelöljük* $|x|_1$*-gyel, ez* x *1-normája)* [4].

1. állítás bizonyítása: Legyen λ M egy sajátértéke. Mivel egy mátrix és transzponáltja ugyanazzal a karakterisztikus polinommal, s ezért ugyanazon sajátértékekkel rendelkezik, λ egyben M^T sajátértéke is, így ha x M^T egy λ sajátértékű sajátvektora, $|\lambda||x|_1 = |\mathrm{M}^T x|_1 \le |x|_1$, mert $\mathrm{M}^T x$ minden koordinátája x koordinátáinak súlyozott átlaga. Így $|\lambda| \le 1$. Az 1 mindig sajátértéke M^T-nek - s emiatt M-nek is, hiszen $\mathrm{M}^T[1;1;\dots;1]^T = [|m_1^{(T)}|_1, |m_2^{(T)}|_1, \dots] = [1;1;\dots;1]$. $\square$

Lemma. Legyen d olyan vektor, hogy $\sum_i d_i = 0$. Ekkor az eddig is használt M mátrixra $\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k d = \underline{0}$.

A lemma bizonyítása: Látható, hogy $\sum_i (\mathrm{M}d)_i = \sum_j m_{1j} d_1 + \sum_j m_{2j} d_2 + \dots = \sum_i d_i = 0$. M minden hatványa oszlop-sztochasztikus, tehát $\sum_i (\mathrm{M}^k d)_i \equiv 0$.

Ha meg tudnánk mondani, hogy az M-mel való szorzás legfeljebb milyen szorzóval csökkenti $|d|_1$-et, magától d-től függetlenül, kész lennénk, mert M-mel szorozva d-t nem kapunk más típusú vektort, s ha az M-mel szorzás ezt egy maximalizálható szorzóval csökkenti, $|\mathrm{M}^k d|_1$ 0-hoz fog tartani, ekkor pedig $\mathrm{M}^k d \to \underline{0}$.

Ezért most megállapítjuk, hogy $\frac{|\mathrm{M}d|_1}{|d|_1}$ legfeljebb mennyi lehet általában. Legyen $\delta = \min_{ij} m_{ij}$. Ekkor minden m_i sorvektor felírható $s_i + [\delta, \delta, \dots, \delta]$ alakban, ahol az s_i vektor koordinátái nemnegatívak. Az $\mathrm{S} = [s_{ij}]$ mátrix minden oszlopában $1 - n\delta$ az elemek összege, ahol n az M mátrix mérete. $|\mathrm{S}d|_1 = \sum_i |s_i \cdot d^T|$, ami az $s_{ij} d_j$ számok bizonyos módon előjelezett összege, s mint ilyen, nem nagyobb, mint ha az abszolútértékeiket adnánk össze, ami az előzőek ismeretében $|\left(\sum_i s_i\right) \cdot d^T|_1 = (1 - n\delta)|d|_1$. Ha D a csupa δ-ból álló mátrix, $\mathrm{D}d = \underline{0}$ egyértelmű, és a nemnegatív számok körében vagyunk, így biztos, hogy $|\mathrm{M}d|_1 = |\mathrm{S}d|_1 + |\mathrm{D}d|_1 = |\mathrm{S}d|_1 + 0 \le (1 - n\delta)|d|_1$.

Mivel $0 < n\delta \le 1$, $\lim_{k\to\infty}(1 - n\delta)^k = 0$, ami azt jelenti, hogy $\lim_{k\to\infty} |\mathrm{M}^k d|_1 = 0$. $\square$

3. állítás bizonyítása: Az *1. állítás* értelmében van olyan racionális $w \ne \underline{0}$ vektor, amire $\mathrm{M} \cdot w = w$. Feltehetjük, hogy $\sum_i w_i = 1$, mert ha $\sum_i w_i \ne 0$, akkor w egy konstanssal felszorozható úgy, hogy $\sum_i w_i$

1 legyen, $\sum_i w_i = 0$ pedig lehetetlen, mert akkor a *lemma* miatt $\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k w$ nullvektor lenne, pedig w-nek kéne lennie.

Bizonyítanunk kell, hogy $\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k = [w, w, \ldots, w]$. Ehhez azt az erősebb állítást fogjuk belátni, hogy bármely p és q vektorra, ahol $\sum_i p_i = 1, \sum_i q_i = 1$, $\lim_{k\to\infty}(\mathrm{M}^k \cdot p - \mathrm{M}^k \cdot q) = \underline{0}$. Ebből már következik az állítás, hiszen ez azt jelenti, hogy többek között M hatványainak oszlopvektorai is tartanak a $\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k w = w$ vektorhoz.

Ha $(p-q)$-t r-rel jelöljük, a bizonyítandó állítás: $\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k r = \underline{0}$ (a skaláris szorzat disztributivitását használva). Mivel $\sum_i p_i = 1$ és $\sum_i q_i = 1$, $\sum_i r_i = 0$. Emiatt r-re érvényes a *lemma*, tehát $\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k r = \underline{0}$, ami a kívánt állítás. Ezzel bizonyítottuk, hogy $\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k$ egy $[w, w, \ldots, w]$ alakú mátrix, ahol w M stacionárius vektora. □

2. állítás bizonyítása: Legyen $x \neq \underline{0}$ egy stacionárius vektor. Ekkor a $\mathrm{M}x = x$ azonosságból indukcióval megkapható: $\mathrm{M}^k x \equiv x$. Határértékében:

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k x = x = [w, w, \ldots, w]x = [w_1 \sum_j x_j, w_2 \sum_j x_j, \ldots w_n \sum_j x_j]^T.$$

Másszóval, $x = (\sum_j x_j)w$. Felhasználva, hogy $x \neq \underline{0}$, $\sum_j x_j \neq 0$, bizonyítva ezzel, hogy x és w azonos állású, tehát hogy az 1 egyszeres sajátérték. □

Visszafejtés

Tekintsük a $\lim_{k\to\infty} \mathrm{M}^k q$ határértéket tetszőleges $q \neq \underline{0}, \quad |q|_1 = 1$ nemnegatív vektorra. Ez nem lesz más, mint $\sum_i q_i[w, w, \ldots, w] = cw$, ahol $c \neq 0$. Átfogalmazhatjuk úgy is, hogy iteratív módon szorozva egy tetszőleges kezdővektort egy pozitív oszlop-sztochasztikus mátrixszal, megkapjuk a mátrix stacionárius vektorát. A tétel szintén kimondja, hogy ez a vektor az egyetlen lehetséges stacionárius vektor lesz, valamint hogy ez mindig létezik.

Minthogy G minden eleme pozitív, érvényes rá a tétel, tehát van egyértelmű stacionárius vektora, és tudjuk, hogyan kell kiszámítani.

Korábban megállapítottuk, hogy $\mathrm{G}x$ és $\mathrm{L}x$ koordinátái azonos nagysági sorrendben állnak tetszőleges x vektorra, ezért ugyanez igaz $\lim_{k\to\infty} \mathrm{G}^k x$-re és $\lim_{k\to\infty} \mathrm{L}^k x$-re is. Legyen x L egyértelmű stacionárius vektora; ekkor egyenlő $\lim_{k\to\infty} \mathrm{L}^k x$-szel, így azonos sorrendben állnak a koordinátái, mint $\lim_{k\to\infty} \mathrm{G}^k x$-nek, ami G stacionárius vektora – bizonyítva ezzel, hogy tényleg használhatjuk G-t L helyett.

A Google eredeti algoritmusa szintén a hatványmódszeren alapszik, s a PageRankek kellően pontos kiszámítására kb. 50–100 alkalommal kell iteratív módon megszoroznia egy vektort G-vel. Nézzük meg újra az előbbi tétel *lemmá*ját! Azt kaptuk a bizonyításában, hogy $|\mathrm{M}d|_1$ legfeljebb $(1 - n\delta)|d|_1$ lehet. A G mátrix esetén viszont δ éppen $\frac{m}{n}$, ami azt jelenti, hogy $|\mathrm{M}^k d|_1$ maximális értéke n-től független. Más szóval ez az 50–100 iteráció mindig ugyanolyan pontossággal fogja megadni a PageRankeket, mindegy, hány weboldalunk van.

Ismertettük tehát a PageRank algoritmus matematikai hátterét, és részben a működését is. Mint már utaltunk rá, ez nem a teljes valóság, csak annak a matematikailag legérdekesebb része. Emellett, visszagondolva a PageRank eredeti definíciójára, ez az egyetlen szempont, ami a találati lista rendezését valamennyire is demokratikussá teszi, s mivel ma a böngészők nagy részében a Google az alapértelmezett kereső, demokratikussá teszi az internetet is.

Irodalomjegyzék

[1] David Austin: *How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack*, AMS Feature Column (2006)

[2] Kurt Bryan és Tanya Leise: *The $25,000,000,000 eigenvector - The linear algebra behind Google*, Kansas State University (2005. aug. 8.)

[3] A. N. Langville és C. D. Meyer: *Deeper inside PageRank*. Internet Math., 1 (2005) 335–380.

[4] A. N. Langville és C. D. Meyer: *Google's PageRank and Beyond*. Princeton University Press (2006) 167–174.

[5] John MacCormick: *9 Algorithms That Changed the Future: The Ingenious Ideas That Drive Today's Computers*, Princeton University Press (2011)